第四組數思報告

組員: 411031115數一甲蘇勇齊
411031105數一甲梁順維
410931144數二甲藍立翔
410831108數三甲黃暐傑
410931217應數二林宜加
410831222應數三許光碩

(一)作品名稱:環環相「扣」–奇偶性, 守恆與歸零的模式探究

得獎獎項: 大會獎一等獎

美國 ISEF 正選代表美國第 66 屆國際科 技展覽會 青少年科學獎

作品分類:奇偶性、同餘守恆數、同餘方程

研究動機

在一次數學專題課中，研讀一本書籍《走向 IMO 數學奧林匹克試題集錦(2004)》，看到一道有趣的數學競賽題，題目敍述如下：「在一個正六邊形的六個頂點上有六個非負整數(可以相同)，作如下操作：擦去 一個數，寫上相鄰兩數之差的絕對值。問：對怎樣的正整數 k，使得只要六個頂 點上的數之和爲 k，總可以經過一系列操作，使得最終六個頂點上的數均變爲 0?」 對於這題的解法，能直覺地感受到需要進行邏輯性的歸類與構想操作的巧思， 於是我們便設想，是否能將原始操作條件稍做變化，然後再對原問題做更進一步 的推廣。例如，若是在 n 邊形上操作、或是去除題目中取絕對值的條件、甚至是 對相鄰兩數做線性的變化…等等相關延伸問題的探索。在初步的探究過程中，並 跟指導老師討論與考慮之後，決定以原始問題以及相關延伸問題做爲此次數學科 展探究活動與獨立研究的題材。

研究目的

1. 尋找問題解決過程中有助於深入探究的數學模型。
2. 將初始條件推廣至 n 邊形，探討並找尋滿足條件的正整數 k 與 n 之間的關係。
3. 調整操作規則，針對相鄰兩頂點上的正整數做線性的變化，並找尋相對應滿足 條件的「同餘守恆數φ」與其「同餘守恆模式」和 n 之間的關係。

(二)作品名稱: 切二連三--探索區塊數分布性質的奧秘

得獎獎項 大會獎：二等獎 美國 ISEF 正選代表：美國第 66 屆國際科 技展覽會

作品分類:區塊數、連續與不連續

研究動機

在高一下學期數列與級數單元，我們學會利用遞迴數列求出平面上 n 條直線將平面分割 出的最大區塊數，且進一步對這 n 條直線可能的分割區塊數感到好奇。而在 Oleg A. Ivanov 教授發表的論文裏提及了關於 n 條直線切割平面產生的可能區塊數 R 必定從某個值開始到最 大分割數間呈現連續整數分布。

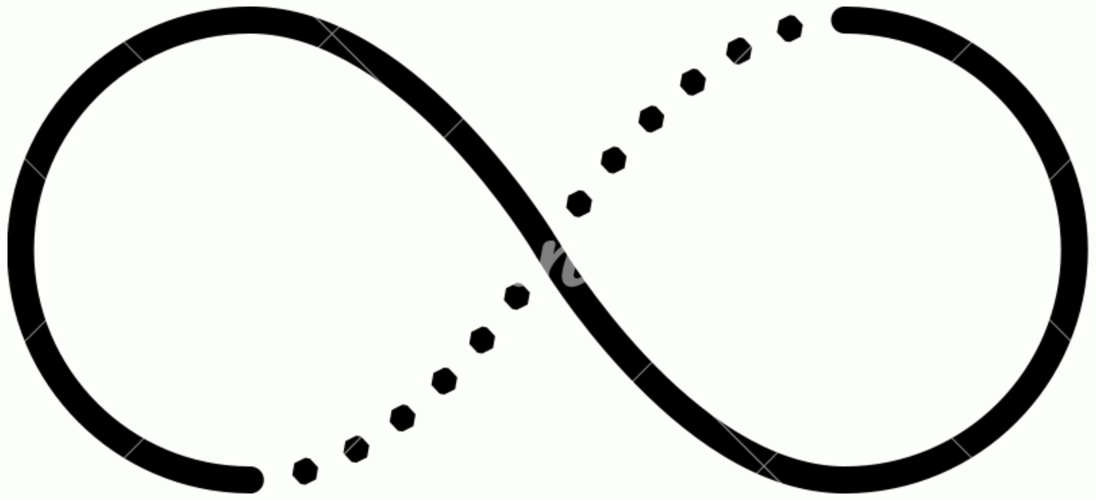
n	R
4	5,8,9,10,11
5	6,10,12,13,14,15,16
6	7,12,15,16,17,18,19, 20,21,22

研究目的

證明：

一、 平面上被 n 條直線分割出的區域數會產生連續分布的區間。

二、 平面上被 n 條直線分割出的區域數會產生「跳躍」的整數區間。



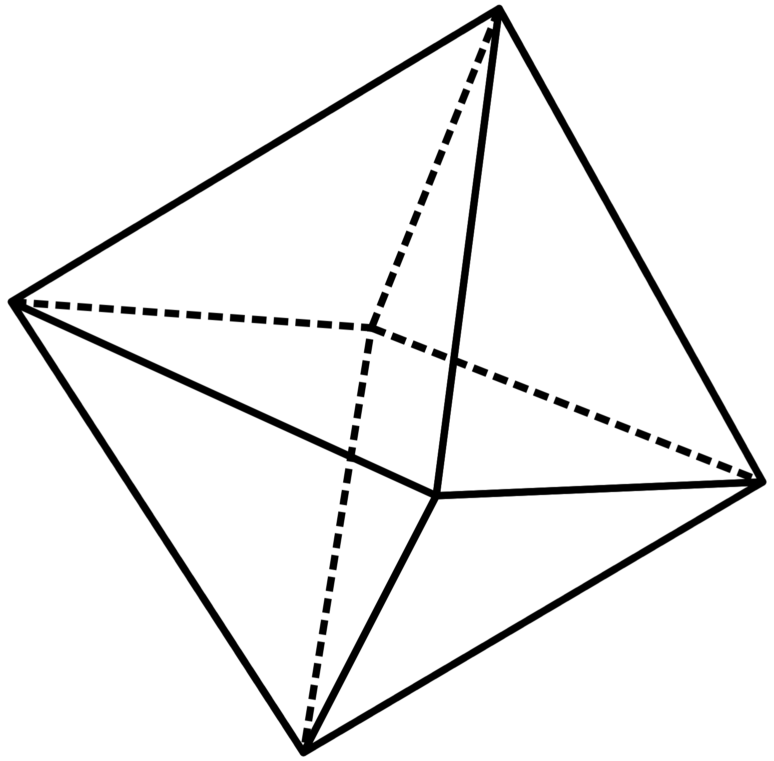
(三)作品名稱:一刀兩斷

得獎獎項 :大會獎三等獎

作品分類:披薩定理、蚶(ㄏㄢ)線、牛頓恆等式

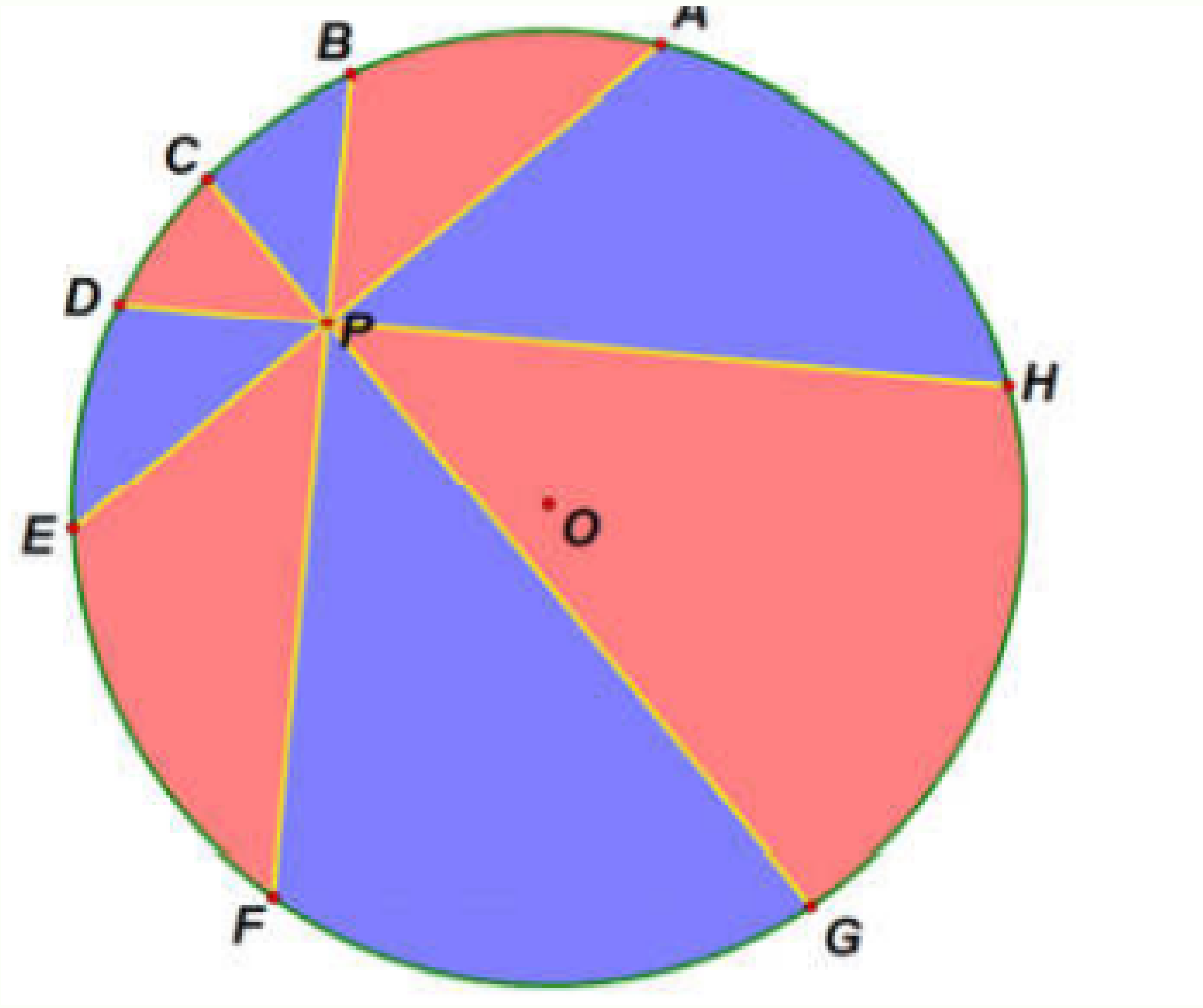
研究動機:

