Taiwan International Science Fair
臺灣國際科學展覽會
優勝作品專題 Winning Projects Folio

數學思維與解題 ｜ 第六組

廖英秀/許定閎/王霆軒/林政勳/馬國凱

壹｜參展獲獎作品

010036

平面圖的四元列表著色

類別：平面圖、列表著色、放電論護法

[研究動機]

認為著色問題是一個有趣、具體、容易理解，但卻又很難解決的問題。尤其四色問題需要計算機的輔助才能完成證明，與平常在學習數學所接觸的證明有很大不同。後在傳播期刊中看見放電論政法，得知難度更高的列表著色問題。

對於平面圖，列表著色的充分條件，通常會在一些長度較小的圈上做限制，倘若平面圖沒有三角形的結構，則此平面圖必為可四元列表著色。而在另一篇期刊中得知平面圖沒有四邊形的結構，亦為平面圖為可四元列表著色的充分條件。

究竟這樣容易理解卻又難以突破的著色問題，對於平面圖G，是否能夠自行研究出平面圖G為可四元列表著色的充分條件。

一等獎

010036

平面圖的四元列表著色

類別：平面圖、列表著色、放電論護法

[研究目的]

設計一些規模較小的平面圖與顏色列表函數，使其存在著色函數，以探討連通的簡單圖。研究對三角形與四邊形而言，考量個數、距離、結構不同進行限制使其可四元列表著色。

若平面圖 G 滿足下列條件
（1）任意兩個三角形最多共享一個點；
（2）任意兩個四邊形最多共享一個點；
（3）不存在一個圈，使得此圈的各邊皆與三角形相鄰；
則平面圖 G 必為可四元列表著色

一等獎

010005

翻轉塗色驚嘆號

類別：Thue-Morse Sequence、 3-Arithmetic-Progression

[研究動機]

本作品為2016國際科展「翻轉塗色」的一班畫延伸改進作品，過去文獻中討論之問題為在一列以上色的格子中，會有多少個「等間隔而且同色的格子」

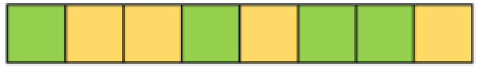
二等獎

010005

翻轉塗色驚嘆號

類別：Thue-Morse Sequence、 3-Arithmetic-Progression

[研究目的]



1. (等間隔同色):以r種顏色，由左至右為一列n個空格著色，如圖即是用兩個顏色著八個空格，每個空格著一色，每個顏色可重複使用，則可找到幾組「k個位置間格相同且相同顏色」。
2. 使用兩種顏色，並以一個固定的Thue-Morse著色法著色後，其「三個位置間格相同且同色」的精確個數。

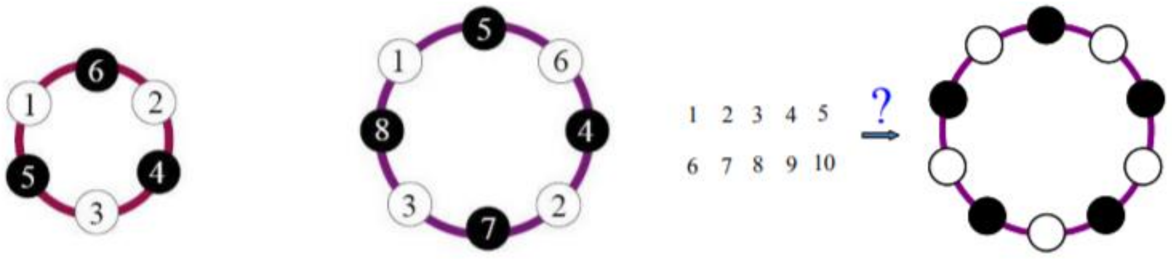
Thue-Morse序列: 0 1 10 1001 10010110

二等獎

010023

魔環

類別：組合設計、標號



[研究動機]

　　報紙上常見的數字遊戲，如幻方、數獨。

有一個特別的遊戲「數珠手環」，類似幻方，具有數字總和為定值的特性，在細節上卻又不太一樣。如下：

（1） 手環上有六粒珠子黑白隔開，分別鑲有 6, 2, 4, 3, 5, 1 等六個數字，黑色的珠子上面的數字和左右相鄰白色珠子數字總和都相同（如圖）。

（2） 手環上有八粒珠子黑白隔開，分別鑲有 5, 6, 4, 2, 7, 3, 8, 1 等八個數字，黑色的珠子上面 的數字和左右相鄰白色珠子數字總和也都相同（如圖）。

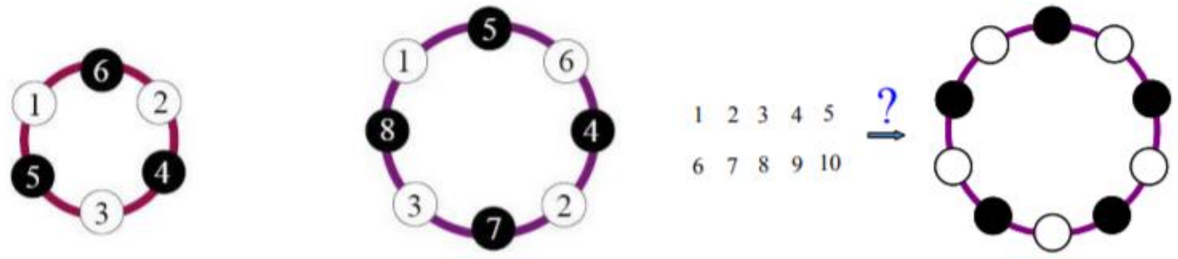
三等獎

010023

魔環

類別：組合設計、標號

[研究動機]



　　針對不同長度的手環問題:
若手環有n個白珠，則稱手環長度為n，視手環為一個圈Cn，其中n個白珠視為圈Cn的頂點，n個黑珠視為圈Cn的邊。
　　而鑲嵌自然數的動作視為函數f，定義域為V(Cn) ∪ E(Cn)；對應域為{1, 2, 3…Zn}
若函數滿足(1) f為1-1　(2)對每個邊，f(u)+f(v)+f(uv)恆為一定值T
則稱f為Cn的一個魔函數，因此若Cn存在一個魔函數，則此數珠手環有解。

