數學思維與解題－作業2(2016)
第五組

組員:
410731207 趙鴻儒
410731210 張曜巖
410731214 魏玄宇
410731215 陳宥穎
410731241 陳威安

大會獎-四等獎

攜手共解圓-扭結理論之探討

研究動機

在團體活動中，隊輔們喜歡帶破冰遊戲，因為可以帶動氣氛製造歡樂，而我們曾經玩過以下遊戲：數個人圍成一圈，每個人兩手牽住兩個不同人的手，而且不可以牽與自己相鄰的人手。牽完後大家使出渾身解數，在兩手相連不分開的情況下，重新變回一個大圓。這個遊戲引發了我們的興趣，因為有時可以成功，有時候卻像打了死結一樣解不開，甚至有時解出的不是一個圓，而是數個圓。於是我們開始思考並研究此問題。

研究目的

一、探討在牽手遊戲的各種牽手情況下，能否直接看出該情況是否可解。

二、找出較特別且有規律的圖形的簡化方式，並發展特殊牽手遊戲的解法。

三、找出可化簡結的方法，並證明其結的不變量是正確且這些方法是夠用的。

四、尋找將結簡化的方法及步驟，並證明得到的方法可以通用在所有結。

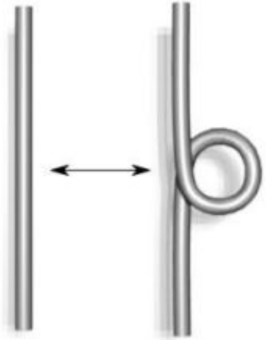
主要名詞定義與解釋(方便閱讀及講解下文)

(一) 至少要三個以上交錯點才可能形成一個結(交錯點:繩子交錯的地方)。只要此結未達到三個交錯點, 就不可能成結。
(二) 扭結理論(knot theory)──這個理論所涵蓋的範圍非常廣, 較重要的討論是:如果一結符合扭結, 則無法解回一個大圓, 若不符合扭結, 則可以解回一個大圓。扭結都是一封閉曲線, 而「鏈」(link)則是兩個以上的封閉曲線且無法解成一個大圓。

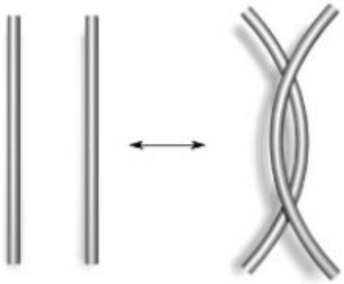
綜合以上兩點, 可提出初步的假設:牽手的方式可決定此次牽手是否能順利解開, 若能解開代表此封閉曲線並不是扭結, 稱為「不成結」;若不能解開代表此封閉曲線符合扭結, 稱為「成結」。

主要名詞定義與解釋(方便閱讀及講解下文)

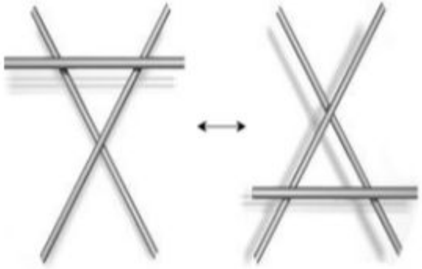
(三)萊德邁斯特變換(Reidemeister moves)：在 1926 年，庫特·萊德邁斯特為了要分辨結的種類，將結畫成投影圖，在投影圖中可看出繩子互相交錯的牽手順序(本研究的圖形即是以投影圖表示)，發現兩投影圖的結若是相等的(也就是可以從一個變換到另一個)，則可以用三種最基本的方式來達到兩個圖形的變換，稱為萊德邁斯特變換，為下列三種方式：



將一個圈扭開或扭入一個圈(研究內容中簡稱 R_1)



將一條線完全與另一條分開或將兩條線疊在一起(研究內容中簡稱 R_2)



三條線互相交叉，將其中一條從其他兩條所產生的交錯點一邊移動到另一邊(研究內容中簡稱 R_3)

主要名詞定義與解釋(方便閱讀及講解下文)

(四) 道克符號(Dowker notation):原先是使用在電腦判斷結，使用道克符號的標記方式可以讓電腦了解一個結並畫出，但有一個問題:同樣的道克符號可能化出兩種結;同樣的結也可能寫出不一樣的道克符號。

(五) 結的不變量:兩個投影圖，是否能透過初等變換萊德邁斯特變換從一個變到另一個。如果可以，就稱為等價;如果不可以，就稱為不等價。要說明兩投影圖是否等價，必須以邏輯推理為基礎，結的不變量即為判斷依據。

主要名詞定義與解釋(方便閱讀及講解下文)