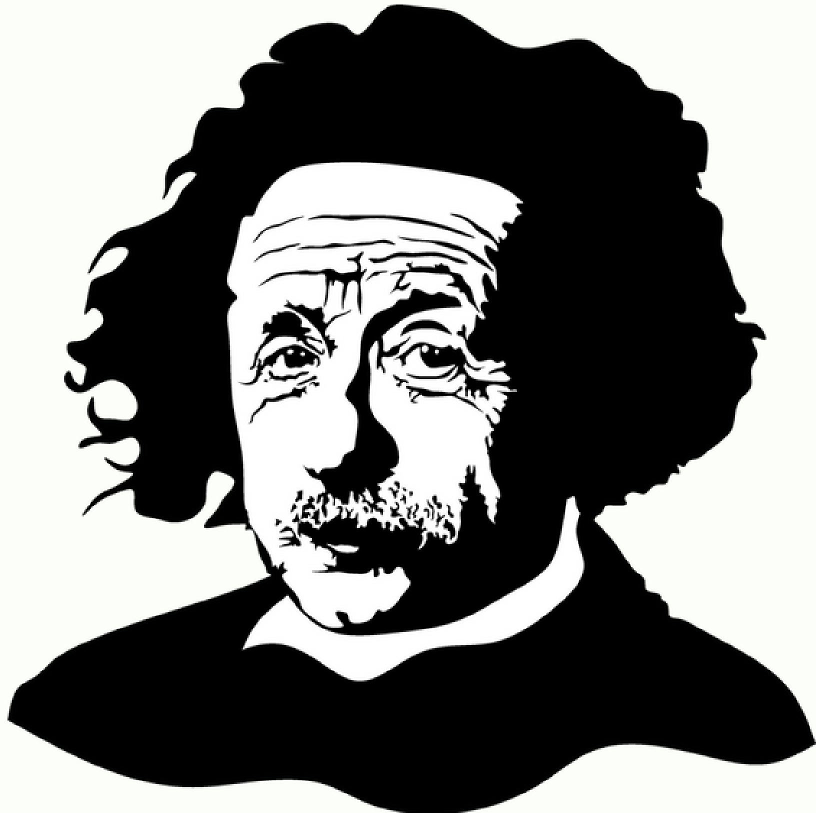
在第一次數學專題研究課程時，老師介紹了以前學長關於披薩定理的作品，由於本身對幾何很感興趣，再加上老師的介紹，我們覺得這份作品的題材相當有意思，所以就決定以此問題進行研究。



披薩定理介紹:

披薩定理介紹 如果以圓盤中任意一個指定點為中心，切下 n 刀，使相鄰兩割線夾角皆相同；然後以逆時針（或順時針）的順序給切出的各塊交替染上兩種顏色， 將圓盤分為兩個部分。那麼有下列結論： 1. 當 n 是大於 2 的偶數，或有任一刀通過圓心時： 兩種顏色的面積和一樣大。 2. 若任意一刀都不通過圓心，則：(1)當 n = 1,2 或 n = 4m-1(m∈) (n=1,2,3,7,11,15,..)時， 包含圓心的部分面積和比較大。 (2)當 n = 4m+1(m∈) (n = 5,9,13,17,..)時， 包含圓心的部分面積和比較小。





研究目的:

1. 過圓內任一點 P 切n(n ≧2,n∈N)刀，使每一組相鄰割線角度皆相同， 點到圓周的所 有切割線段由兩人以逆時針(或順時針)依序取一段，探討切割刀數n與線段長k 次方 和的關係。 2. 將參考資料一中的圓改為外擺線中的心臟線及圓錐曲線的橢圓，而將圓內的任意指定點改為心臟線軌跡的尖點及橢圓內焦點和任一點，並使用GSP動態幾何軟體探討其切 割線段長的關係。

(四)作品名稱:探討正 n 邊形的內接正三角形

得獎獎項: 大會獎三等獎

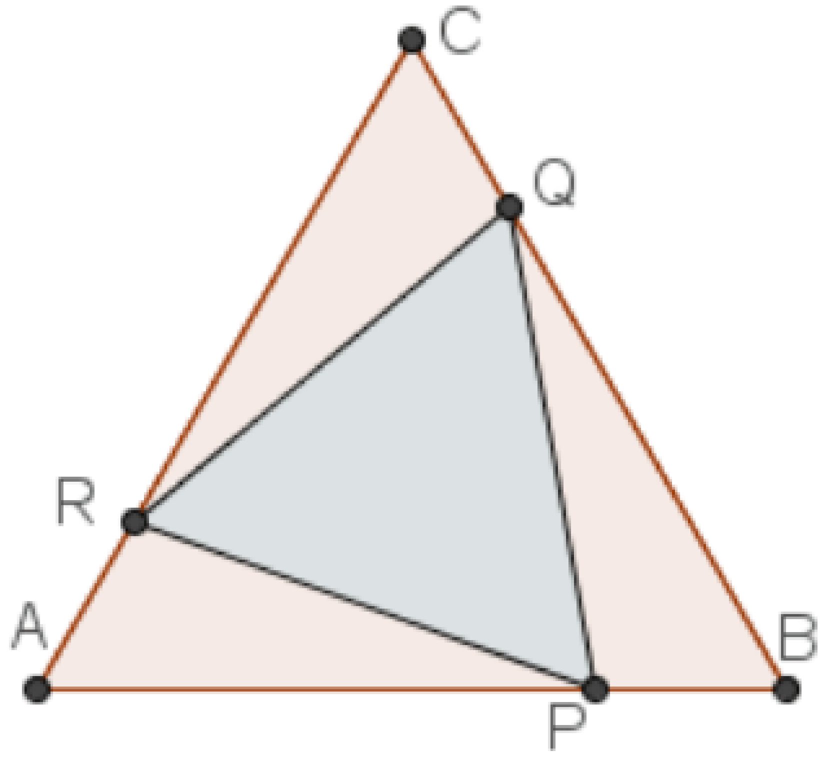
作品分類:正三角形、正 n 邊形、內接正三角形

研究動機:

題目是和同學討論 101 年學測考題時，所得到的靈感，原題目是在正三角形的每一個邊 之兩個三等分點中各選一點連成三角形的問題，選項中說明只能連出兩個正三角形。接著， 我們定義三個頂點分別在正 n 邊形三個不同邊上的正三角形為此正 n 邊形的內接正三角形，進而好奇的想知道正 n 邊形之內接正三角形是否存在?可否作圖?故事就從這裡開始。

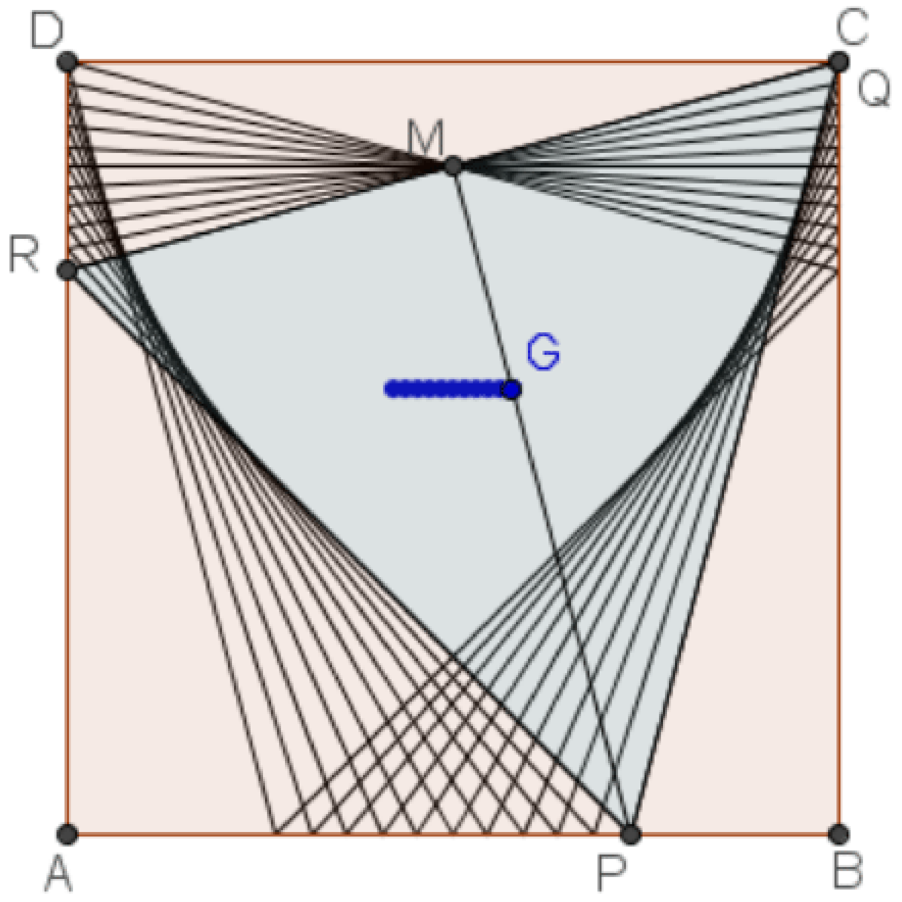
研究目的:

一、每一個正 n 邊形是否皆有無限多個內接正三角形呢? 二、對於在正 n 邊形的邊上的任意一點 P，是否恰能在其邊上找到唯一一組點 Q、R，使得△PQR 為該正 n 邊形的內接正三角形呢? 三、對於在正 n 邊形的邊上的任意一點，找出它的內接正三角形的作圖方式。四、將正 n 邊形的每一個內接正三角形全都畫出後，研究畫出的圖形之特殊性質。



