第七組報告

組員：林咏勳,高新雄,江晁維,林鈺祐,楊荏喻

目錄

永恆的旋轉木馬

名次:大會獎-一等獎

分析類別:不變量、圓錐曲線、
空間焦半徑

研究動機

　起初在練習競賽題：「橢圓的兩垂直焦點弦被焦點所分成的四段線段長的倒數平方和為定值。」我們在解題過程中感受到了很大的興趣，便開始思考這題目的各種變化，從四條線到n條，甚至到倒數m次方和。此外我們利用極座標認識了更多有趣的曲線，更利用 GeoGebra 畫出令人驚豔的 3D 模擬圖，激發進一步研究的好奇心。

研究目的

一、

固定圓錐曲線方程式的情況下，以焦點為旋轉中心，則n 條相鄰等角焦半徑經任意旋轉時的倒數m次方和為定值。

二、

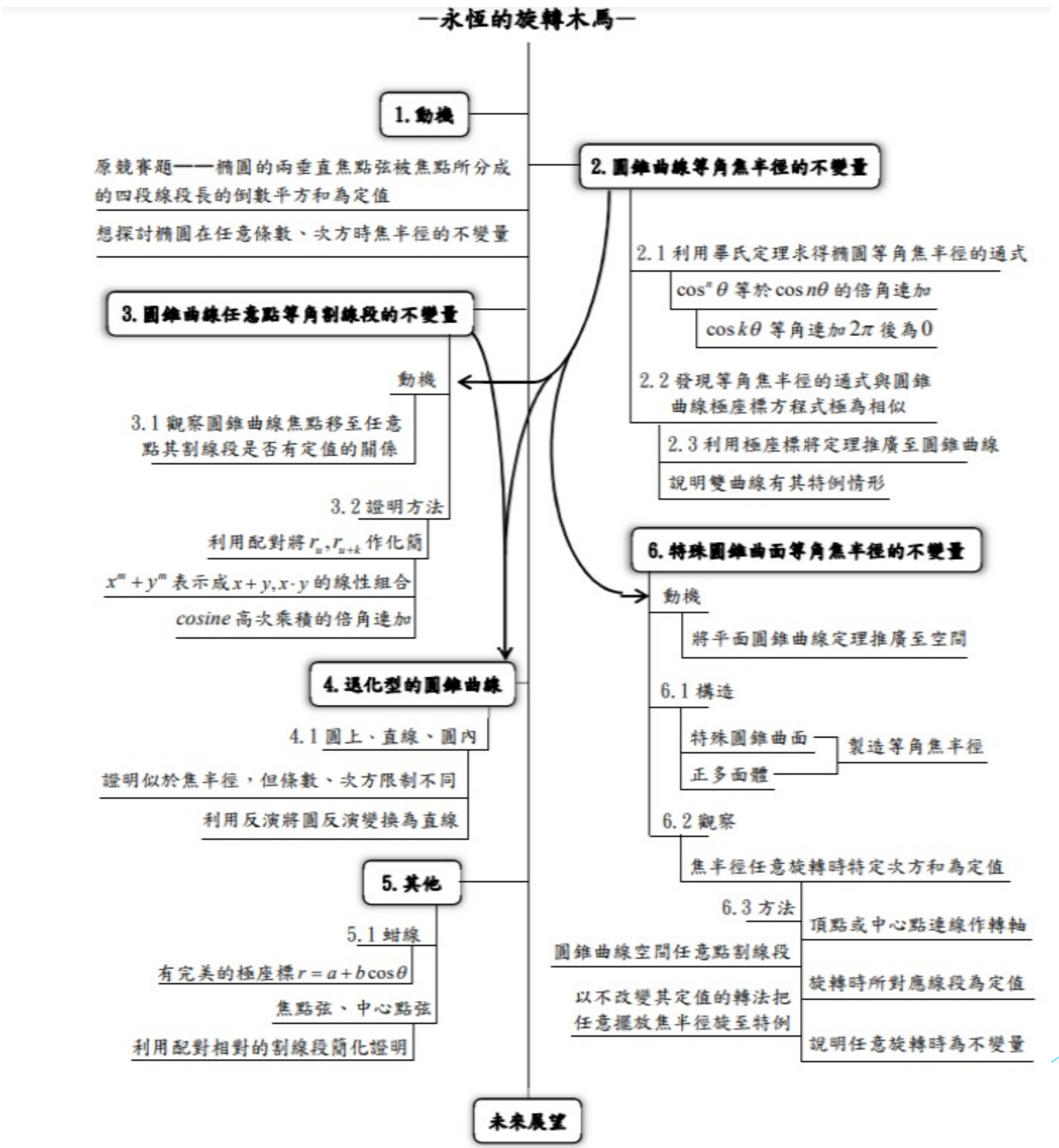
固定圓錐曲線方程式的情況下，以其內任意一點為旋轉中心，則過此點的n條相鄰等角割線段經任意旋轉時的倒數m次方和為定值，其中n>m且n和m為偶數。