(六) 結的分類:近百年來數學家熱烈研究的問題, 現在已經有電腦程式能夠依照步 驟基本的簡化一個結, 其中多是利用結的多項式來進行。

(七) 結的多項式: 一種以多項式形式表示結的不變量, 而多項式的係數則代表結的性質。

規則定義與研究在不同的最少人數中所結成的結

牽手遊戲有非常多種玩法，實際詢問老師、同學並參考網路資料後，訂定了兩條規則：

規則一：兩手牽著不同人。

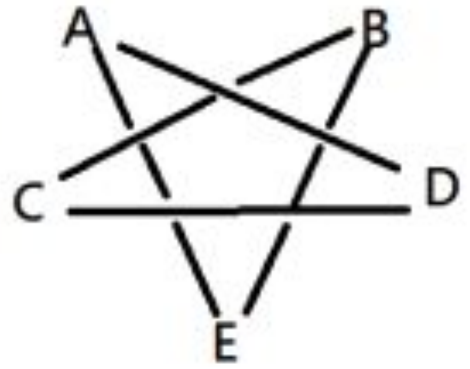
規則二：不可以牽旁邊(相鄰)的人。

五人以上牽手情況

五人以上牽手情況

由於四人以下的牽手情況中，皆無法同時遵守規則一與規則二，因此以下將從五人以上的牽手情況開始討論。

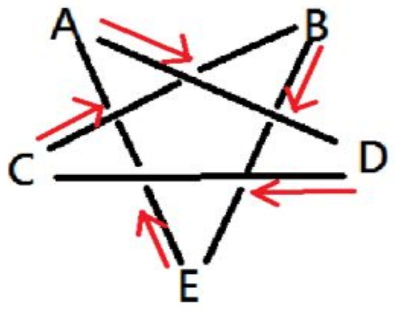
1. 可能的牽手圖形 將所有符合規則的圖形畫出後發現，在五人的牽手情況中，只有一種圖形同時符合規則一與規則二並超過 3 個交錯點



五人以上牽手情況

牽手順序

先假設這條線是有方向性的，從 A 開始、A 結束，中間每次經過的交錯點，都觀察其上下情形，若在上則記為 1，若在下則記為 0。
如圖，線依序經過 ADCBEA，沿著AD 走，遇到了兩個交錯點，都是從交錯點的上方經過，記作「11」，接著沿著DC 走，經過了兩個交錯點，都是從上方經過，記作「11」，按照這樣的規則，一直走回到 A，將所有的上下情形列出可記為「1111100000」，這就是此圖形的「牽手順序」。



五人以上牽手情況

簡化方式

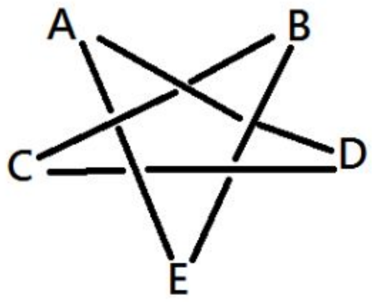
由下頁圖可看出，當 B 的兩手伸出，兩隻手都在AD 下方，也就是從 C 走到 B 再到 E 的過程中，牽手順序中會有連續兩個 0，AD 對應到了這兩個 0，會連續記 兩個 1，而這時 B 只要從 AD 下方穿過到中間，就會少兩個交錯點，由原本的五個 交錯點變成三個交錯點，因此可知當一個人的兩手同在某一條線的上或下時，會有兩個交錯點消失。

五人以上牽手情況

依照簡化後的交錯點數量推論出成結情況每出現一組「11」和相對應的「00」，就會少兩個交錯點，因此，此圖形中不可能出現四個交錯點的情況，而當 沒有任何「11」或「00」的圖形，也就是簡化後為五個交 錯點的情況(如右圖)，無法解成一圓。因此五個人的成結情況簡化後可能是三個交錯點或五個交錯點。簡化後有三個交錯點情況中，牽手順序由 5 個 1、5 個 0 所組成，這 10 個數字 只能有一組 11，一組 00(這樣才會有三個交錯點)，依照交錯點編碼的順序，將所 有可能的牽手順序列出為 1110100010 和 1101000101(如下圖)，數字順序調換後其 實兩串數碼是相同的(可將 1110100010 的第一個 1 換成 1101000101 的最後一個 1)，也由此可知，五個人的牽手情況，有兩種是可以成結的。