n=3

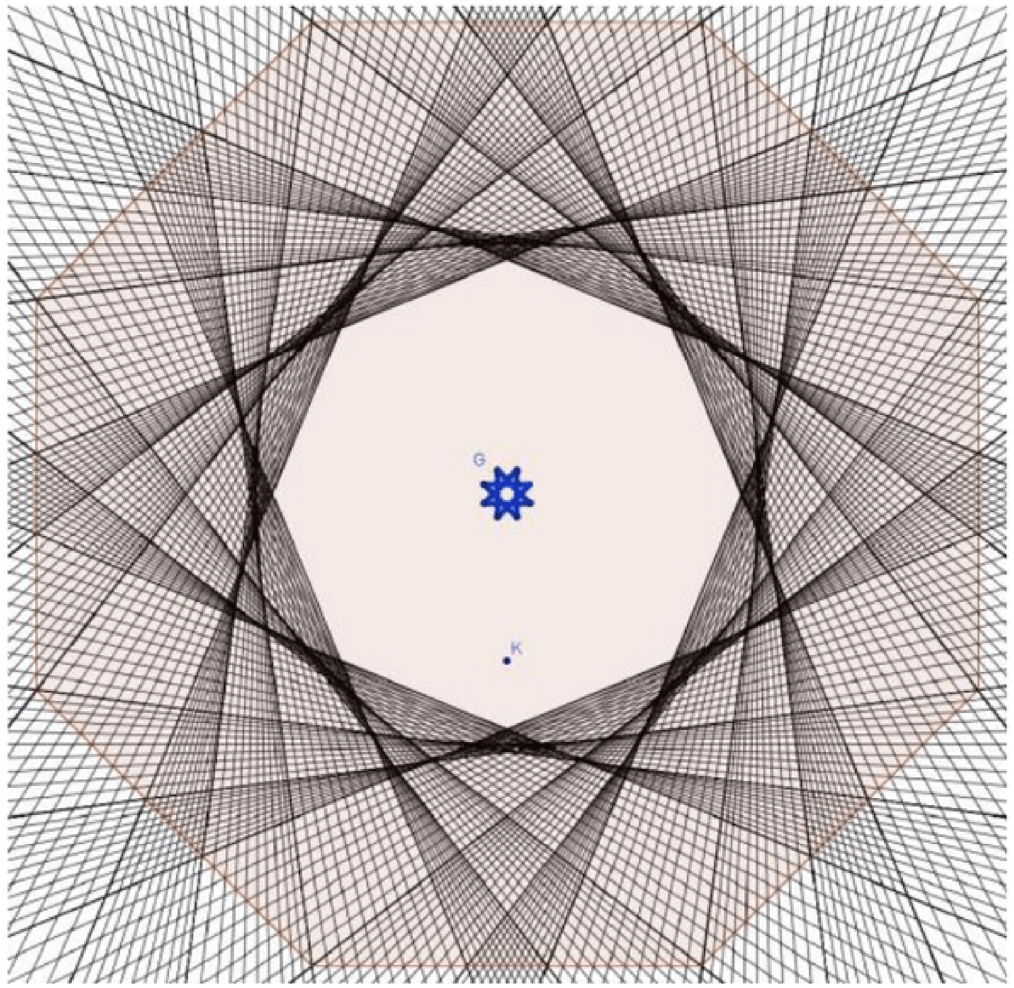
内接可能之一



n=4 内接可能

n=7

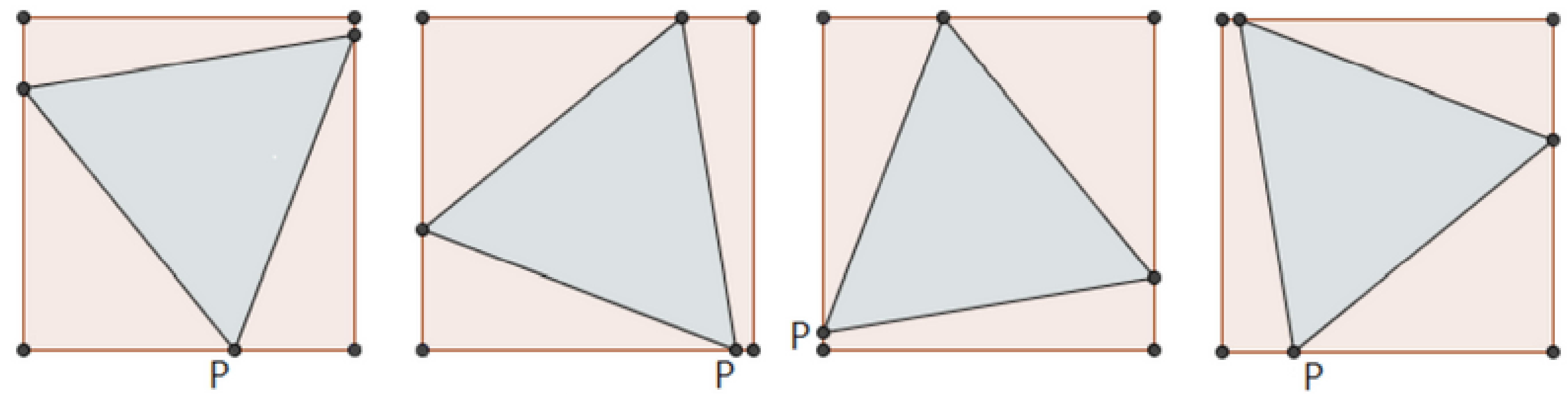
内接所有可能



研究器材

一、唯一性 定理一(唯一性定理)：若在正n邊形的邊上選定一點 P，則在任何正n邊形中，以 P 為其 中一頂點的內接正三角形最多只有一個。

二、標準型 (一) 標準型的構思：正方形的內接正三角形，有下列 4 種



圖(一) 圖(二) 圖(三) 圖(四)

但圖(二)、圖(三)、圖(四)的狀況，只要將紙張旋轉就可以回到圖(一)，故考慮到另 2 頂點所在邊的對稱性，研究圖(一)的情形即可。在此，我們將該模式稱為「 標準型 」。 註：「 P 點的所在邊 」是「 P 點所在的正n邊形的邊 」的簡稱。

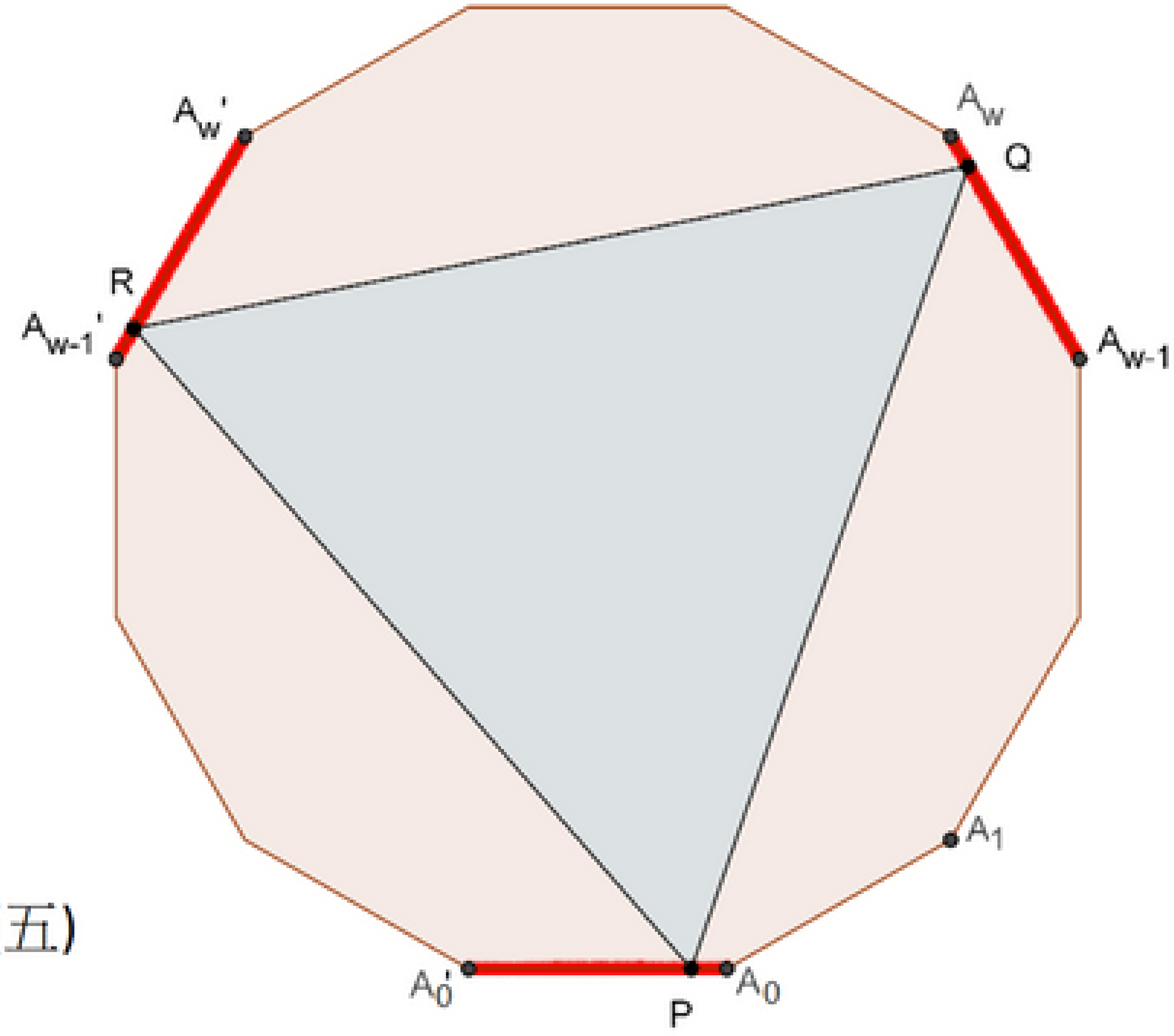
(二) 標準型的定義：令 $\delta(P, Q)$表 P、Q 兩點間所夾的完整邊數，依此類推。 若 $\delta(P, Q) = \delta(P, R)$，則稱 P 點所在的邊為正$n$邊形的「標準型底邊」(簡稱「底邊」)， 並將此模式稱為「以 P 為底的標準型」，而 P 為「標準型底邊上的點」。

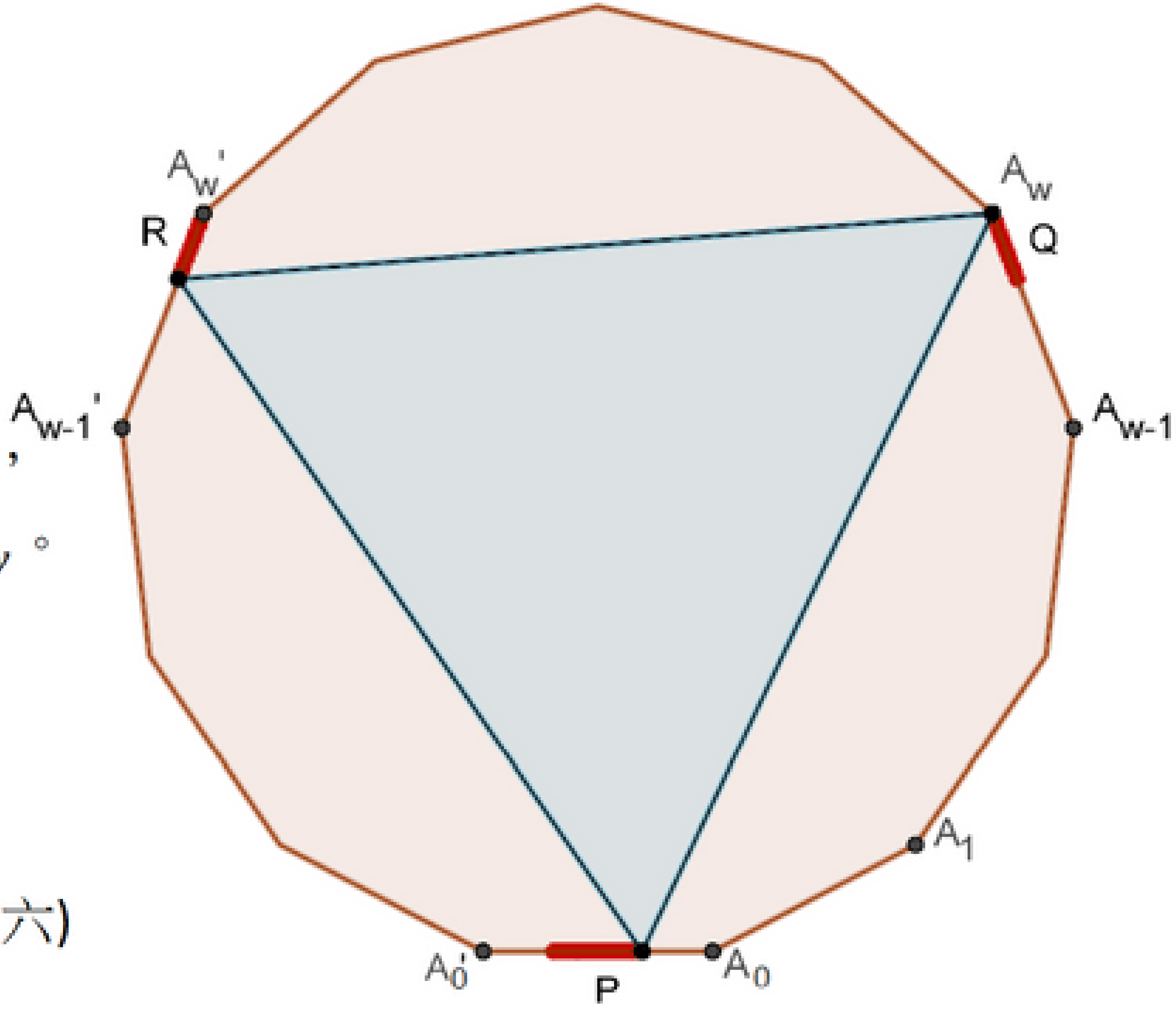
註(1)：為了方便起見，會出現「以 Q 為底的標準型」或「以 R 為底的標準型」，但主 要還是以「以 P 為底的標準型」為主，探討 P 在底邊上移動時，Q、R 的移動狀況。