三、

在空間中，固定特殊橢圓、拋物、雙曲曲面方程式的情況下，以焦點為旋轉中心，則此焦點向正 N 面體的各頂點做射線交曲面的各線段之倒數m次方和為定值。

四、

在空間中，任意正多面體之頂點到任意點、線、面之距離m次方和為定值。



—永恆的旋轉木馬—
1. 動機
原競賽題——橢圓的兩垂直焦點弦被焦點所分成
的四段線段長的倒數平方和為定值
想探討橢圓在任意係數、次方時焦半徑的不變量
2. 圓錐曲線等角焦半徑的不變量
2.1 利用畢氏定理求得橢圓等角焦半徑的通式
$\cos^n\theta$ 等於 $\cos n\theta$ 的倍角連加
$\cos k\theta$ 等角連加 2π 後為0
2.2 發現等角焦半徑的通式與圓錐
曲線極座標方程式極為相似
2.3 利用極座標將定理推廣至圓錐曲線
說明雙曲線有其特例情形
3. 圓錐曲線任意點等角割線段的不變量
動機
3.1 觀察圓錐曲線焦點移至任意
點其割線段是否有定值的關係
3.2 證明方法
利用配對將 r_u, r_{u+k} 作化簡
x^m+y^m 表示成 $x+y, x\cdot y$ 的線性組合
cosine 高次乘積的倍角連加
4. 退化型的圓錐曲線
4.1 圓上、直線、圓內
證明似於焦半徑，但係數、次方限制不同
利用反演將圓反演變換為直線
5. 其他
5.1 蚶線
有完美的極座標 $r=a+b\cos\theta$
焦點弦、中心點弦
利用配對相對的割線段簡化證明
6. 特殊圓錐曲面等角焦半徑的不變量
動機
將平面圓錐曲線定理推廣至空間
6.1 構造
特殊圓錐曲面
正多面體
製造等角焦半徑
6.2 觀察
焦半徑任意旋轉時特定次方和為定值
6.3 方法
頂點或中心點連線作轉軸
圓錐曲線空間任意點割線段
旋轉時所對應線段為定值
以不改變其定值的轉法把
任意擺放焦半徑旋至特例
說明任意旋轉時為不變量
未來展望

延伸思考與推廣

一、空間任意點情況的不變量

二、正多面體頂點至空間中任一點、線、面距離m次和之不變量

乾坤大挪移

名次:大會獎-三等獎

分析類別:組合數學(排列組合)

研究動機

在2003年的YLL討論網看到有關圓桌問題的思考題目，分析並討論有多少種不同的坐法

研究目的

1.教授們最後的坐法，是否存在著某些規律？是不是隨便寫出一種坐法，就會存在一組人坐的次序與之對應？
2.能否給定一組教授進入的的次序，立刻找出其對應的坐法？
3.到底有幾種進入的次序，都會變成同樣一種坐法？
4.找出每位教授坐錯位置的機率，恰有k人坐錯位置的機率，以及計算出坐錯位置人數的期望值。