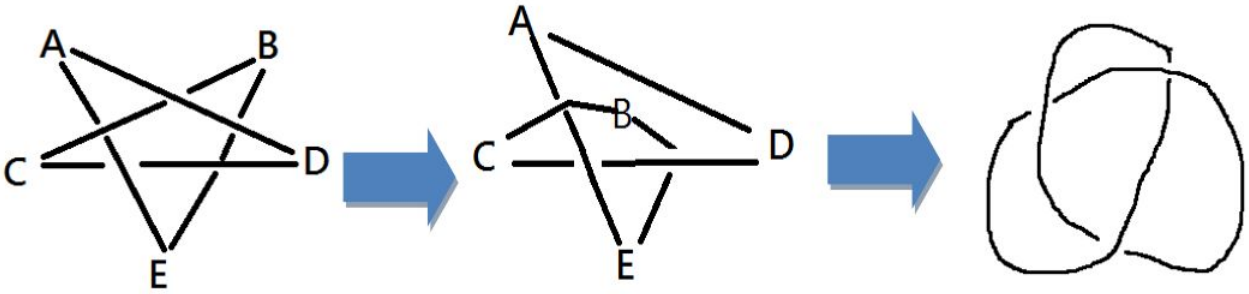
五人以上牽手情況

1



1010101010

2



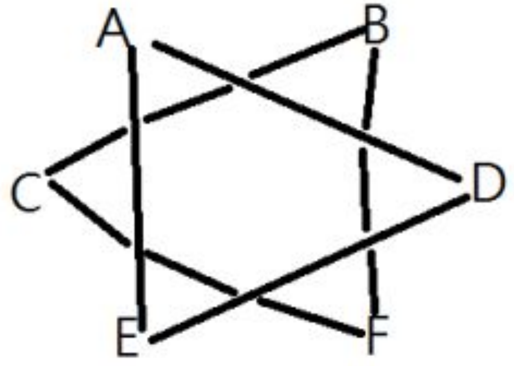
1110100010

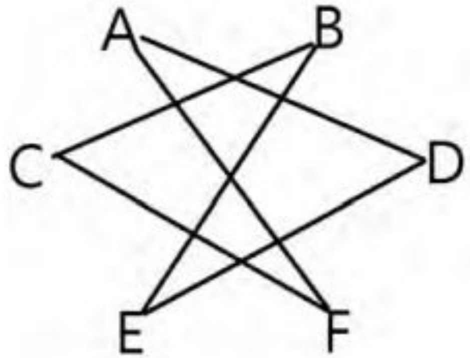
101010

簡化後形成三葉結

六人以上牽手情況

從六人開始, 互相面對的三個人可以自行圍成一個三角形，另外三個人也可以圍成三角形(如右圖), 所以除了要探討圍成兩封閉曲線的情況, 還得探討圍成一封閉曲線的情況。





六人以上牽手情況

六人牽出兩封閉曲線

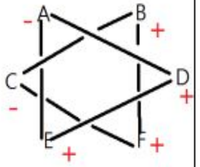
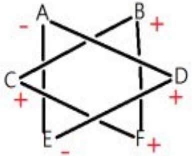
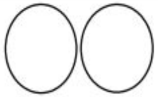
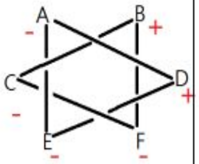
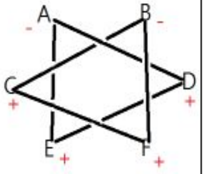
若六人為 A、B、C、D、E、F，則會圍成△ADE 和△BCF，因為這兩個三角形的上下情形一樣是相對的，所以只需要討論一個三角形的上下情形即可，在這裡我們討論△ADE 的上下情形。六人兩圈情況會有六個交錯點，對△ADE 來說，每個交錯點的牽手順序碼可能是 1 或是 0，所以總共會有 2 6 種牽手順序，而因為兩個三角形的上下情形相反(像 是△ADE 是 111000 時，△BCF 會是 000111)，所以必須再將得到的數字除以二， 總共是 25=32 種，以下將這 32 種情況的數碼列出：

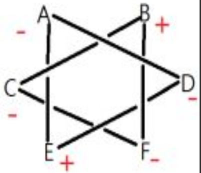
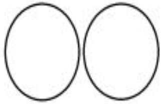
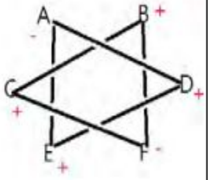
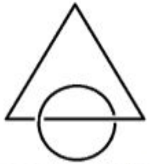
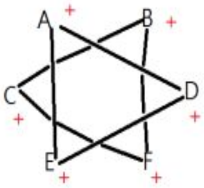
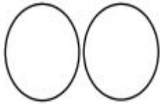
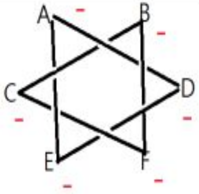
六人牽出兩封閉曲線

111110	111100	111010	110010	111000	110110	111111	101010
111101	111001	110101	100101	110001	101101		
111011	110011	101011	001011	100011	011011		
110111	100111	010111	010110				
101111	001111	101110	101100				
011111	011110	011101	011001				

在這 32 種情況中，可以分為 8 類，如上表所示，同一類的數字碼都是代表同一種結，因為這數字碼的起點是可以自行決定的，換個角度看，圖形還是一樣。先定義若兩隻手伸出後，兩手都在同一線的上或下，稱為「+」;若兩隻手伸出後，兩手一上一下，稱為「—」，而討論「—」的相對位置，可以分類出結的種類。實際將這八種圖形畫出來，整理如下：