註(2)：我們定義正n邊形的內接正三角形$\triangle PQR$ 的頂點是依逆時針方向命名。

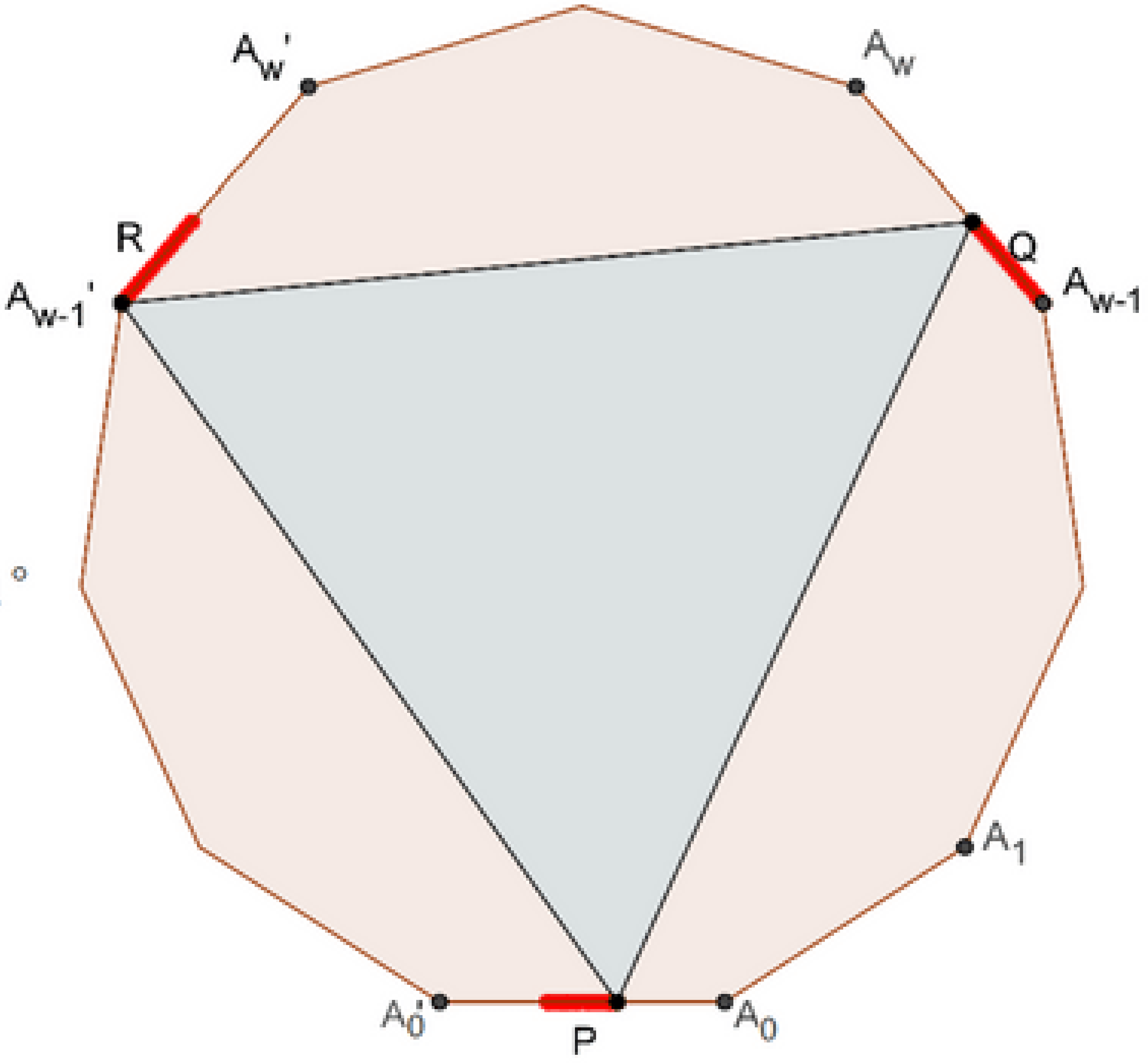
(三) 在此我們必須先假設，正n邊形的內接正三角形存在連續性。也就是邊上任意找一點 P，均能在其邊上找到一組點 Q、R，使得$\triangle PQR$ 是正n邊形的內接正三角形。而當 P 點慢慢向右推移時，Q、R 位置的變化是連續的。

(四) 定理二(標準型範圍定理) 設正n邊形$A_0A_1A_2 \ldots A_i \ldots A_i{}'A_{i-1}{}' \ldots A_2{}'A_1{}'A_0{}'$，$i \in \mathbb{N}$且 ，則在以 P 為底的標準 型中，若 $P \in \overline{A_0{}'A_0}$，則 $Q \in \overline{A_{w-1}A_w}$、$R \in \overline{A_{w-1}{}'A_w{}'}$，其中$w = \lfloor n/3 + 1/2 \rfloor$。

$n \equiv 0 \pmod 3$	P、Q、R 同時抵到正n邊形的頂點。	 圖(五)

$n \equiv 1 \pmod 3$	在以 P 為底的標準型中，Q 或 R 只會抵到A_w或A'_w。  圖(六)

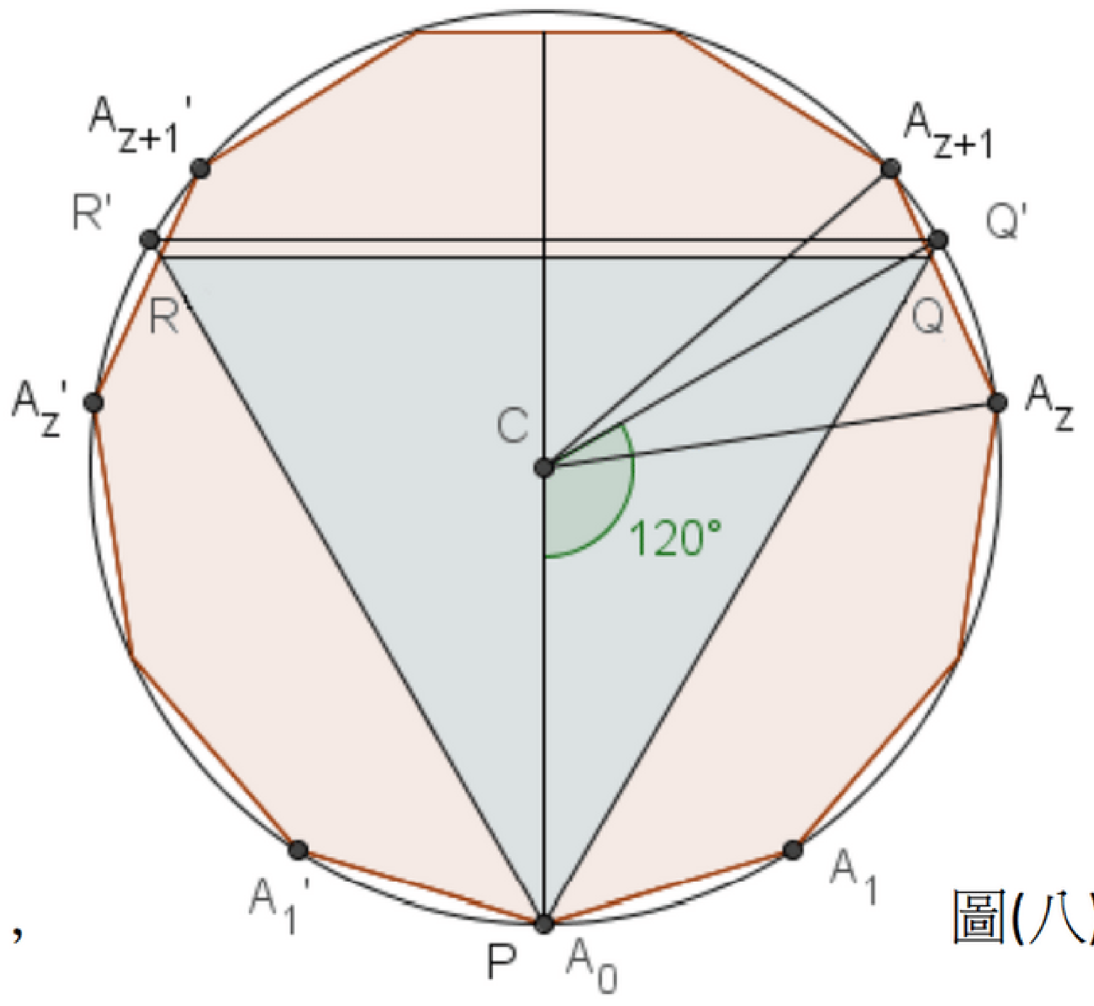
<table>
<tr>
<td>$n \equiv 2 \pmod 3$</td>
<td>
在以 P 為底的標準型中，
Q 或 R 只會抵到A_{w-1}或A'_{w-1}。



圖(七)
</td>
</tr>
</table>

證明:

1. Q、R 先頂到上頂點或下頂點 設A0A1A2 ... A*i* ... A*i* ′A*i*−1′ ... A2′A1′是一個正*n*邊形，其中*i* ∈ ℕ 且 *i* ≤ *n*/ 2 ， 正*n*邊形的中心點為 C，而 △ PQR 是它的內接正三角形。當 P 與 A0重合時，假設 Q ∈ AzAz+1 ̅但 Q ≠ Az+1、R ∈ Az ′Az+1′ ̅但 R ≠ Az+1′，連PQ射線及PR射線分別交該正*n*邊形的外接圓圓 C 於Q ′、R ′，則△ PQ′R ′是一個以C為中 心的正三角形，如圖(八)。



圖(八)