正多邊形三角剖分的探討

名次:大會獎-四等獎

分析類別:幾何+化學分子結構圖

研究動機

　在環球城市數學競賽2001年春季賽的題目，其中一題吸引了目光，題目如下：

『在一個正多邊形中，將點與點相連，使此正多邊形分割成多個三角形，且這些對角線彼此只在正多邊形的頂點有交點。而後在正多邊形的每一個頂點寫上以這一個點為頂點的三角形個數。再將這個正多邊形的所有對角線擦掉，是否能夠根據正多邊形上所有頂點上的數，將原有的對角線重新畫出？』

研究目的

1. 對於正n邊形，若給定每個頂點相鄰的三角形數量，則是否有存在且唯一的三角剖分？若存在三角剖分，能否設計一個演算法來造出該三角剖分圖形？

2. 對於正n邊形，考慮不同構的三角剖分，根據不同的對稱分類，是否能找到『完全對稱』、『星形對稱』、『點對稱』、『旋轉對稱』、『線對稱』以及『不對稱』的一般通式？並能 否依此建立不同構三角剖分數Dn的通式？進一步研究三角剖分圖與CnHn+2化學結構上的對應關係。

3. 對於正n邊形的三角剖分，加入頂點相鄰最多的三角形數量之限制，在『最多相鄰n-2個三角形』、『最多相鄰n-3個三角形』、『最多相鄰n-4個三角形』、『最多相鄰n-5個三角形』等條件下，是否能找到不同構三角剖分數的算式？此外，能否再以頂點相鄰最多的三角形數量變動下，建立其三角剖分數的遞迴關係？

4. 考慮一個三角剖分的內部三角形，若該三角形恰包含一條對角線，則稱該三角形為『外圍三角形』；若該三角形三邊皆為對角線，則稱該三角形為『內圍三角形』。進一步我們以外圍三角形的數量進行分類，對於正n 邊形，是否能找到恰兩個外圍三角形狀況下，不同構三角剖分數的一般通式？同時探討與化學領域中的 Losanitsch’s triangle 的關連性。對於三角剖分圖，研究其外圍三角形與內圍三角形數量的必然關係，進一步欲從圖論的觀點探討恰三個外圍三角形的不同構三角剖分數。

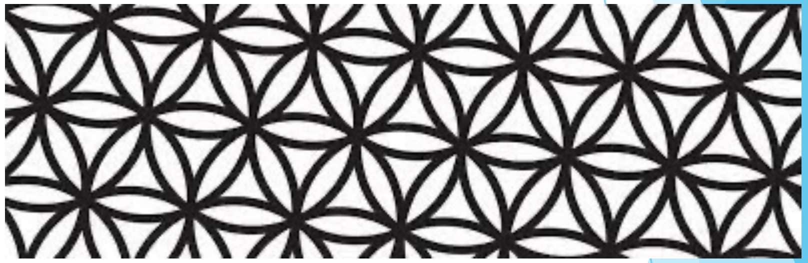
正「乘」「乘」有序—乘二數列及乘五數列的探討

名次:大會獎-三等獎

分析類別:數列 線性代數

研究動機

　利用課餘時間翻閱由國立臺灣科學教育館出版的《科學研習》月刊第 55 卷第 4 期，偶然注意到了其中一個專欄「森棚教官的數學題」專欄。裡面提出這樣的問題：有一數列從 1 開始乘以 2，特別的地方在於是個別數字乘以 2，非整個數字乘以 2。於是此數列首項為 1，第二項為 2，第三項為 4，第四項為 8，第五項為 16，接下來因為1*2= 2以及6*2=12，第六項為 212，第七項為424……以此類推。試問乘以幾次，所得的答案會超過 1000 位數。我認為這個數列看起來雖然陌生，但是初步觀察後感覺數列對稱且數字重複性高，非常美觀且有趣。除了乘以 2 的數列之外，某天突然發現乘以 5 的數列與乘以 2 一樣美觀，更靈機一動，到想2*5=10　，十分好奇乘以 5 的數列會不會與乘以 2 有甚麼關係呢？便同時間著手於此兩個數列的性質。