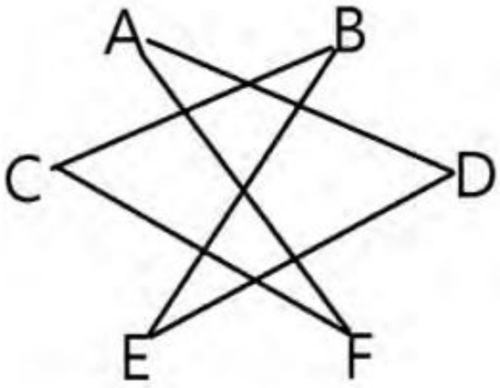
六人牽出兩封閉曲線

△ADE 牽手順序編碼	圖形	+的數量	－的數量	－的相對位置關係	是否可解	簡化圖及編碼簡化說明
111110		4	2	兩個相鄰	否	 ~~1111~~10→10(鏈)
111100		4	2	分開	是	 ~~111100~~→無
111010		2	4	四個相連	否	 ~~11~~1010→1010(鏈)
110010		4	2	兩個相鄰	否	 ~~1100~~10→10(鏈)

110110		2	4	兩兩相鄰	是	 ~~11~~0~~11~~0→~~00~~→無
111000		4	2	分開，隔兩個+	否	 1~~1100~~0→10(鏈)
111111		6	0		是	 ~~111111~~→無
101010		0	6	全部相連	否	 101010(鏈)

六人牽成一封閉曲線

在六個人的情況下圍成一封閉曲線，首先要找出有幾種可能的圖形，討論後歸納出在六人一封閉曲線的情況下，可能有兩種圖形，但將這兩種圖形放在一起 比較，傾斜角度後可發現兩者是同一種圖形(如下圖)。



六人牽成一封閉曲線

將所有情形用+和－的方式討論，發現在六人情況中，可以每個人都是+(即兩 手同上或同下)，但若五人同為+則無法畫出，而四人是+又可以畫出來，可歸類 為當有偶數或零個人是+時，則圖形可畫出，奇數則不行。以下將這些情形作細部的分類：

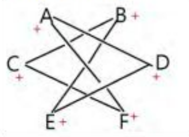
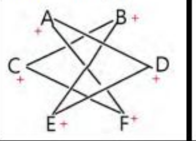
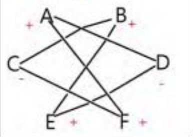
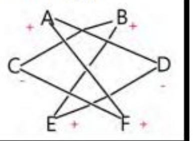
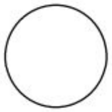
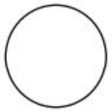
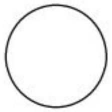
兩手同在上或在下的人數	+的人(每類僅以一種代表)					
6+	ABCDEF					
4+	ABEF	ABCD	ABCE	ABCF	ACDE	BCDE
2+	CD	AB	BD	AD	AE	AF
0+	(無)					

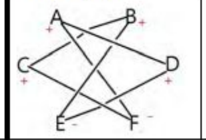
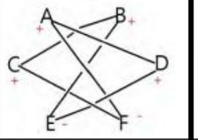
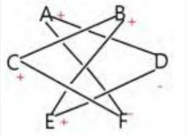
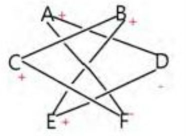
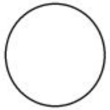
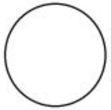
六人牽成一封閉曲線

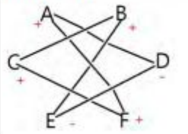
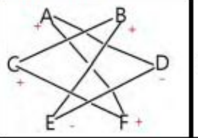
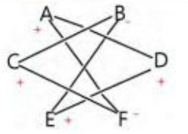
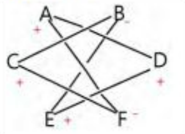
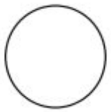
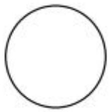
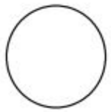
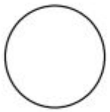
實際將上表的圖形畫出，發現這 14 種圖形中，以+和一分 類僅可分類出靠近六人的六個交錯點，中間的交錯點並沒有討 論到，而這個交錯點是兩條線疊合而成，會有兩種疊合方法(如右圖，中間空白處有兩種可能的圖形)，也就是每種圖形都還 得再多討論一種，即 28 種圖形。28 種結簡化的方式遵循以下步驟：

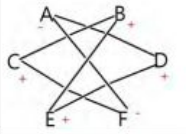
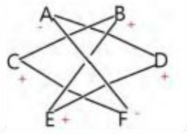
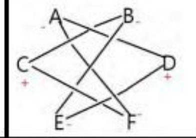
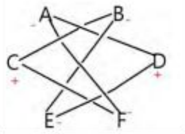
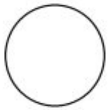
(1) 用約 1 米長的棉線擺成如投影圖所示的結。
(2) 重複尋找是否有 R1 及 R2，一直到牽手順序變為 10101010……(1 與 0 完全 交錯排列)，且沒有任何符合 R1 及 R2 所要拉開的線。
(3) 記錄結果。
註：因 C 和 D 兩手遇到不同線段，因此不可使用前面所提到的 11 和 00 消去 法。