1 ,

而 $\because Q \in \overline{A_zA_{z+1}}$ 且 $Q \neq A_{z+1}$，

$\therefore Q' \in \widehat{A_zA_{z+1}}$ 且 $Q' \neq A_{z+1}$，

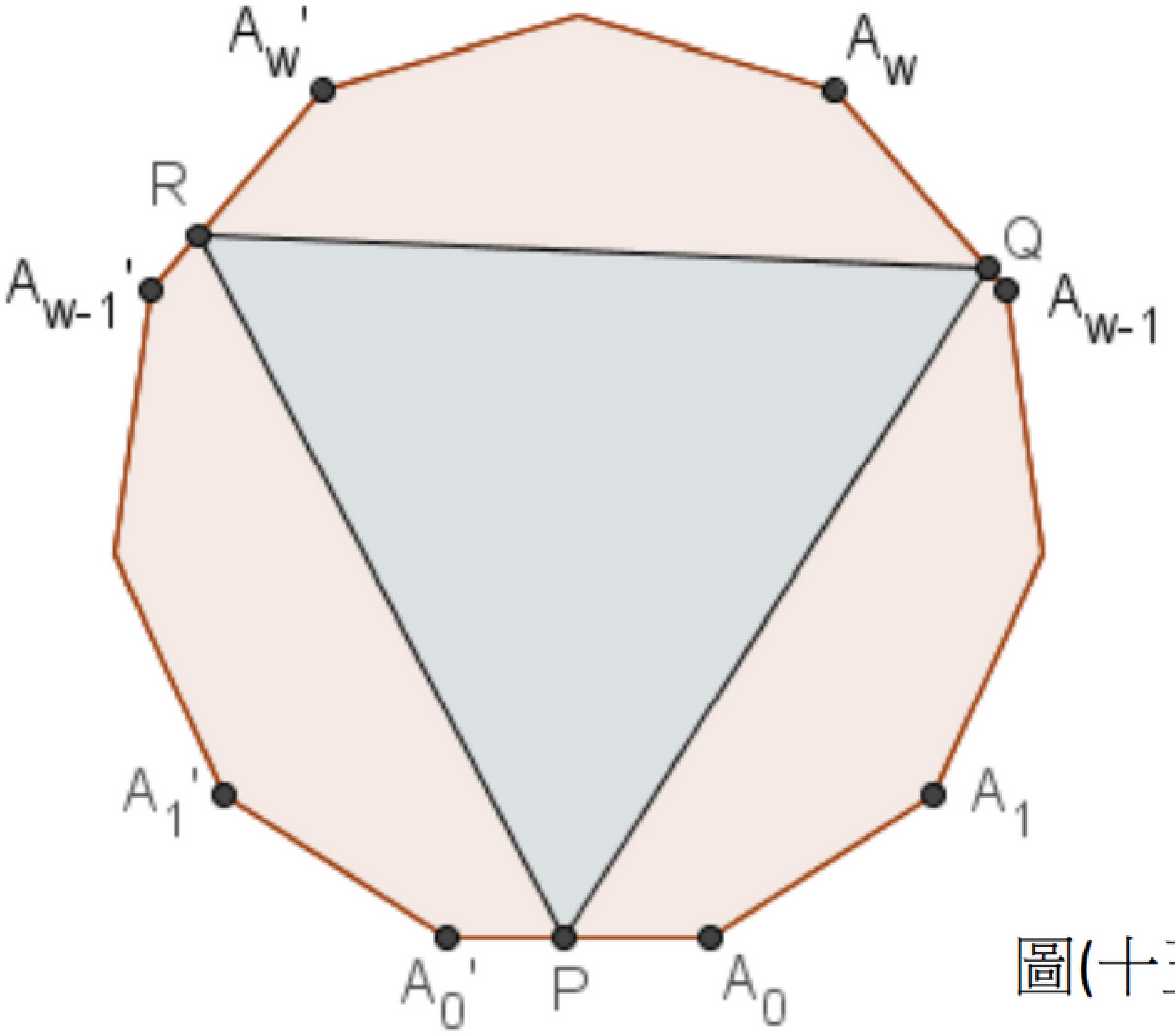
故 $\angle PCA_z \leq \angle PCQ' < \angle PCA_{z+1}$， $\Rightarrow z \cdot 2\pi/n \leq 2/3\,\pi < (z+1)2\pi/n \Rightarrow n/3 - 1 < z \leq n/3$，即 $z = \lfloor n/3 \rfloor$。

也就是 $\{ n \equiv 0 \pmod 3$ 時：$z = n/3$ 且 Q 與 A_z 重合、R 與 A_z' 重合; $n \equiv 1 \pmod 3$ 時：$z = (n-1)/3$; $n \equiv 2 \pmod 3$ 時：$z = (n-2)/3$,

故 $\delta(A_z, A_z') = n - 2z = \{ n/3$，當 $n \equiv 0 \pmod 3$; $(n+2)/3$; 當 $n \equiv 1 \pmod 3$; $(n+4)/3$，當 $n \equiv 2 \pmod 3)$

證明

2. Q、R 兩點分別位於第幾個邊上：將正n邊形重新命名為$A_0A_1A_2\ldots A_i\ldots A_i'A_{i-1}'\ldots A_2'A_1'A_0'$, $i\in\mathbb{N}$ 且 $i<n/2$，並把標準型底邊$\overline{A_0'A_0}$上的內接正三角形頂點重新命名為 P，其餘兩點為 Q、R



圖(十五)

我們定義兩個邊的位置差為「兩邊所夾的邊數+1」，例如：$\overline{A_0'A_0}$與$\overline{A_0A_1}$的位置差為1，$\overline{A_0'A_0}$與$\overline{A_{i-1}A_i}$的位置差為 i，而兩點的位置差為其分別位於的邊的位置差。設 $Q\in\overline{A_{w-1}A_w}$、$R\in\overline{A_{w-1}'A_w'}$，即 P、Q 的位置差 = P、R 的位置差 = w。

因此得到:

當w為以下三種時

1.，當$n \equiv 0 \pmod 3$,w=n/3

2.當$n \equiv 1 \pmod 3$,w=(n-1)/3

3.當$n \equiv 2 \pmod 3$,w=(n+1)/3

即w=$\lfloor n/3 + 1/2 \rfloor$, 在由此應用至正n多邊形上

(五)作品名稱:當 Frieze 遇上 Fibonacci(斐波那契)

得獎獎項 :大會獎三等獎

作品分類:轉換、MinMax、不變量

研究動機:

自然界可以很容易的看到 Frieze Patterns，如花豹花紋、欄杆花紋、音樂符號。 已知 Frieze patterns 有 7 種形式，本研究屬於其中一種，。Coxeter 對於 Frieze patterns，提出證明，。國內的科學展覽研究則在 2012 年 8 月 2 日台灣科學教育館辦理 的教師研習被提出來，如圖 (4)，。 筆者在 2014 年 7 月向全國科學展覽提出<數字夾心餅>作品，。本篇則繼續延續探討 Frieze 圖案，嘗試以中學教材證明 Frieze 圖案的性質。同時，將費氏數列交錯的填入生成 數列後，研究圖案的長相與性質，並探討 Frieze 圖案中若干個不變量。

圖 1、花豹花紋

圖 2、欄杆花紋

圖 3、音樂符號

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 3 2 1 5 1 2 3 1 3 2 1 5
2 5 1 4 4 1 5 2 2 5 1 4
3 2 3 3 3 2 3 3 3 2 3
1 5 2 2 5 1 4 4 1 5
2 3 1 3 2 1 5 1 2
1 1 1 1 1 1 1 1

圖 4

研究目的:

如題目 1.1，圖 4，本研究則是討論 Frieze Patterns 的一種數學形式。筆者嘗試：

(一)不引用 Coxeter 對於 Frieze patterns 的証明。 由圖 4 的數字關係找到通則，發展轉換，證明給定 n 層結構的周期。並藉由 MinMax 方法， 找出給定 n 層結構，最大數值的代表數列。同時，將費氏數列交錯的填入代表數列，研 究其數學結構的。最後，提出給定 n 層結構，任意連續 n +1 行，扣除上下兩列之後，數 值是 1 的數量與數值是 2 的數量相同。

(二)引用 Coxeter 對於 Frieze patterns 的証明。 探討給定 n 層結構第 2 列任意連續 n +1 個整數和的不變量。並藉以探討 Frieze patterns 的結構退化。

(六)作品名稱:從 Avoid 數列到類巴斯卡三角形

得獎獎項:大會獎三等獎

作品分類:巴斯卡三角形、數列

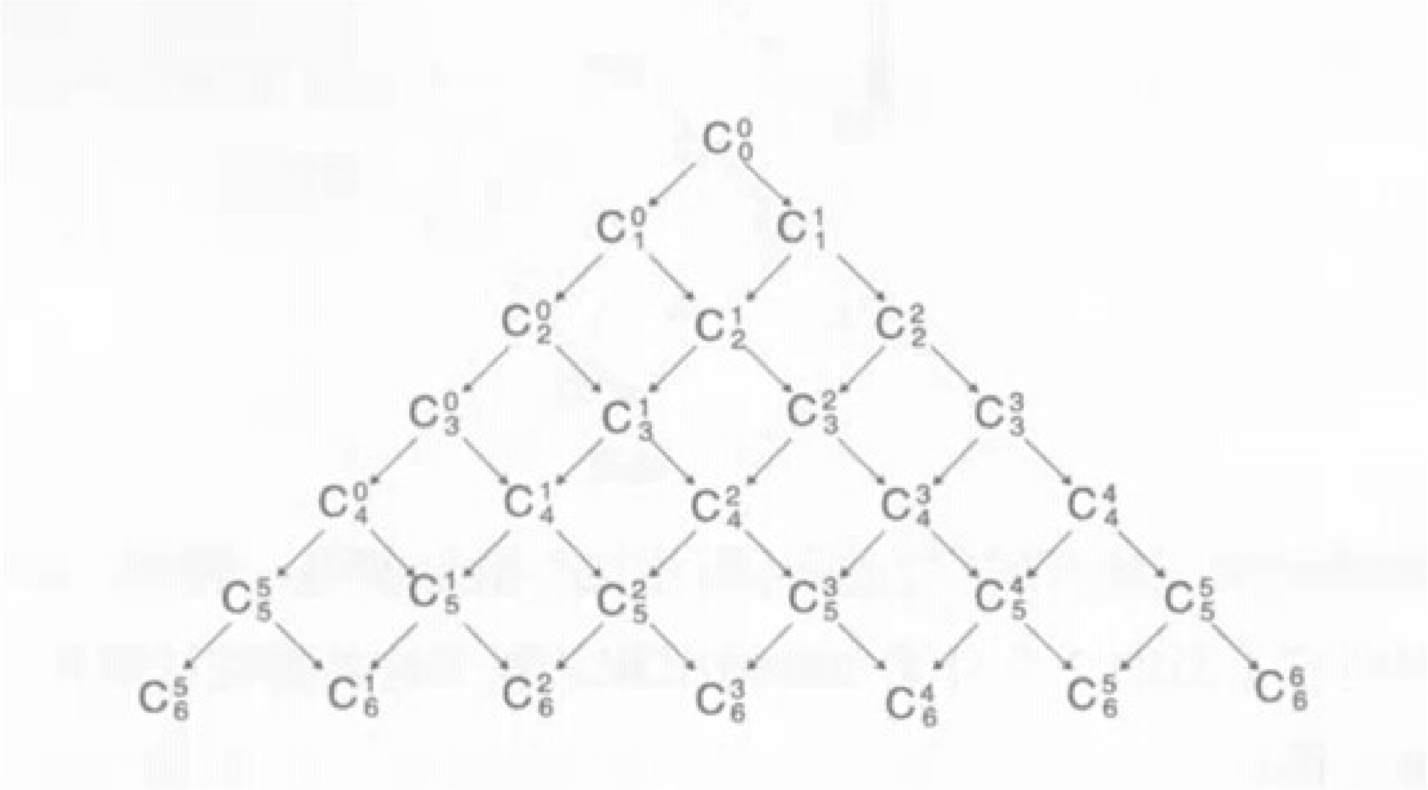
研究動機:

為了推廣文獻沒有完成的問題，到避免 x1 x1 … x1(連續m個x1) 、避免 x2 … x2 (連續m個x2) 、…、避免 xj … xj(連續m個xj) 之排列方法數，以及在以上條件中之三角形的各種 特性。

研究目的:

一、找出 t 個不同物{x1,x2,x3....xt} (可重複選取)選取 n 個並做排列，避免 x1 ... x1連續(m個x1) 、 避免x2 ...x2 連續 (m個x2) 、...、避免xj ... xj 連續 (m個xj)之計算方法。

二、由避免x1 ...x1 連續 (m個x 1)、避免x2 ... x2 連續 (m個x2) 、...、避免xj ... xj 連續 (m個xj) 探討類似巴斯卡三角形之特殊情況。



巴斯卡三角形圖形

(七)作品名稱:N 邊形與多面體的頂點與一定點連線所生 有向線段比值之和的定性性質

得獎獎項:大會獎四等獎

作品分類:N 邊形、多面體、向量的除法

研究動機:

在一個課餘的機會裡，老師教我們使用數學繪圖軟體 Geogebra 繪製一些平面上的幾何圖形，透過實驗與觀察重新驗證一些平面幾何上的結果，我們做了許多數學實驗，發現這套軟體除了容易操作外，重要的是操作起來讓我們覺得很有趣，因為它可以快速實驗考慮多種變化的情形。在這個軟體操作的學習裡，我們除了重新品嚐了一些學過的平面幾何結論外，更對參考資料中的一個三角形幾何定性性質產生興趣，問題的描述詳見『引理一』。

我們除了用軟體檢驗了一下這個幾何定性性質，也給出其嚴謹的證明（詳見引理一），接著我們就想說有沒有機會將它推廣到任意多邊形的情形，我們用了軟體先行檢驗一番，發現任意的凸四邊形內只有一些 P 點會保持這個性質成立，所以我們退而求其次，先考慮正多邊形的情形，從正方形、正五邊形、正六邊形、正七邊形與正八邊形，一直到一般化的正 2n (n ≧ 2) 邊形與正 2n-1(n ≧ 2)邊形，一步一腳印,邊數由小至大，探索過程之中，除了軟體作圖、紙筆計算外，並給予嚴謹的證明，慢慢地我們發現其中的奧妙與規則，最後，我們發現正多邊形內的任一點 P 都可以維持這樣的定性性質，只是數個比值相加後之定值不再是 1，而是會隨著邊數的不同而有所改變，幸運的是我們可以給出這個定值的一般化公式。

完成『引理一』在平面上正多邊形中的推論後，我們試想著『引理一』中的點 P 是否可 以將之移至三角形的外部，進而在正多邊形中的推論是否也可以將點 P 移至正多邊形的外部， 我們做了一些嘗試後，發現直接將 P 點移至三角形與正多邊形的外部時，原來的『線段比值 和』不再是定值，但是如果我們同時將『線段比值和』換成相對應的『有向線段比值和』時， 則這些『有向線段比值和』會成相同的定值，這樣我們便更完整的看到『引理一』在三角形 與正多邊形的推論。

完成了『引理一』在平面上三角形與正多邊形中的推論後，我們更進一步去思考在空間 中延伸的可能性，經過一些努力，輔以繪圖軟體 Cabri3D，我們成功地驗證得『引理一』在『任意四面體』與『正多面體』中也有類似的推論，依舊可得『數個有向線段比值和為定值』。

研究目的:

一、將『引理一』中三角形內的一點 P 移至三角形外，觀察驗證對應的定性性質。

二、『引理一』在正方形中的推論。

三、『引理一』在正五邊形中的推論。

四、『引理一』在正六邊形中的推論。

五、『引理一』在正八邊形中的推論。

六、『引理一』在正 $2n\ (n \geqq 2)$邊形中的推論

七、『引理一』在正 $2n-1\ (n \geqq 2)$邊形中的推論。

八、『引理一』在四面體中的推論。

九、『引理一』在正六面體中的推論。

十、『引理一』在正八面體中的推論。

十一、『引理一』在正十二面體中的推論。

十二、『引理一』在正二十面體中的推論。

(八)作品名稱:多個三角形的重心連線性質探討

得獎獎項:大會獎四等獎

作品分類:重心、重複疊作、質心

研究動機:

有次在查找資料時，我們看到第五十二屆全國科展「心心相印」這件作品，發現他們分別 將三角形各頂點與特定 P 點連接成三個三角形，這三個三角形再分別作外、重、垂心並連接， 發現了一些奇妙的性質。在這件作品中，P 點只限於三角形的內、外、重、垂心，對於重心的 相似性質沒有充分證明。這些不足之處引發我們決定把這個幾何題研究得更加完善。

研究目的:

一、給定 P 點重心 n 邊形，用尺規作圖反推其原 n 邊形，探討其存在性及唯一性。

二、重複疊作 P 點重心 n 邊形。

三、探討 P 點質心多面體的性質及原多面體與 P 點質心多面體的關係。

四、給定 P 點質心四面體，反推其原四面體，探討其存在性及唯一性。

五、重複疊作 P 點質心四面體。

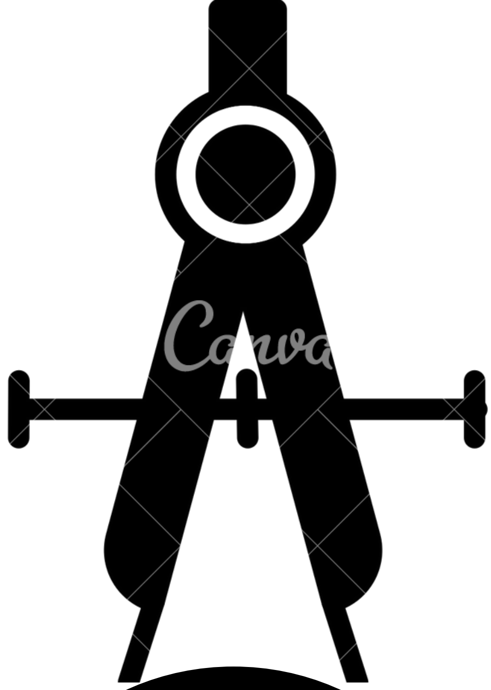
(九)作品名稱:「 心心 」照我「 心 」– 從 Pascal’s theorem、Brianchon’s theorem 到雙心多邊形的共點 共線性質探討

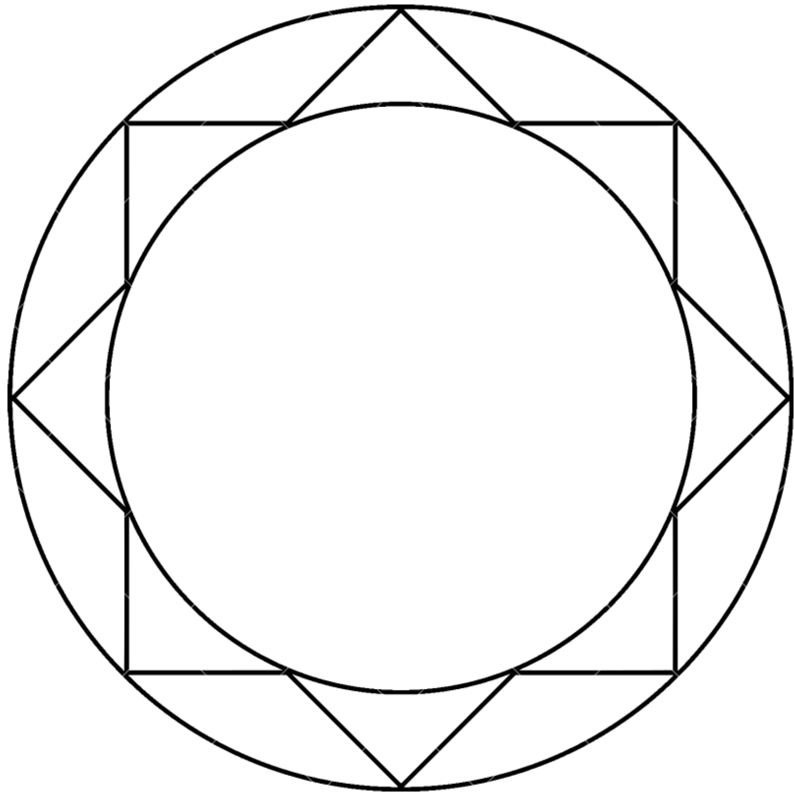
得獎獎項:大會獎四等獎

作品分類:Brianchon's theorem、Pascal's theorem、 射影幾何

研究動機:

在幾何明珠這本書中，寫到一個關於射影幾何的 Brianchon 定理：『 連接圓外切六邊形 ABCDEF 的相對頂點的三條對角線共點 』我們好奇的用 GSP 實驗，以各種不同的方式連接頂點或切點，赫然發現不只有三條對角線會 共點，像是一條對角線與其相鄰的兩邊上之對邊切點連線也會三線共點。書中又提到 Pascal 定理和 Brianchon 定理的對偶關係，故嘗試將兩定理放在一起討論，試圖研究雙心多邊形共點 共線的特殊關係。





研究目的:

（一）探討圓外切六邊形三組對角線及三組對邊切點連線之間可能的共點情形；並探討圓外 切五邊形、四邊形和三角形等退化情形。

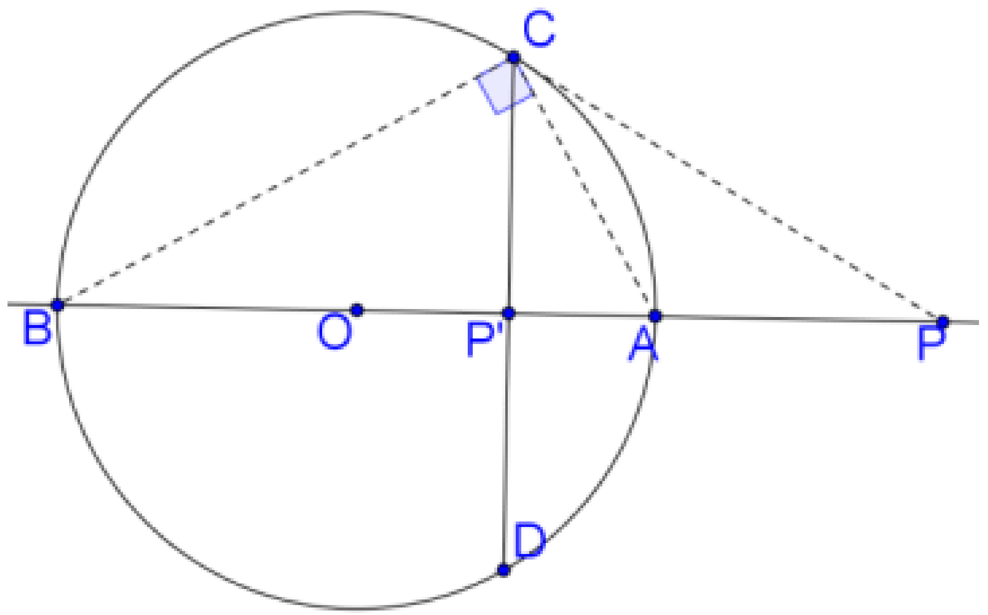
（二）探討圓內接六邊形三組對邊延長線交點及頂點切線交點之間可能的共線情形；並探討 圓內接五邊形、四邊形和三角形等退化情形。