三等獎

010023

魔環

類別：組合設計、標號

[研究目的]

1. 對於圈Cn（n ≥ 3），發展雙向脈絡表設計魔函數。
2. 對於圈Cn（n ≥ 3），探討魔函數 f 的定值可能性為何？在合理範圍內的定值，是否皆存在魔函數？
3. 對於一般簡單圖G （樹狀圖 、路徑圖、弦圖 、二部圖 、 平面圖 等），是否皆存在魔函數？
4. 設計一個新的簡單圖類型，使其必然存在魔函數。

三等獎

010040

故態復「蒙」，「日」新月異 -Monge′s theorem 的性質探討與推廣

類別：蒙日定理、射影幾何、共點共線

[研究動機]

我們在「The Schiller Institute」網站上意外看到蒙日定理，「在平面上三個外離的圓，彼此兩圓的外公切線交點會在同一條直線上」的有趣結果。如果不是外公切線而是內公切線，結果會如何？會共點嗎？又如果是 4 個圓呢？甚至是空間中的球體，會不會有令人意想不到的結果呢？

再者，蒙日定理在射影幾何上扮演重要的理論基礎，上述這些想像或推廣若成立，對近年來非常熱門的虛擬實境（Virtual Reality），或許能提供幾何光學應用的理論基礎，甚至可探究宇宙星球間的關係。這引起了我們想一探究竟的好奇心。

三等獎

010040

故態復「蒙」，「日」新月異 -Monge′s theorem 的性質探討與推廣

類別：蒙日定理、射影幾何、共點共線

[研究目的]

本研究目的試圖從平面上三圓的內、外公切線交點的性質探討，推廣至四圓以上、正多邊形、圓錐曲線等位似圖形及空間中的球體與多面體，問題如下：

（一）探討平面上三圓蒙日定理的性質與推廣。
（二）探討平面上四圓蒙日定理的性質與推廣。
（三）探討平面上無限個圓蒙日定理的性質與推廣。
（四）根據上述問題，探討其在正多邊形、圓錐曲線等位似圖形及空間多面體與球體的性質與推廣。

三等獎

010009

多方塊的塗色問題

類別：多方塊

[研究動機]

在無限大的棋盤上，塗上 n 種顏色使得 V 形三方塊沿格線無論如何放置在棋盤上，都不會蓋到重複之顏色，問 n 的最小值為何？n=4是滿足條件的，n=3無法滿足條件。

那如果不是 V 形三方塊，而是其它種三方塊，甚至是四方塊、五方塊，或者廣泛的 k 方塊，那麼 n 的最小值是什麼呢？

四等獎

010009

多方塊的塗色問題

類別：多方塊

[研究目的]

一、對於單方塊到五方塊的種類進行分析。
二、探討各種多方塊塗顏色之構造法並求出 n 的最小值。
三、證明求出的 n 即為最小值。
四、研究是否有方法對所有多方塊所需的顏色進行估計。

四等獎

010025

探討與推廣特定限制下的組合問題

類別：定距、排列組合、生成函數

[研究動機]

一個關著白鶴的鐵籠，籠門有 15 根欄杆。把這個籠子改關猴子，猴子比白鶴大，因此門上的鐵條可以減少，減少的原則是 每兩條欄杆間的間隔最多是原來的兩倍(不能拆相鄰的兩條)，否則猴子就會逃之夭夭，若規定減少的鐵條數目，求取鐵條的方法有多少種？若是改關體型和力氣都較大的猩猩，拆欄杆的方法有多少種？

上述題目只跟直線排列的物體有關。若把籠子改成圓形，在相同的條件下，方法數為何？

四等獎

010025

探討與推廣特定限制下的組合問題

類別：定距、排列組合、生成函數

[研究目的]

設想合理的情境，並建構出以下數學模型。

(一) 求出將 1, 2, . . . , n依序排成直線，取k個數，任意兩數相減≠m的取法數

(二) 求出將 1, 2, . . . , n依序排成圓，取k個數，其中任意兩數之間隔≠m的取法數

(三) 求出將 1, 2, . . . , n依序排成直線，取 k 個數，其中每一組留下的數至少s個且不能連續取a個的取法數

(四) 求出將 1, 2, . . . , n依序排成圓，取k個數，其中每一組留下的數至少s個且不能連續取a個的取法數

四等獎

010039

格子直線數與歐拉函數之探討與推廣

類別：格子直線、歐拉函數、法里序列

[研究動機]

在d維空間中，以d個整數為坐標的點(X1, X2, X3, X4⋯) 稱為「格子點」。過原點與非原點的格子點之連線稱為「**格子直線**」，以格子點為頂點之圖形叫「**格子圖形**」，
原以格子圖形為主軸參賽中華民國第56屆中小學科學展覽會，而後對於探討特定區域中格子點中的格子直線數深感興趣，著迷在它與**歐拉函數**和**法里序列**間的微妙關係，這使我決定更深入研究，以格子直線為主軸後有了這次的研究結果。

四等獎

010039

格子直線數與歐拉函數之探討與推廣

類別：格子直線、歐拉函數、法里序列

[研究目的]

一、探討正方形區域中某些格子點對應法里序列的關係，以及導出法里序列項數的一般式。
二、探討正方形區域中的格子直線數，導出其一般式且應用於三角形區域。
三、探討歐拉函數的推廣式，以及建構出法里序列的推廣所適合的單體區域。
四、探討超立方體區域中的格子直線數，導出其一般式。
五、探討單體區域中的格子直線數，導出其一般式。