研究目的

1.找出乘二數列的性質並釐清乘二數列位數的規律

2.找出乘五數列的性質並釐清乘五數列位數的規律

3.發掘乘二數列與乘五數列之間的性質

(一)、名詞定義與先備知識

1、乘 m 數列：首項是 1，下一項為前一項個別數字乘以 m，其中 m 為一正整數，$2 \le m \le 10$。設乘二數列 $\{a_n\}:\{1,2,4,8,16,212,424,848,16816\cdots\}$；乘五數列 $\{b_n\}:\{1,5,25,1025,501025,250501025,10250250501025\cdots\}$。本研究針對乘二數列與乘五數列進行探討。

2、$\otimes m$：以 $\otimes m$ 表示本研究中的乘 m 規則，例如：$16 \otimes 2 = 212$, $1025 \otimes 5 = 501025$。

3、$t(a_n)$：乘二數列位數；$t(b_n)$：乘五數列位數。

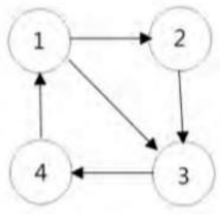
4、中心數 k_n：指乘二數列 $\{a_n\}$ 中第 n 項中，最中間的數字。若 $t(a_n)$ 為奇數，k_n 為由左數來第 $\frac{t(a_n)+1}{2}$ 位數；若 $t(b_n)$ 為偶數，k_n 為由左數來第 $\frac{t(b_n)}{2}$ 及 $\frac{t(b_n)}{2}+1$ 位數。

5、有向圖 D *(directed graph)* 與鄰接矩陣 A *(adjacency matrix)*：

因為乘 m 數列很強調前項到後項的關聯，所以覺得適合將之架構在圖論模型上以利分析。在閱讀數學傳播的文章《用矩陣方法探討三階遞迴數列》以及《尋尋冪冪…非負矩陣冪序列初探》後，發覺有向圖與鄰接矩陣最具相關性。因此在底下介紹之，其中有向圖由結點和連接這些點的邊所組成，且每條邊皆被規定一個方向；至於鄰接矩陣則是運用代數方法解決圖論問題的一個工具。

對於只考慮點與線連接的圖形，可以借助矩陣把它對應成數表。

$D =$



$$\longleftrightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

如上圖，以有向圖 D 為例，把 n 個頂點對應於 n 階方陣。若點 i 到點 j 有連通（即規定方向為 $i \to j$），那麼對應於矩陣中第 i 行第 j 列的位置寫上 1，否則，在矩陣中第 i 列、第 j 行的位置為 0，則 A 稱為 D 的鄰接矩陣，而 D 稱為 A 的伴隨有向圖，並利用矩陣 A 的計算，回推有向圖 D 的性質。

(二)、乘二數列 $\{a_n\}$ 的性質

乘二數列 $\{a_n\}$：

1, 2, 4, 8, 16, 212, 424, 848, 16816, 21216212, 424212424, 848424848,

1681684816816, 2121621216816212161212......

正道同互相為「蒙」—蒙日定理共點共線共圓的問題探討與推廣

名次:大會獎-四等獎

分析類別:幾何 線性代數

研究動機

我們在 The Schiller Institute 網站[8]上看到蒙日線定理「平面上外離的三圓，任兩圓的外公切線交點共線」，並在文獻中發現還有蒙日點定理「平面上外離的三圓，任兩圓的內公切線交點與第三圓圓心的連線共點」以及此兩定理較廣義的推廣。我們非常好奇這些三圓的蒙日定理在四圓、五圓甚至是在 n 圓上的情形，即使經過大量文獻閱讀後，發現前人所作大多停留在三個圓或三個球體的研究，未見四圓以上的推廣，其中很可能是因為原定理敘述的兩圓外公切線交點不知如何類比至三圓、四圓以至 n 圓的作圖，因而不知此情形下的蒙日定理如何描述。於是在好奇心的驅使之下，我們展開一系列的相關問題研究，期待能找到更好的作法，試圖將這個有關射影幾何的著名定理推廣至平面上的 n 圓，甚至是在 N 維空間的情形。