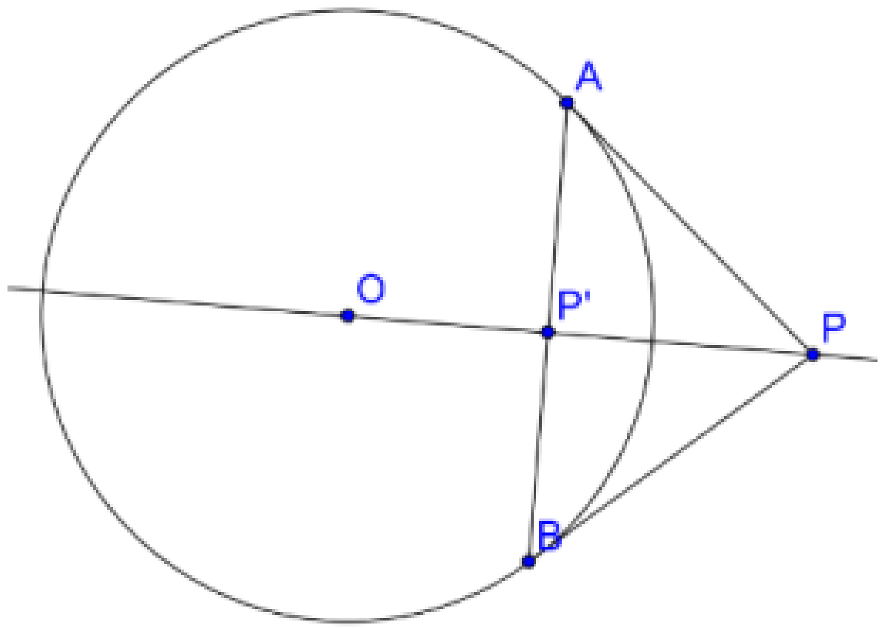
（三）探討圓外切六邊形連接切點形成內接六邊形(或相反)可能的共點共線關係；並探討五 邊形、四邊形、三角形等退化情形。

（四）探討雙心六邊形可能的共點共線關係；並探討其外延或內朔圖形共點共線的關係。

（五）探討雙心五邊形、四邊形、三角形等退化情形的共點共線關係。

（六）根據上述問題，探討其在圓錐曲線上的共點共線關係。

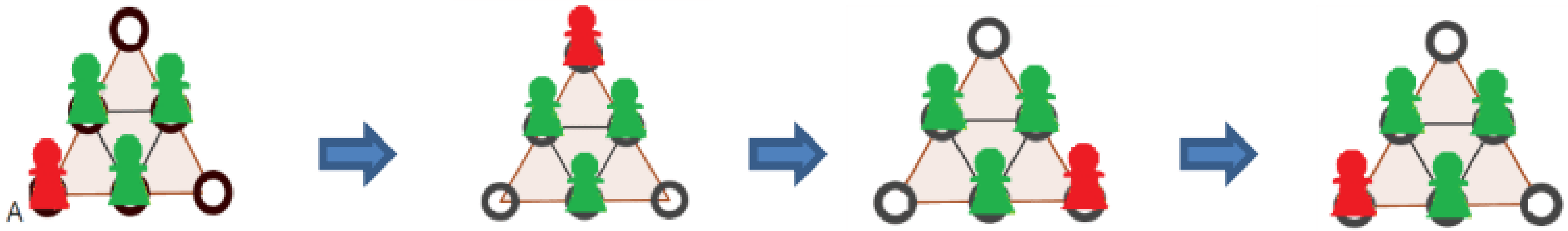




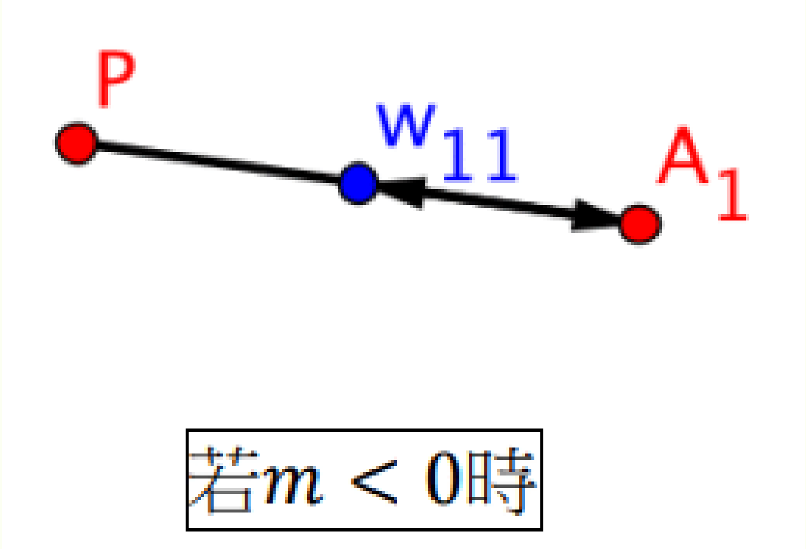

(十)作品名稱:亂中有序
得獎獎項:大會獎四等獎
作品分類:Nice 點

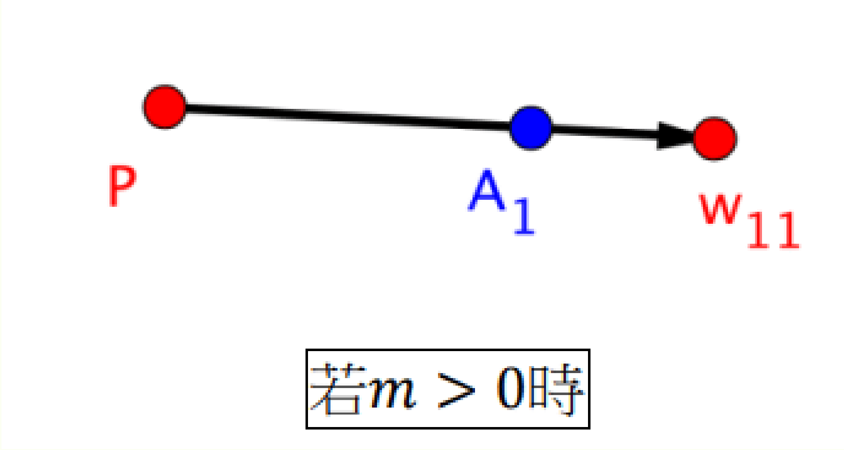
研究動機:

小時候玩跳棋的時候發現，如果將跳棋從A點跳 3 步就可以回到原來的位置， 那麼如果我們將三點的位置改變，依序對三點做跳動，是否也可跳回原來A點 的位置呢？如果將三點改為四點呢？是否也有相同的結果，因此引發我們一連 串的探究。



名詞定義





*Nice*點：設有任一給定n個點，若由w1點對n個點作n次m: 1的跳動後恰可 回到w1點時，我們稱w1點為*Nice*點。

#

研究目的:

一、探討平面上n個點，由初始點依序對n個點作1: 1跳動，其跳動點的軌跡。

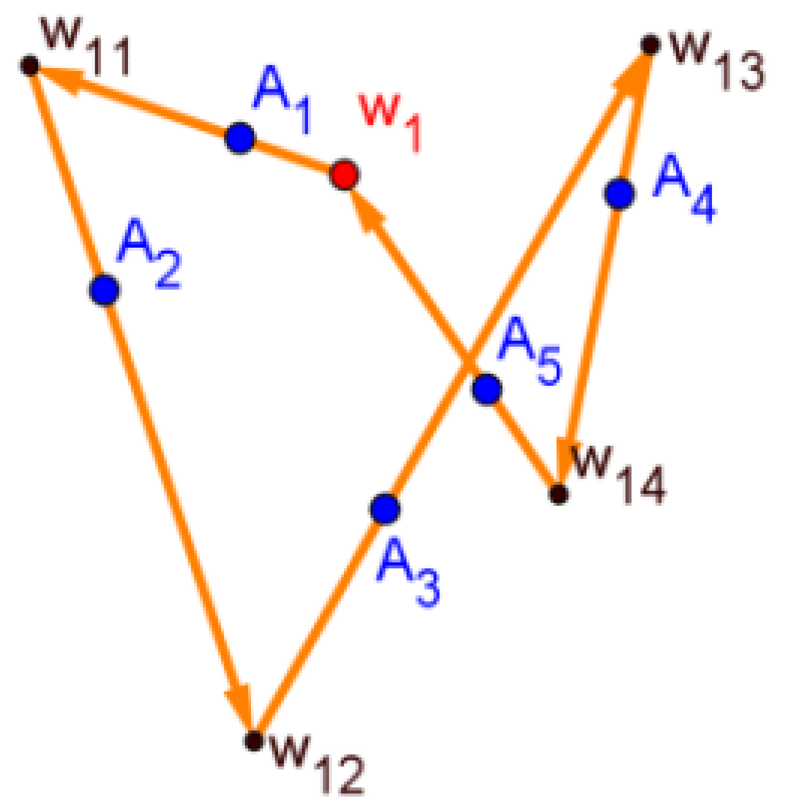
二、探討平面上n個點，由初始點依序對n個點作1: 1跳動，其$Nice$點的存在性， 並找出其作圖方法。