四等獎

貳｜作品探究

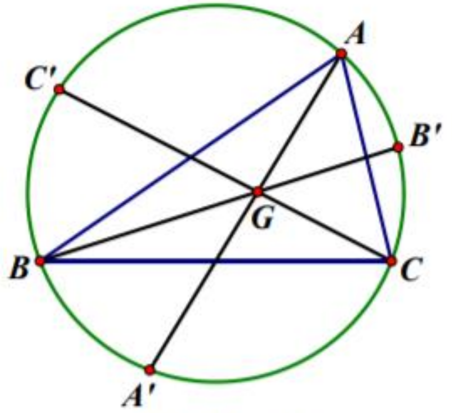
010029

三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

類別：有向線段比值和、二次曲線系、重心座標

[研究動機]

「給定 ΔABC 與其外接圓 Γ，G 點為 ΔABC 的重心，若射線 $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{CG}$ 分別交 Γ 於 A', B', C'，則 $\frac{\overline{AA'}}{\overline{GA'}}+\frac{\overline{BB'}}{\overline{GB'}}+\frac{\overline{CC'}}{\overline{GC'}}=6$」[1]。



▲圖 1-1-1

三等獎

010029

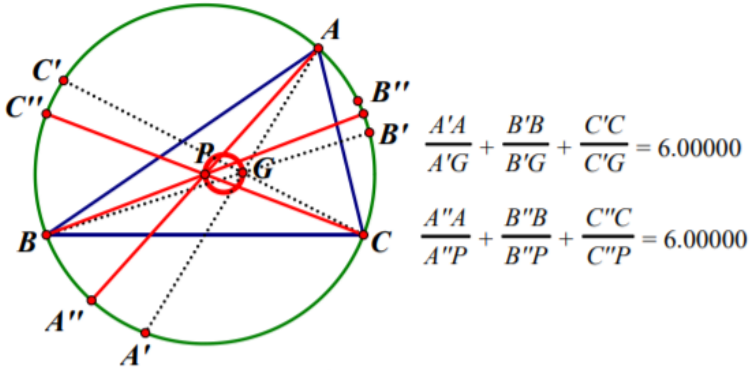
三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

[研究動機]

提問 1（唯一性）：

同樣給定 ΔABC 與其外接圓 Γ，除了重心 G 點以外，還有沒有其他 P 點滿足 $\frac{\overline{AA'}}{\overline{PA'}}+\frac{\overline{BB'}}{\overline{PB'}}+\frac{\overline{CC'}}{\overline{PC'}}=6$？顯然，若 P 點為 Γ 的圓心符合所求（圖 1-2），我們後續實驗亦發現符合所求的 P 點有無限多個，這些 P 點的點集合（P 點的運動軌跡）居然構成一個圓。

$$\Gamma_{3,6}=\left\{P\,\middle|\,\frac{\overline{AA'}}{\overline{PA'}}+\frac{\overline{BB'}}{\overline{PB'}}+\frac{\overline{CC'}}{\overline{PC'}}=6\right\}$$



010029

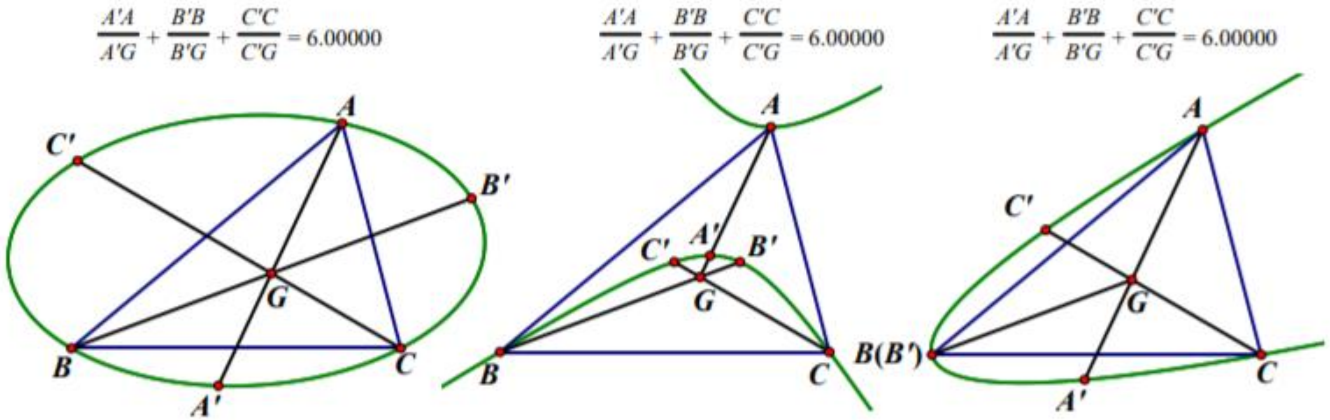
三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

[研究動機]

提問 2（改變給定的外接圓）：

由於圓是錐線的一種，所以我們將外接圓改成外接錐線來觀察。也就是說，給定 ΔABC 與其外接錐線 Γ（橢圓、拋物線、雙曲線），直線 $\overleftrightarrow{AG}, \overleftrightarrow{BG}, \overleftrightarrow{CG}$ 分別交 Γ 於 A', B', C'，同時考慮有向線段比值，則 $\frac{\overline{AA'}}{\overline{GA'}}+\frac{\overline{BB'}}{\overline{GB'}}+\frac{\overline{CC'}}{\overline{GC'}}$ 的值是多少呢？

如圖 1-1-3，實驗發現，居然有向線段比值和 $\frac{\overline{AA'}}{\overline{GA'}}+\frac{\overline{BB'}}{\overline{GB'}}+\frac{\overline{CC'}}{\overline{GC'}}=6$！



010029

三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

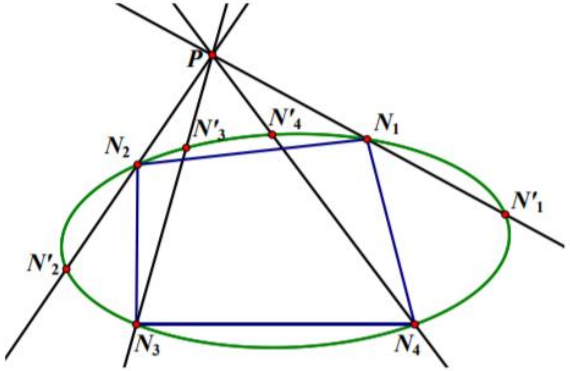
[研究動機]