六人牽成一封閉曲線

+的人	ABCDEF(1)	ABCDEF(2)	ABEF(1)	ABEF(2)
圖形				
牽手順序	11111000000011	11111100000001	11000100011101	11000000011111
是否可解	是	是	否(三葉結)	是
解完的圖形				

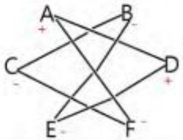
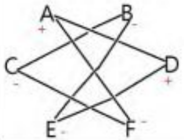
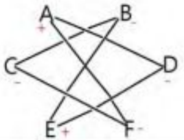
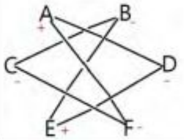
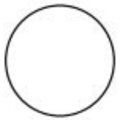
+的人	ABCD(1)	ABCD(2)	ABCE(1)	ABCE(2)
圖形				
牽手順序	11101100001001	11101000001011	00100111111000	00100011111010
是否可解	否(八字結)	是	是	否(三葉結)
解完的圖形				

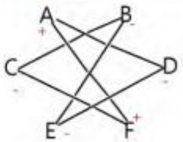
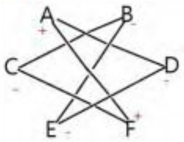
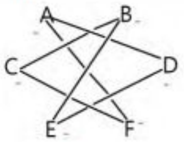
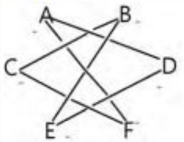
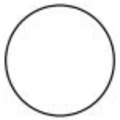
+的人	ABCF(1)	ABCF(2)	ACDE(1)	ACDE(2)
圖形				
牽手順序	00110011110010	00110111110000	01100101111000	01100001111010
是否可解	是	是	是	是
解完的圖形				

+的人	BCDE(1)	BCDE(2)	CD(1)	CD(2)
圖形				
牽手順序	00011111000101	00011011000111	10010110110100	10010010110110
是否可解	否(三葉結)	是	否(六交錯點)	否(六交錯點)
解完的圖形				

六人牽成一封閉曲線

由以上表格可以清楚看出在六人牽成一封閉曲線的情況下，所有可能成結的情況。

+的人	AD(1)	AD(2)	AE(1)	AE(2)
圖形				
牽手順序	10010010010111	10010100010101	10100110011001	10100010011011
是否可解	否(八字結)	是	是	否(三葉結)
解完的圖形				

+的人	AF(1)	AF(2)	無(1)	無(2)
圖形				
牽手順序	10110110010001	10110010010011	10101110101000	10101010101010
是否可解	是	是	否(三葉結)	否(七交錯點)
解完的圖形				

結論

一、

三人遊戲、四人遊戲皆無法成結;五人遊戲有兩種情況會成結;六人一封閉曲線有 12 種情況會成結;六人二封閉曲線有 5 種情況會成結(圖形詳見研究過程)。可以從最少人數、牽手順序及交錯點數量來判斷一結是否成結。因為人可以算是線上一點, 一條線上可以有無限多人, 所以同一種結可能由不同的人數所牽成。

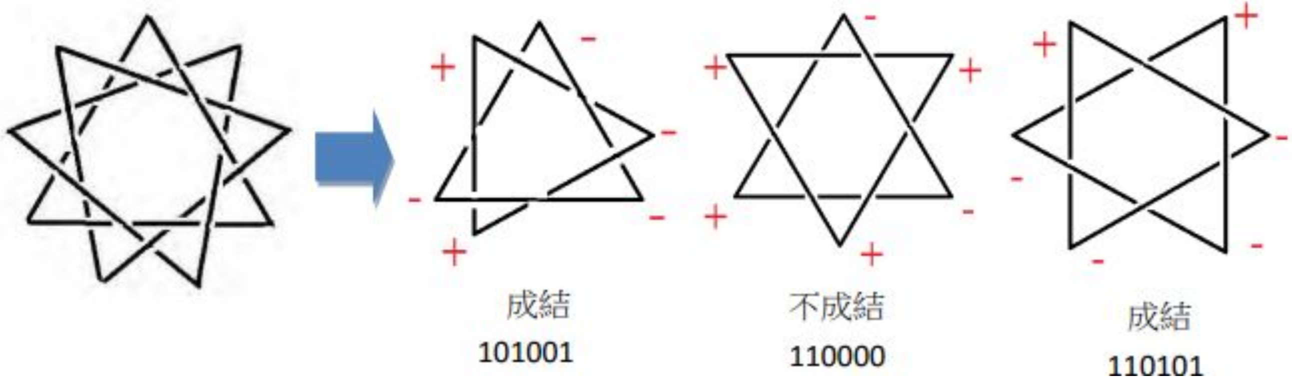
二、

「星星結」有一定的簡化規律性, 在簡化時只需要看牽手順序, 不需要管交錯點編 碼。以下為兩種不同條件的圖形分別的簡化方式:

(一) 若封閉曲線數量為一個或兩個, 則會有兩種不同簡化法的圖形, 如下表所示:

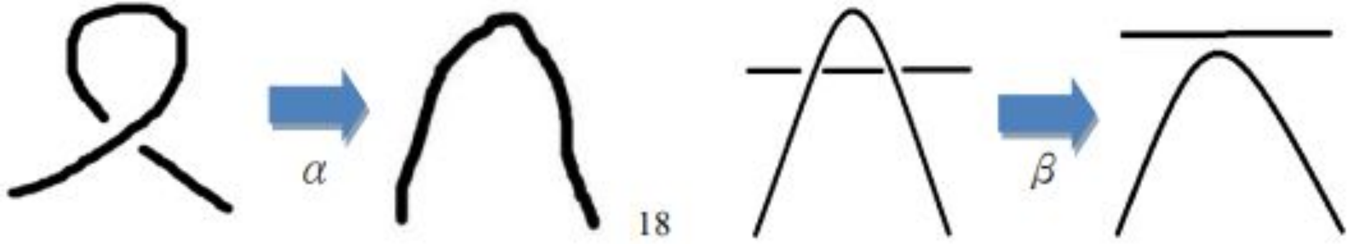
	種類 1──每個從最外面的頂點發出的兩線相交於同一條由兩個最外面頂點相連的線。	種類 2──每個從最外面的頂點發出的兩線相交於不同條由兩個最外面頂點相連的線。
圖形舉例		
說明	牽手順序中可將 11 或 00 消去化簡。	牽手順序連續 3 碼相同，可消除其中 2 碼 (如 111 變成 ~~1~~1~~1~~)。若連續 4 碼相同則全部消除。

(二) 若封閉曲線數量為三個，也可使用以下的方式簡化一個結(此為舉例)
：



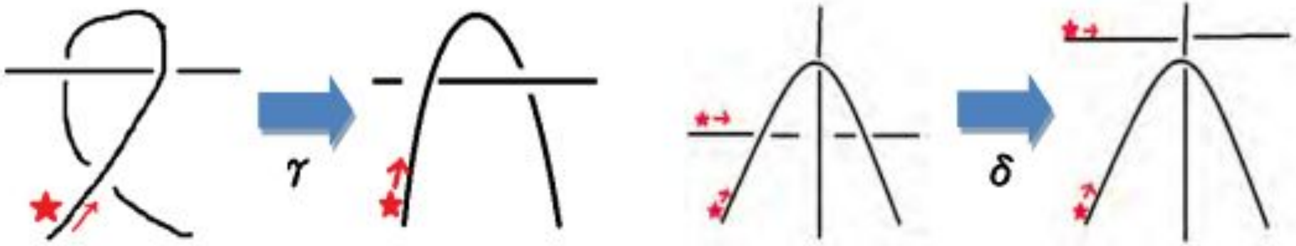
可由上述的分解得到：這個三條封閉曲線的手結成結。星星結的結果可推論出特殊牽手遊戲時的牽手方式，使用牽手順序的特性，能知道最快牽出特定圖形的方法。

三、取代傳統的萊德邁斯特變換，{α, β, γ, δ}成為由基礎變換推論出的變換方式，能運用在每一個結並用比萊德邁斯特變換更有效率的方法簡化每一個結，並且保證簡化前後的結的多項式不變。



α:若牽手順序中出現「10」且兩數碼在同一個交錯點，則可以使用R1簡少1 個交錯點。

β:若牽手順序中出現「11」及「00」且在同樣兩個交錯點，則可以使用R2減少2個交錯點。



γ:若牽手順序中出現「1100」且兩畫底線數碼在同一個交錯點，則可以使用 R1 簡少 1 個交錯點，並將中間 10 所對到的交錯點數碼互換位置。(中間數碼可 以是 10、1100、111000……)

δ:若牽手順序中出現「111」及「000」、「111」及「010」或「000」及「101」，畫底線數碼在同樣兩個交錯點，可使用 R2 減少 2 個交錯點，而中間兩數碼所 對應到的交錯點數碼互換位置。中間數碼可以是 11 及 00、111 及 000……)

評審評語

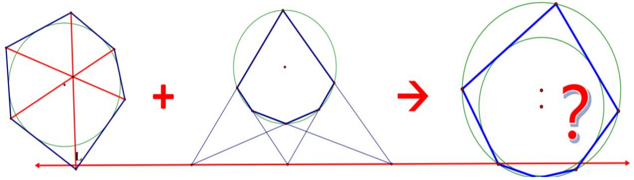
本作品由牽手遊戲入手，進而利用扭結理論進行探討，扭結理論在科展中是比較新鮮的主題，有吸引性，作品中對一些概念的說明，似乎不足，作品提出了四種基本簡化結的方式，但基本質並未離開文獻中常用的萊德邁斯特變換，文中提到新的簡化結方式比較有效率，但未從數學的方式定義何謂有效率，本作品若能對扭結理論有更深入掌握，結果將可以更為紮實。