研究目的

本研究試圖將平面上三圓中的蒙日定理推廣至n個圓、球、多邊形以至N維空間的任意圖形，並探討其中的相關性質，問題如下：

- （一）探討平面上外離的四圓、五圓以至n個圓中蒙日點的相關性質及其推廣。
- （二）探討平面上代表n個圓的蒙日圓，其存在性及相關性質。
- （三）試圖探討平面上非外離圓的蒙日定理，並重新探討其性質之間的關係。
- （四）試圖將上述性質推廣至空間中的球體，進而探討蒙日定理在N維空間中的存在性。
- （五）試圖在不同條件變換觀點下，探討蒙日定理的存在性。

貳、研究工具與研究方法

一、研究工具

本研究利用 GSP 與 Geogebra 等電腦動態幾何軟體進行幾何問題的實驗，並透過觀察、猜測、驗證等，發掘研究結果並加以證明。

為了讓符號能充分表達其所代表的幾何意義，做了以下符號命名：

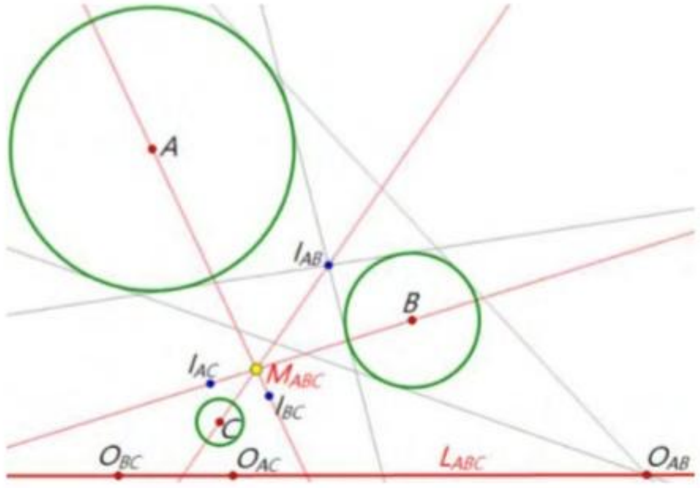
I_{AB} ：圓 A 與圓 B 的內公切線交點

O_{AB} ：圓 A 與圓 B 的外公切線交點

M_{ABC}：圓 A、B、C 的蒙日點

L_{ABC} ：圓 A、B、C 的蒙日線

r_A ：圓 A 的半徑長

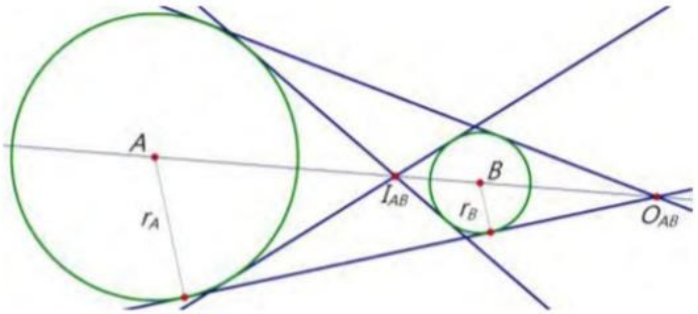


二、文獻探討與前置研究

本研究範圍涉及平面上及空間中圖形間的共點共線性質，將引用位似比概念及有關共點共線的定理，以簡化證明過程，如下：

（一）位似圖形、Menelaus、Ceva 及 Desargues 定理（參見文獻[3]、[4]）

若兩相似多邊形對應頂點連線共點，則稱其互為**位似圖形**，交點稱為**位似中心**，相似比又稱為**位似比**，可透過相似性質得知。若將圓視為無限多邊形，則兩圓必互為位似圖形，其內、外公切線交點分別稱為**位似內心**與**位似外心**，如圖 1。