提問 3（改變給定的兩個條件）：

延續提問 2 的思考模式，如果改變一開始的兩個給定條件——ΔABC 與其外接圓，改變為「多邊形與其外接錐線（圖 1-1-4）」，那麼結果又是如何呢？因此我們推廣命題為：

給定多邊形 $N_1N_2\ldots N_n$ 與其外接錐線 Γ。考慮任取一點 P，令直線 $\overleftrightarrow{N_1P}, \overleftrightarrow{N_2P}, \ldots, \overleftrightarrow{N_nP}$ 分別交 Γ 於 $N_1', N_2', \ldots, N_n'$ 點，再取任意 k 值，探討集合

$\Gamma_{n,k} = \left\{P \middle| \dfrac{\overline{N_1N_1'}}{\overline{PN_1'}} + \dfrac{\overline{N_2N_2'}}{\overline{PN_2'}} + \cdots + \dfrac{\overline{N_nN_n'}}{\overline{PN_n'}} = k\right\}$ 的性質。



010029

三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

[研究目的]

ΔABC 與其外接錐線 Γ，令直線 $\overleftrightarrow{AG}, \overleftrightarrow{BG}, \overleftrightarrow{CG}$ 分別交 Γ 於 A', B', C'，再取任意 k 值，

探討集合 $\Gamma_{3,k} = \left\{ P \,\middle|\, \frac{\overline{AA'}}{\overline{PA'}} + \frac{\overline{BB'}}{\overline{PB'}} + \frac{\overline{CC'}}{\overline{PC'}} = k \right\}$ 的性質。

（一） $\boldsymbol{\Gamma}(3, \boldsymbol{k})$ 的型態與判別式
（二） 取不同值 $\boldsymbol{k1}, \boldsymbol{k2}, \cdots, \boldsymbol{kn}$ 時，$\boldsymbol{\Gamma}(3, \boldsymbol{k1})$, $\boldsymbol{\Gamma}(3, \boldsymbol{k2})$, $\cdots$, $\boldsymbol{\Gamma}(3, \boldsymbol{kn})$彼此的關係
（三） $\Delta \boldsymbol{ABC}$、外接錐線 $\boldsymbol{\Gamma}$、與生成錐線 $\boldsymbol{\Gamma 3}, \boldsymbol{k}$ 的幾何關係
（四） 生成錐線 $\boldsymbol{\Gamma 3}, \boldsymbol{k}$ 圖形的劃分
（五） 只有生成錐線 $\boldsymbol{\Gamma 3}, \boldsymbol{k}$ 為橢圓下，$\boldsymbol{k}$ 值出現不連續跳躍現象
（六） 一般化的情形：多邊形 $\boldsymbol{N1N2} \cdots \boldsymbol{Nn}$ 與其外接錐線

010029

三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

[研究目的]

ΔABC 與其外接錐線 Γ，令直線 $\overleftrightarrow{AG}, \overleftrightarrow{BG}, \overleftrightarrow{CG}$ 分別交 Γ 於 A', B', C'，再取任意 k 值，

探討集合 $\Gamma_{3,k} = \left\{ P \,\middle|\, \frac{\overline{AA'}}{\overline{PA'}} + \frac{\overline{BB'}}{\overline{PB'}} + \frac{\overline{CC'}}{\overline{PC'}} = k \right\}$ 的性質。

（一） $\boldsymbol{\Gamma(3,k)}$ 的型態與判別式
（二） 取不同值 $\boldsymbol{k1, k2, \cdots, kn}$ 時，$\boldsymbol{\Gamma(3,k1)}$, $\boldsymbol{\Gamma(3,k2)}$, $\cdots$, $\boldsymbol{\Gamma(3,kn)}$彼此的關係
（三） $\boldsymbol{\Delta ABC}$、外接錐線 $\boldsymbol{\Gamma}$、與生成錐線 $\boldsymbol{\Gamma3,k}$ 的幾何關係
（四） 生成錐線 $\boldsymbol{\Gamma3,k}$ 圖形的劃分
（五） 只有生成錐線 $\boldsymbol{\Gamma3,k}$ 為橢圓下，$\boldsymbol{k}$ 值出現不連續跳躍現象
（六） 錐線 $\boldsymbol{\Gamma}$ 取六點的有向線段比值和
（七） 一般化的情形：多邊形 $\boldsymbol{N1N2 \cdots Nn}$ 與其外接錐線 �

010029

三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

[預備知識]

（一）　重心座標
（二）　直線方程式
（三）　無窮遠點與無窮遠線
（四）　二次曲線方程式
（五）　極點與極線
（六）　二次曲線中心

010029

三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

[過程與結論]

(一) $\Gamma_{3,k}$ 的型態與判別式

$\Gamma_{3,k}=\left\{P \,\middle|\, \frac{\overline{AA'}}{\overline{PA'}}+\frac{\overline{BB'}}{\overline{PB'}}+\frac{\overline{CC'}}{\overline{PC'}}=k\right\}$ 為一個二次曲線，$\Gamma_{3,k}$ 的橢圓、拋物線、雙曲線之型態不受 k 的取值而產生型態改變。給定的外接錐線 Γ 的型態決定了非退化錐線 $\Gamma_{3,k}$ 的型態，兩者相同型態（例如：當 Γ 為橢圓時，$\Gamma_{3,k}$ 為橢圓）。

$\Gamma_{3,k}$ 的橢圓、拋物線、雙曲線判別式為

$$\Delta=n_1{}^2+n_2{}^2+n_3{}^2-2(n_1n_2+n_2n_3+n_1n_3)$$

1、$\Delta<0$ 時，$\Gamma_{3,k}$ 即為橢圓

2、$\Delta=0$ 時，$\Gamma_{3,k}$ 即為拋物線

3、$\Delta>0$ 時，$\Gamma_{3,k}$ 即為雙曲線

010029

三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

[過程與結論]