第一名 層出不窮的彩蛋有「心」「跡」

研究動機

當我翻閱「幾何明珠」這本書時，閱讀到了**Pascal(帕斯卡)定理**「圓內接六邊形三組對邊延長線交點共線」以及**Brianchon(布列安桑)定理**「圓外切六邊形三條對角線共點」，這兩個在射影幾何學上十分重要的定理，並了解到這兩個定理間具有對偶性質。我非常好奇為何兩個可以互相推導的定理，發現的時間竟相隔 150 年，且其它文獻也只是簡單提及兩者的對偶性質，而未試圖將兩者合併討論。所以我希望利用**雙心六邊形**將兩個定理串連在一起，讓 Pascal和Brianchon這兩位錯過近 150 年的數學家有機會「相遇在 21 世紀」。

研究目的



(一)探討圓內接與外切六邊形之遞延圖形的共點共線情形。

(二)探討雙心六邊形的Brianchon點及Pascal線之軌跡圖形。

(三)探討雙心五邊形、四邊形、三角形Brianchon點及Pascal線之軌跡圖形。

(四)根據上述問題，探討其在圓錐曲線上的軌跡圖形及遞延圖形共點共線關係。

關鍵字 射影幾何、極點極線、圓錐曲線

第二名 命中「助」定—間接互助模型的探討

研究動機

在一次專題討論中，我們接觸到了一篇研究「互助賽局」的經濟學論文，對其結合人性所假設的社會模型條件與三種不同性格之人所占比例的演化過程之關聯產生興趣。我們開始思考這篇論文中對社會的假設是否真的接近社會現況，以及我們是否能建構出更加接近現實的模型，參考 Berger(2011)的模型設定並結合高一所學的「機率」及「二項式定理」展開了研究，並試著用不同的觀點描繪出三種人的演化行為。

研究目的

探討discriminator(鑑別者)的行為判斷準則對間接互助(利他)模型的影響，以及cooperator(合作者)、defector(背叛者)及discriminator(鑑別者)所占的比例在演化機制中扮演的角色。

關鍵字 互助模型、演化機制、機率

第三名 格子點上選擇位置之性質研究

研究動機

在搭乘捷運的時候，有時會出現一種場景:雖有空位但卻有人站著。通常是因為不好意思坐在陌生人的旁邊。這種情況也會發生在演講廳或是電影院等公共場所。偶然地有一天看到別人提出了類似的問題模型，我想到這很像前面提到的情況。於是我想探討:如果大家都這樣坐，那究竟坐得下多少人?於是我想探討在這種情況下，能在一、二維空間下的格子點坐下多少人?

研究目的

(一)當第一個人就近選擇最靠近原點的位置坐時，能坐下幾個人?

(二)當第一個人可以任意決定位置時，第一個人應坐哪裡才能使得總共坐下最多人?

(三)承上研究目的二條件下，決定能夠坐下總共多少人?

(四)承上研究目的二條件下，若增加椅子的數量，椅子數與至多能坐下的人數之關係為何?

關鍵字 組合數學、遞迴數列、歸納法

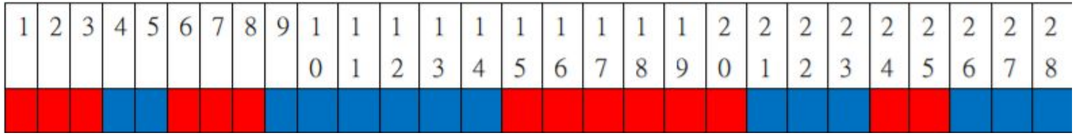
第三名 翻轉塗色

研究動機

k 個數形成的等差數列稱為 k–AP (Arithmetic Progression)。例如:5, 11, 17, 23, 29 便是一個 5–AP 而 10, 20, 30, 40, 50, 60 是一個 6–AP。若將 1 至 n 個 整數分別塗上藍色或紅色其中之一種顏色，然後計算有多少的同色 k-AP。例如 n=28 且 k=3 時，依下列的塗色

則可分別形成 1, 2, 3, 6, 7, 8, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 24, 25 與 4, 5, 9 ,10, 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 26, 27, 28 兩組字串；經計算可知計有 182 個 k–AP。
RBBRBRRBBRRBRBBRBRRBRBBRRBBRBRRBBRRBRBBRRBBRBRRBRBBRRRBBRRBRBBR... 像這樣不斷構造的字串中會有多少的等距且具有相同字母的子集。

研究目的



本文中我們想探討像 10010110011010010110100110010110...，這樣使用對偶塗色法的字串中有多少同字元的 3-AP?