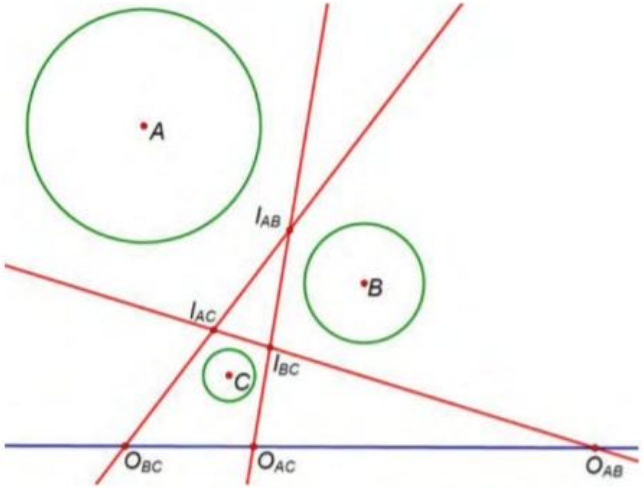


▲圖 1：兩圓 A、B 的位似內心I_{AB}與位似外心O_{AB}

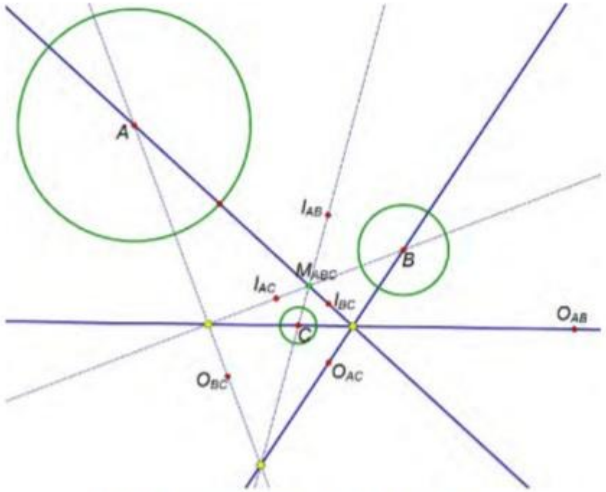
【位似定理】

設兩圓 A、B 的內公切線交點（位似內心）為I_{AB}，外公切線交點（位似外心）為O_{AB}，

則兩圓的位似比為 $\frac{\overline{AI_{AB}}}{\overline{BI_{AB}}}=\frac{r_A}{r_B}=\frac{\overline{AO_{AB}}}{\overline{BO_{AB}}}$，如圖 1。