我們必須先求出 ΔABC 的外接錐線 Γ 的方程式，因為重心座標下的二次曲線皆可表示為形式：

$$A{\mu_1}^2 + B{\mu_2}^2 + C{\mu_3}^2 + 2D\mu_1\mu_2 + 2E\mu_1\mu_3 + 2F\mu_2\mu_3 = 0$$

再將 Γ 上的三個頂點 $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ 代入前面的方程式而得到 $A = B = C = 0$，再令常數 $2D = n_3, 2E = n_2, 2F = n_1$，就得出引理 1.1。

引理 1.1 ΔABC 的外接錐線 Γ 的方程式為

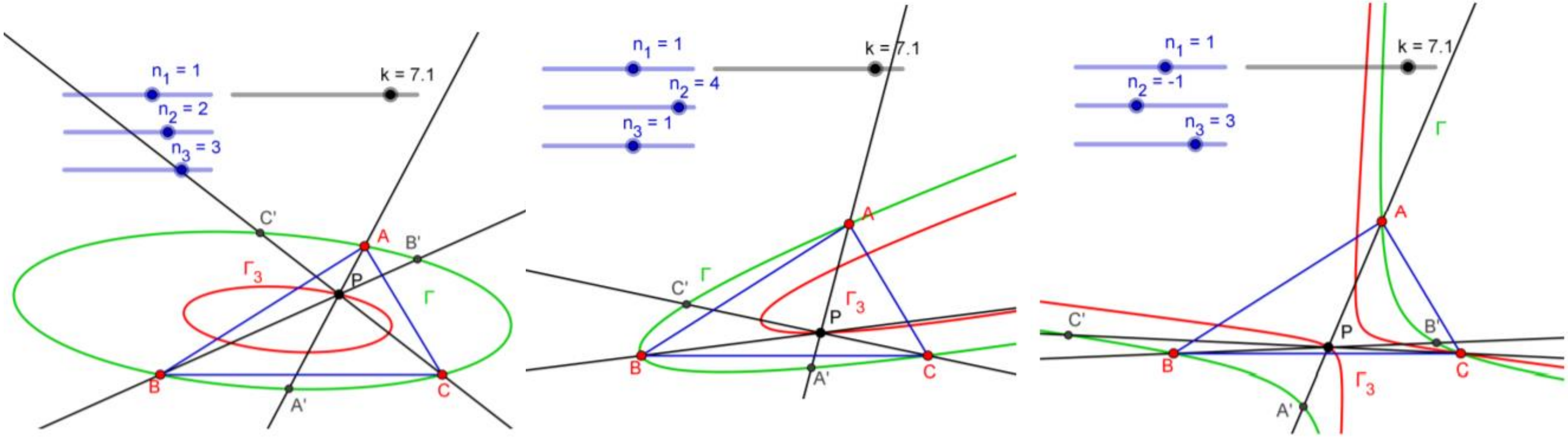
$$\Gamma \equiv n_1\mu_2\mu_3 + n_2\mu_1\mu_3 + n_3\mu_1\mu_2 = 0$$

其中 $n_1, n_2, n_3 \in R$ 且 $n_1 n_2 n_3 \neq 0$

010029

三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

[過程與結論]



010029

三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

[過程與結論]

(二) 取不同值 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 時，$\Gamma_{3,k_1}, \Gamma_{3,k_2}, \dots, \Gamma_{3,k_n}$ 彼此的關係

證明生成 $\Gamma_{3,k}$ 的型態被外接錐線 Γ 所決定後，我們進一步好奇「取不同值 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 時，$\Gamma_{3,k_1}, \Gamma_{3,k_2}, \dots, \Gamma_{3,k_n}$ 的彼此關係」，例如：Γ 為橢圓時，這些橢圓 $\Gamma_{3,k_1}, \Gamma_{3,k_2}, \dots, \Gamma_{3,k_n}$ 彼此的關係是什麼？

我們發現 $\Gamma_{3,k_1}, \Gamma_{3,k_2}, \dots, \Gamma_{3,k_n}$ 組成一個「二次曲線系」，k 值是兩個二次曲線的線性組合之係數。

$\Gamma_{3,k}$ 皆通過四個共同交點，其一，外接錐線 Γ 與無窮遠線 L_∞ 的兩個交點，其二，外接錐線 Γ 與直線 L_0 的兩個交點。

010029

三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

[過程與結論]

$$\Gamma_{3,k} \equiv (\mu_1+\mu_2+\mu_3)[(n_2+n_3)\mu_1+(n_1+n_3)\mu_2+(n_1+n_2)\mu_3] - k(n_1\mu_2\mu_3+n_2\mu_1\mu_3+n_3\mu_1\mu_2)=0$$

顯然，$\Gamma_{3,k}$ 是由兩個二次式進行線性組合而構成

第一個二次式為 $(\mu_1+\mu_2+\mu_3)[(n_2+n_3)\mu_1+(n_1+n_3)\mu_2+(n_1+n_2)\mu_3]$

第二個二次式為 $n_1\mu_2\mu_3+n_2\mu_1\mu_3+n_3\mu_1\mu_2$

因此，$\Gamma_{3,k}$ 構成一個集合即為二次曲線系，而有以下性質 3.1。

當 $\Delta<0$ 時，$\Gamma_{3,k}$ $(\Gamma_{3,k_1},\Gamma_{3,k_2},\Gamma_{3,k_3},\dots)$ 即為橢圓系

當 $\Delta=0$ 時，$\Gamma_{3,k}$ $(\Gamma_{3,k_1},\Gamma_{3,k_2},\Gamma_{3,k_3},\dots)$ 即為拋物線系