關鍵字 同色等差數列、兩色塗色、隨機塗色

第三名 從A到B再到C

研究動機

在高中數學排列組合中，重複組合和重複排列都是經典考題，而在重複排列之中避免特定　連續的問題也是常出現的題目。如同另一種排列組合「走樓梯」的問題，「重複排列之中避免特　定連續」一樣也可以寫出它的遞迴關係式，上網查了資料後，可發現俄國學者 Tanya Khovanova已於 2007 年提出了避免 aa,bb,cc……連續出現(m=2)的遞迴式：A(t,n,2,j)=(t-1)A(t,n-1,2,j)+(t-j)A(t,n-2,2,j)。而我也就好奇，若將避免特定連續長度推廣 至 m 時，會發生什麼事？因此投入了這個研究中，並在研究過程中，發現「重複排列之中避免　同一物 m 次連續」方法數A(t,n,m,j)的遞迴式，且A(t,n,m,j)可寫成「重複排列 (加入空格) 之中全部(除了空格)避免同一物 m 次連續」方法數 B(n,m,j,i)的展開式，在 2015 臺灣國際科 展時有評審教授提問：「能不能直接算出 B(n,m,j,i)」因此將問題重心移至B(n,m,j,i)上，想知道它的值以及其他有趣的事。

研究目的

一、以排列組合證明A(t,n,m,j)之遞迴
二、以排列組合證明B(n,m,j,i)之遞迴
三、計算A(t,n,m,j)和B(n,m,j,i)之生成函數及B(n,m,j,i)用 C 表示的一般式
四、B(n,m,j,i)的常態分佈

關鍵字 排列組合、生成函數、數據分析

佳作 百動不如一靜

研究動機

在上數學課時，老師曾跟我們提起有關於經濟學上的沙灘賣冰理論。沙灘賣 冰理論是在探討不同的攤販為獲得最大利益而會不斷改變自己的策略，當攤販不 再變動時便達到奈許均衡。這個理論可解釋眾多人類行為，從企業對產品價格的 設置，到選舉時候選人政治光譜的設定，皆可以沙灘賣冰理論來為其行為模式解 釋。我們在研究此模型時，想到若加入『不會隨著其他競爭者改變策略』的玩家，如同在沙灘賣冰模型中加入固定攤販，是否依舊可以形成均衡？於是我們試著找 出固定攤販對奈許均衡存在性的影響，及其與其他攤販的獲利關係為何?

研究目的

(一) 探討不同攤販數形成的奈許均衡及文獻回顧
(二) 探討固定攤販對奈許均衡的影響
(三) 固定攤販的保證獲利

關鍵字 奈許均衡、沙灘賣冰模型、保證獲利

佳作 圓圓不絕的三角問題

研究動機

「共邊三角形的內切圓」這份作品，引發了我們對於三角形的分割 內切圓的興趣，文中 提到直角三角形以直角頂點切割情況，在兩分割 內切圓面積相等時會有最大 值，而我們馬上 聯想到是否有可能兩分割(子)三角形之內切圓面積和與原(母)三角形之 內切圓面積相同， 於是便利用軟體繪圖，發現這真是一門有趣的學問。這份作品的原始版本曾參與一年前的新 竹市科展，當初我們只完成了唯二性與交換解的部分，不過經過一年的研究，我們加以推廣 至任意三角形，更開心的是還找到了判別三角形是否有解的判別式，以及其他的特殊性質。

研究目的

一、直角三角形及任意三角形分切解數目以及交換解性質探討。

二、推導用以判斷三角形是否存在分切解的判別式。

三、探討一個三角形最多可由幾個頂點切割有解。

四、利用尺規作圖作出鈍角等腰三角形以及直角三角形的分切解。

五、探討直角三角形以非直角頂點切割以及分割內切圓面積和極值問題。

關鍵字 分割內切圓、分切解、分割線

佳作 瓶蓋呀瓶蓋─飲料兌換問題的推廣研究

研究動機

最初接觸瓶蓋問題，是在一個社群網站的益智問答看到的，原始問題只要有耐心,就算是剛學會四則運算的兒童都可以解開。也因如此，當下並沒有給予其太大的關注，一直到了科展尋找題目的時候，在數學傳播第39 卷 1 期上再次看到，才引起我們的注意。而之後在眾多的方向中選擇了瓶蓋問題是因為它的龐大性，可用來兌換的部件種類越多，剛開始的飲料數和最後喝到的飲料數間的差距就越劇烈，加入更多變因後它的樣貌就像是一個小型的混沌系統，如此之間的交互作用令我們好奇而欣喜，使其最後變成為了我們的專題研究教材

研究目的

(一) 在原始問題改變最初飲料數並求得最終擁有的本體的個數。

(二) 解明兌換所需部件數量變動的規則與限制。

(三) 了解改變最初飲料數造成最終擁有的部件數的週期變化。

(四) 在原始問題改變最初飲料數與兌換所需部件數量求得最終擁有的本體個數。

(五) 在需多個部件的兌換法求得最終擁有的本體個數。

關鍵字 價值、n 元 m 級瓶蓋問題、數團概念

感謝聆聽