三、將 1: 1的比例改為m: 1 ，探討其歛散性。

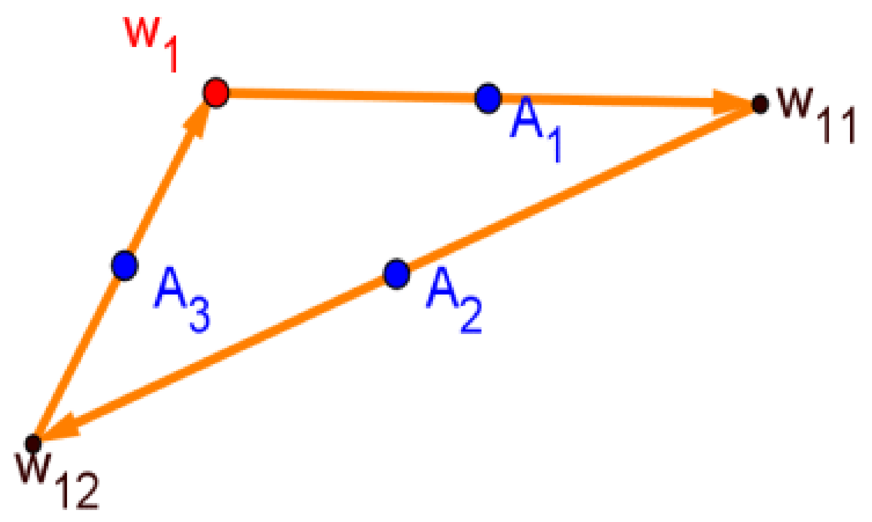
四、將1: 1的比例改為m: 1 ，探討$Nice$點的存在性及作圖方法。

五、探討$Nice$點的軌跡圖形。

六、將平面推廣到R n空間



$n = 5$，$m = \frac{1}{2}$



$n = 3$，$m = 1$

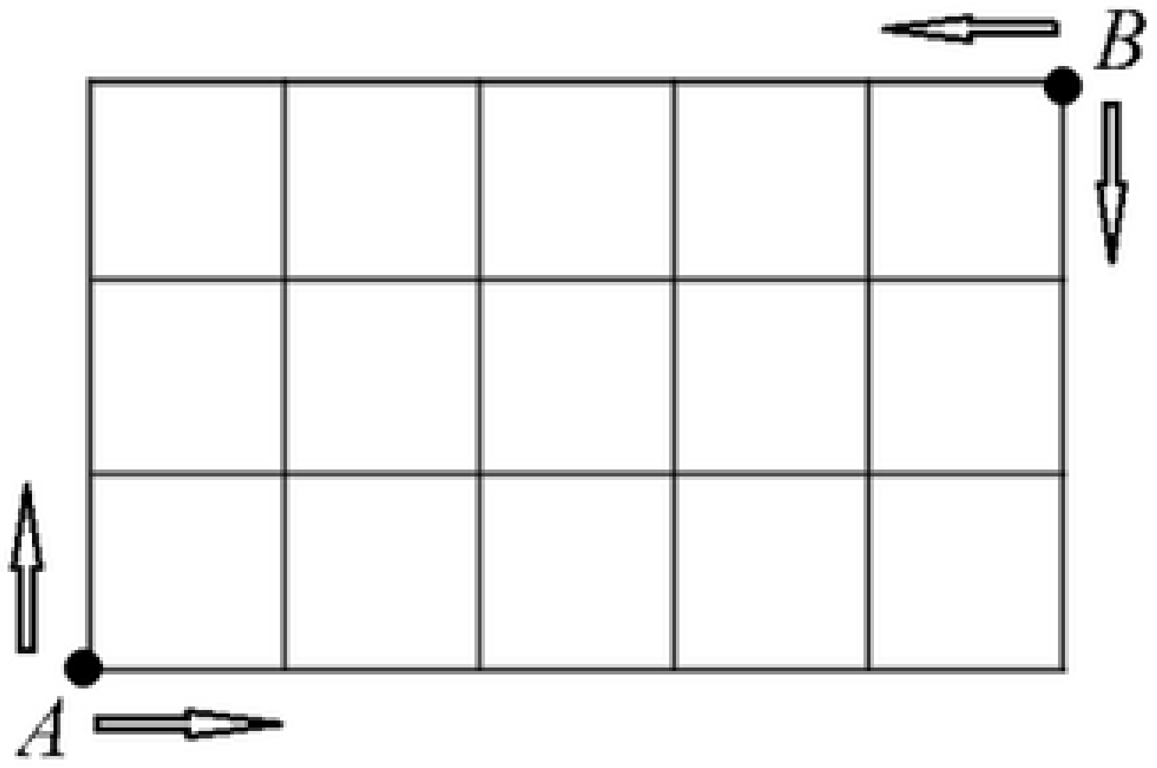
(十一)作品名稱:轉角遇到愛 – 街道方格中不期而遇的機率

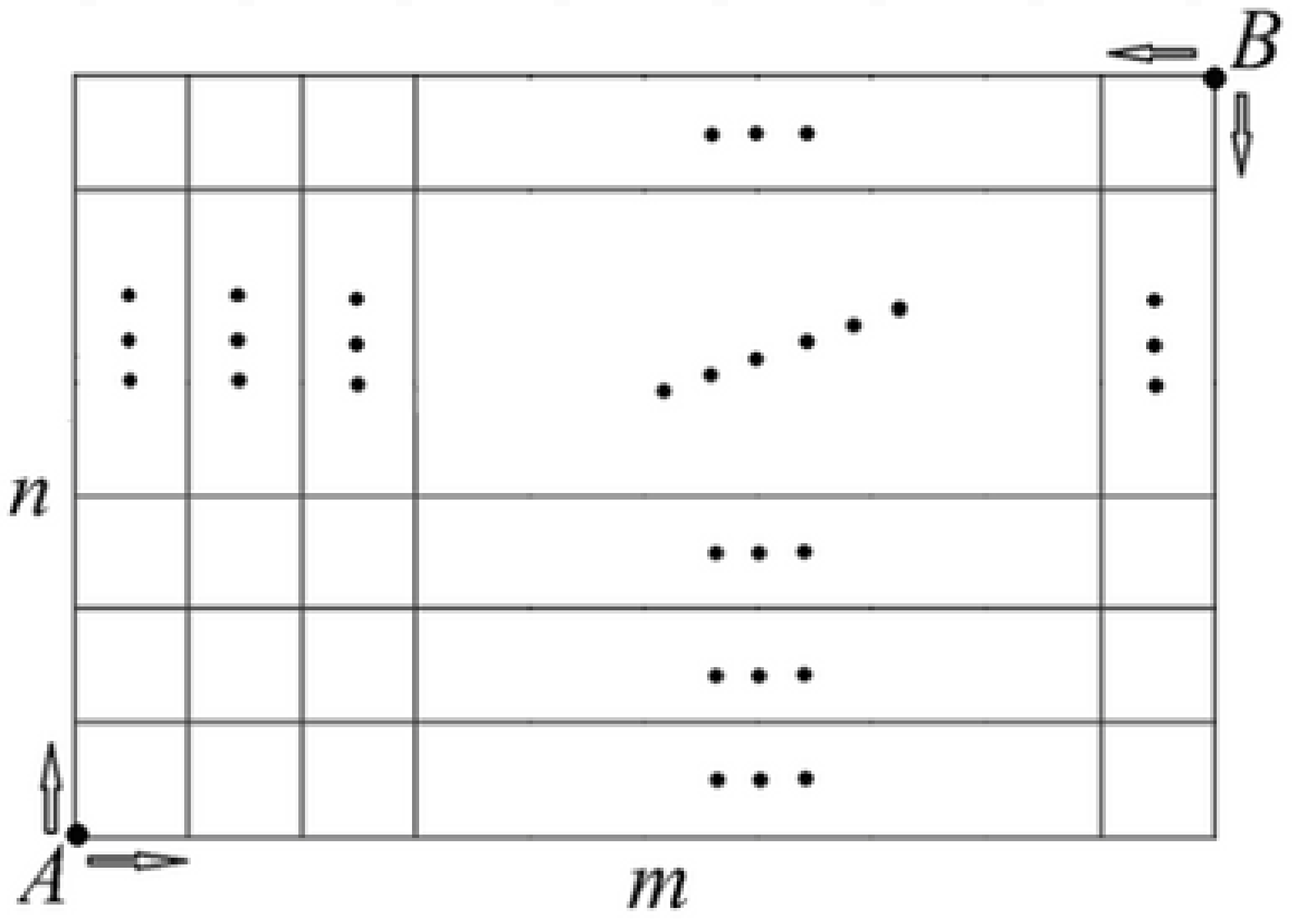
得獎獎項:大會獎四等獎

作品分類:方格圖形、機率、二項分布

研究動機:

在高中數學第二冊第三章機率的教材中，曾碰到這樣的題目：「有一個5 × 3的街道方格如 下圖左，每一小格皆為正方形，甲欲從 A點走到 B 點，乙欲從 B 點走到 A點，兩人同時出發， 以相同速率沿方格線『走捷徑』前進。假設在每一分岔路口時，選擇前進方向之機率均等， 求兩人相遇的機率為何？」我們想要由此推廣，探討 在m × n 的街道方格中(如下圖右)，甲、乙兩人 的相遇機率為何？



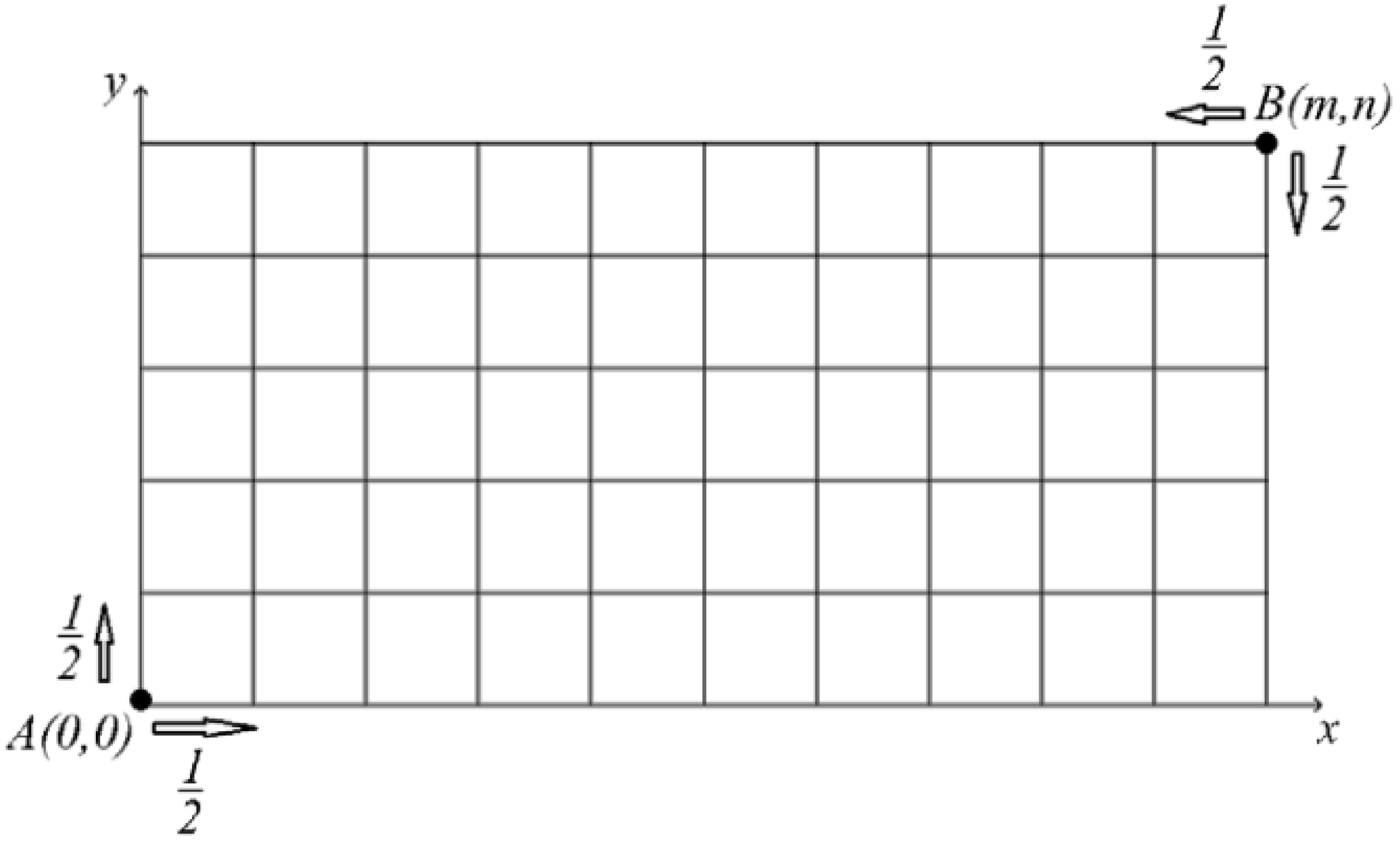


研究目的:

一、 探求在m× n街道方格中，甲、乙兩人相遇的機率。

二、 改變在分岔路口時選擇前進方向的機率，探求兩人相遇的機率。

三、 相遇機率的性質探討。




報告結束!
感謝觀賞