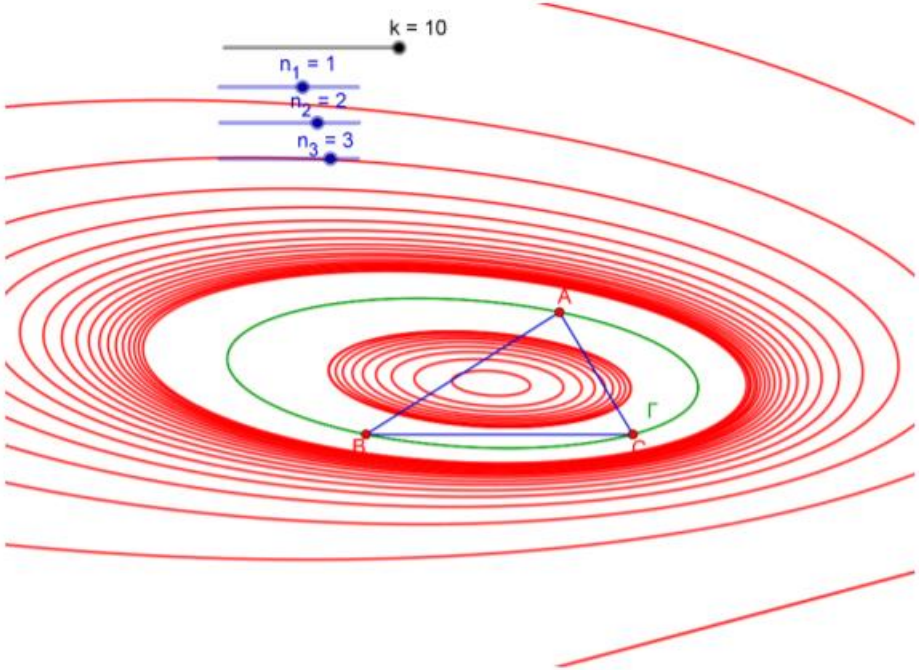
當 $\Delta>0$ 時，$\Gamma_{3,k}$ $(\Gamma_{3,k_1},\Gamma_{3,k_2},\Gamma_{3,k_3},\dots)$ 即為雙曲線系

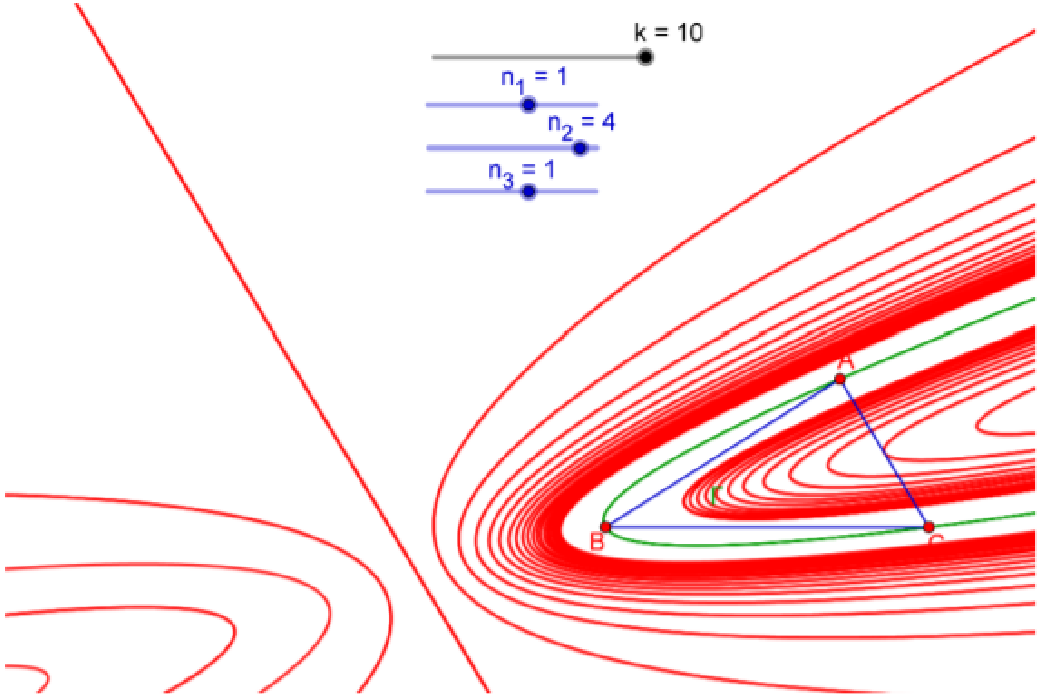
性質 3.1 生成錐線 $\Gamma_{3,k}$ 是一個二次曲線系

010029

三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

[過程與結論]

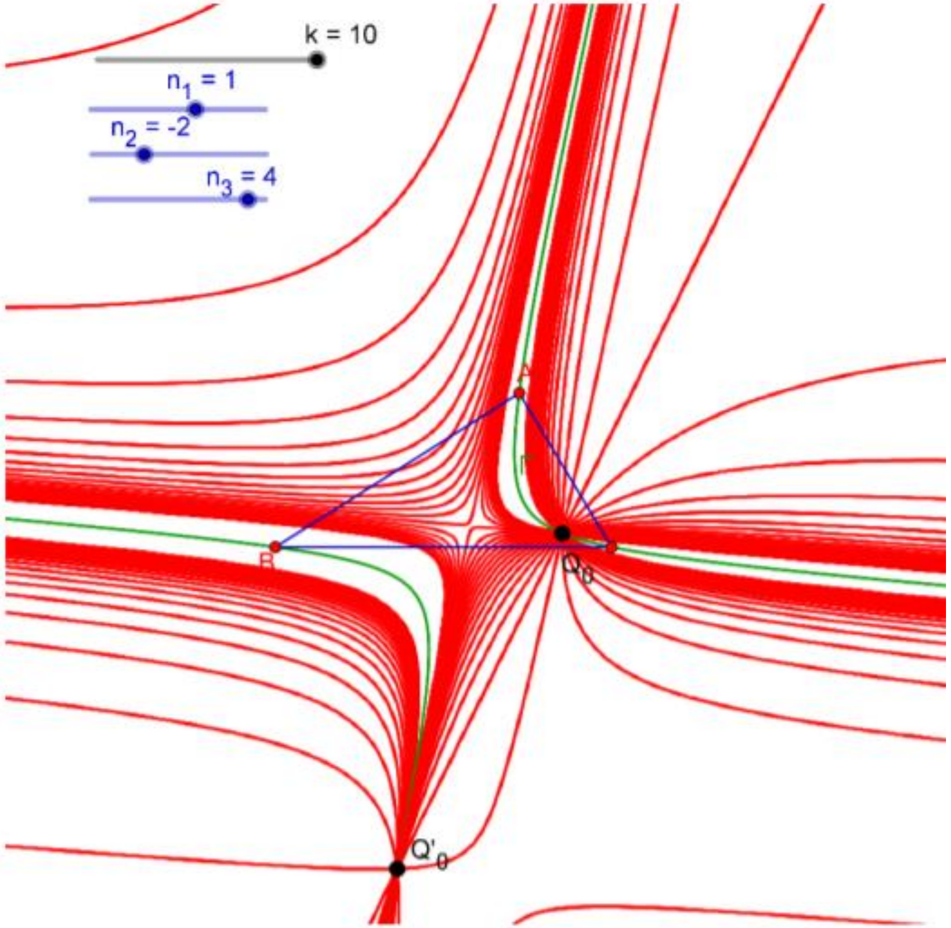




010029

三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

[過程與結論]



010029

三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

[過程與結論]

(三) ΔABC、外接錐線 Γ、與生成錐線 $\Gamma_{3,k}$ 的幾何關係

研究發現生成錐線 $\Gamma_{3,k}$ 本身的結構為二次曲線系，也知道外接錐線 Γ 與生成錐線 $\Gamma_{3,k}$ 的型態相同，但是它們跟 ΔABC 的關係是什麼呢？有沒有更基礎的關聯呢？

我們用點來表徵圖形，以「重心 G 來代表 ΔABC」、「中心 O 代表外接錐線 Γ」、「中心 $O_{3,k}$ 來代表生成錐線 $\Gamma_{3,k}$」，將問題轉化為研究「重心 G、中心 O、中心 $O_{3,k}$ 三者位置關係」，結果發現 G、O、$O_{3,k}$ 三點共線

$$\overrightarrow{OG} : \overrightarrow{OO_{3,k}} = \frac{1}{3} : \frac{1}{k}$$

利用這個發現可以視覺化 $O_{3,k}$（$\Gamma_{3,k}$）的運動方向。

010029

三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

[過程與結論]

性質 4.3 共線性：ΔABC 的重心 G、Γ 中心 O、$\Gamma_{3,k}$ 中心 $O_{3,k}$ 共線

考慮 G 點、O 點、$O_{3,k}$ 點所形成的三角形面積（圖 3-4-2）

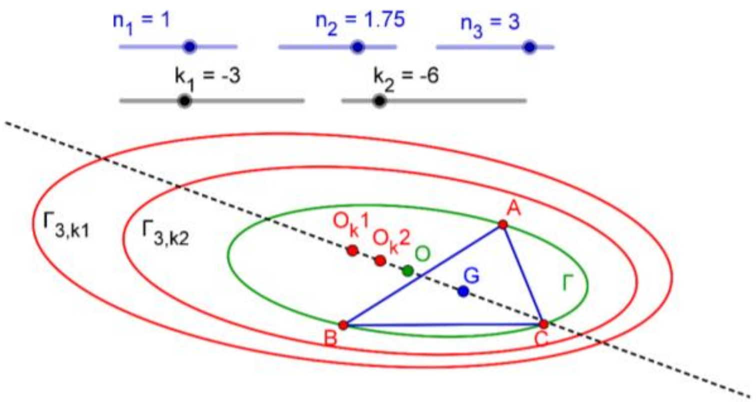
$$\Delta GOO_{3,k}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} n_1(s-n_1) & n_2(s-n_2) & n_3(s-n_3) \\ 1 & 1 & 1 \\ n_1(s-n_1)(k-1) & n_2(s-n_2)(k-1) & n_3(s-n_3)(k-1) \\ +2(s-n_2)(s-n_3) & +2(s-n_1)(s-n_3) & +2(s-n_1)(s-n_2) \end{vmatrix}$$

其中，$s=\frac{n_1+n_2+n_3}{2}$

將第一行×(-1) 加到二、三行，降階化簡可得

$$\Delta GOO_{3,k}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} (n_1-n_2)(s-n_3) & (n_1-n_3)(s-n_2) \\ (k-3)(n_1-n_2)(s-n_3) & (k-3)(n_1-n_3)(s-n_2) \end{vmatrix}=0$$

所以，ΔABC 的重心 G 點、Γ 中心 O 點、$\Gamma_{3,k}$ 中心 $O_{3,k}$ 點多點共線



010029

三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

[過程與結論]

性質 4.4 $\overrightarrow{OG}:\overrightarrow{OO_{3,k}}=\frac{1}{3}:\frac{1}{k}$，其中 O 點與 G 點不重合

由性質 4.3 可得 G 點、O 點、$O_{3,k}$ 點共線

先將此三點坐標正規化後

$G=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

$O=A(n_1(s-n_1),n_2(s-n_2),n_3(s-n_3))$

$$O_k=kA\begin{pmatrix}(n_1(s-n_1)(k-1)+2(s-n_2)(s-n_3)),\\(n_2(s-n_2)(k-1)+2(s-n_1)(s-n_3)),\\(n_3(s-n_3)(k-1)+2(s-n_1)(s-n_2))\end{pmatrix}$$

其中 $A=n_1(s-n_1)+n_2(s-n_2)+n_3(s-n_3)$

再考慮

$$\overrightarrow{O_k}=h\vec{O}+(1-h)\vec{G}$$

接著解 h

因為輪換對稱性，僅需將三個點的重心坐標第一個分量坐標代入即可求出 h

即

$$\frac{n_1(s-n_1)(k-1)+2(s-n_2)(s-n_3)}{kA}=h\times\frac{n_1(s-n_1)}{A}+\frac{1-h}{3}$$

化簡可得 $h=\frac{k-3}{k}$

所以

$$\overrightarrow{OG}:\overrightarrow{OO_{3,k}}=\frac{1}{3}:\frac{1}{k}$$

010029

三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

[過程與結論]

（四）生成錐線 $\Gamma_{3,k}$ 圖形的劃分

利用矩陣對角化的方法，將 $\Gamma_{3,k}$ 化成平方和的形式，討論 k 值使得 $\Gamma_{3,k}$ 發生退化的情形。

我們證明 $k=0,3\pm\frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1n_2n_3}$ 時，會發生退化情形，與一般觀念不同的是，$k=0$ 時，會使得橢圓、拋物線、雙曲線都退化為兩相交直線（一般來說，只有雙曲線會退化為兩相交直線）！這樣的特殊性質與線段比值構造方式有關。

再利用 $\Gamma_{3,k}$ 為二次曲線系的性質，我們分別討論 $\Gamma_{3,k}$ 為橢圓、拋物線、雙曲線的非退化與退化。依據我們的研究，可將生成錐線 $\Gamma_{3,k}$ 的圖形做以下劃分

010029

三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

[過程與結論]

k	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
非退化錐線 （k 不為以下的值）	橢圓	拋物線	雙曲線
$k = 0$	兩相交直線 $L_0 \vee L_\infty$	兩相交直線 $L_0 \vee L_\infty$	兩相交直線 $L_0 \vee L_\infty$
$k = 3 \pm \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3}$	兩個退化點	一個無窮遠點	兩組兩相交直線 （形成平行四邊形）
$3 - \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3} < k < 3 + \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1 n_2 n_3}$	$\emptyset$	拋物線	雙曲線

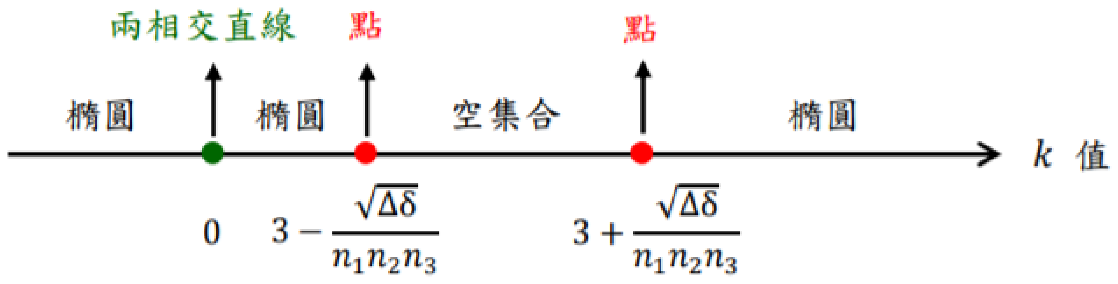
010029

三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

[過程與結論]

（五）只有生成錐線 $\Gamma_{3,k}$ 為橢圓下，k 值出現不連續跳躍現象

當 $\Gamma_{3,k}$ 為橢圓時，將 $k=3\pm\frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1n_2n_3}$ 帶入可以得到兩個退化點，我們描繪出 $\Gamma_{3,k}$ 的圖形情形（圖 4-1-1），這是橢圓獨特的性質。



▲圖 4-1-1

以下 k 值區間使得橢圓 $\Gamma_{3,k}$ 為不成像的空集合，也就是 k 值不連續而有跳躍情形。

$$3-\frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1n_2n_3}<k<3+\frac{\sqrt{\Delta\delta}}{n_1n_2n_3}$$

010029

三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討

[過程與結論]

（六）一般化的情形：多邊形 $N_1N_2\dots N_n$ 與其外接錐線 Γ

取一點 N_1，則 $\Gamma_{1,k}=\left\{P\,\middle|\,\frac{\overline{N_1N_1'}}{\overline{PN_1'}}=k\right\}$ 為二次曲線

取兩點 N_1,N_2，則 $\Gamma_{2,k}=\left\{P\,\middle|\,\frac{\overline{N_1N_1'}}{\overline{PN_1'}}+\frac{\overline{N_2N_2'}}{\overline{PN_2'}}=k\right\}$ 為二次曲線

以此類推，取 n 點 $N_1,N_2,\dots,N_n$，則 $\Gamma_{n,k}=\left\{P\,\middle|\,\frac{\overline{N_1N_1'}}{\overline{PN_1'}}+\frac{\overline{N_2N_2'}}{\overline{PN_2'}}+\cdots+\frac{\overline{N_nN_n'}}{\overline{PN_n'}}=k\right\}$

為二次曲線。

無論取幾點，$\Gamma_{n,k}$ 的橢圓、拋物線、雙曲線之型態被給定的錐線 Γ 的型態決定，所以 $\Gamma_{n,k}$ 的橢圓、拋物線、雙曲線判別式依舊為

$$\Delta={n_1}^2+{n_2}^2+{n_3}^2-2(n_1n_2+n_2n_3+n_1n_3)$$

1、$\Delta<0$ 時，$\Gamma_{n,k}$ 即為橢圓

2、$\Delta=0$ 時，$\Gamma_{n,k}$ 即為拋物線

3、$\Delta>0$ 時，$\Gamma_{n,k}$ 即為雙曲線

當 $n\geq 3$ 時，我們證明了多邊形 $N_1N_2\dots N_n$ 的重心 G、錐線 Γ 的中心 O、生成錐線 $\Gamma_{n,k}$ 的中心 $O_{n,k}$ 三點共線

參與組員：
411031104 廖英秀
410731104 林政勳
410731107 王霆軒
410731120 許定閎
411031210 馬國凱

報告結束，謝謝大家!