▲圖 7：廣義蒙日線定理



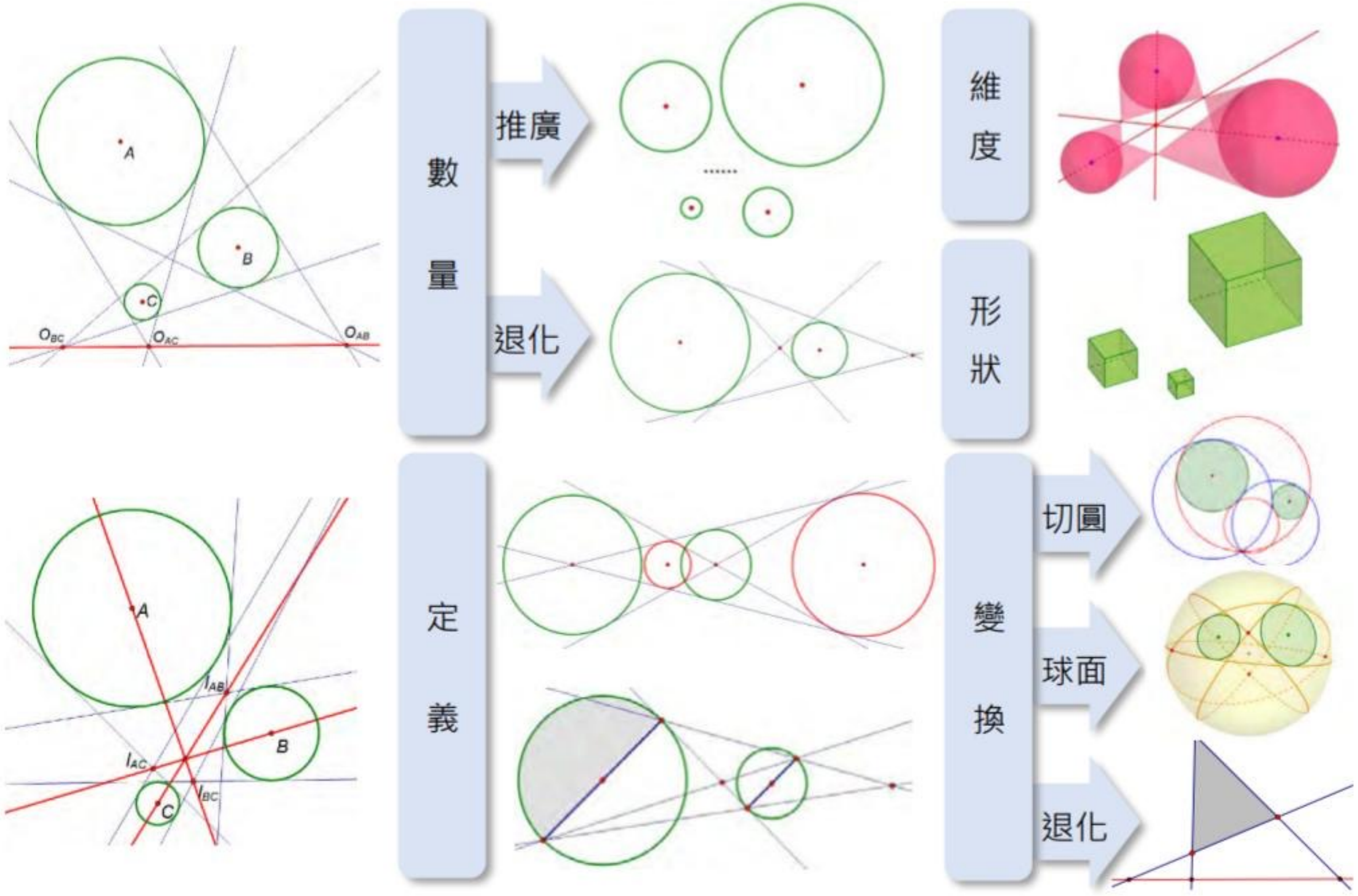
▲圖 8：廣義蒙日點定理

【廣義蒙日點】

平面上三個外離圓 A、B、C，任 1 圓圓心與另 2 圓的位似內心連線（如$\overleftrightarrow{AI_{BC}}$），及另 2 圓圓心分別與另 2 圓位似外心連線（如$\overleftrightarrow{BO_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CO_{AB}}$），則此三線共點。如上頁圖 8，同理($\overleftrightarrow{BI_{AC}}$、$\overleftrightarrow{CO_{AB}}$、$\overleftrightarrow{AO_{BC}}$)、($\overleftrightarrow{CI_{AB}}$、$\overleftrightarrow{AO_{BC}}$、$\overleftrightarrow{BO_{AC}}$)均三線共點，稱其為「**廣義蒙日點**」

上述兩性質皆可以**蒙日線定理**及**蒙日點定理**的證明方式，透過作△ ABC 並以 Menelaus **定理**或 Ceva **定理**證得，故不再贅述。

三、研究方法與架構



費馬多邊形數定理之延伸探討

名次:大會獎-三等獎

分析類別:組合

研究動機

起初我無意間在一本書:中看到了四平方和定理，這定理勾 起了我莫大的好奇心，於是我幾乎花了整整兩個禮拜的時間，想要嘗試證明此定理，無奈卻是徒勞無功，於是我便上網找了這一定理的證明，在看完證明後，這真是令我感到 嘆為觀止，但維基百科告訴了我一個更加驚人的事實：這麼美麗的定理居然不過是費馬 多邊形數定理的一個特例罷了，看完了費馬多邊形數定理後，我又對於數學之美有了更 深一層的認識，也決心要持續將費馬多邊形數定理繼續推廣下去。也就是說，我們所討 論的數列通式不再是 $m-2\ 2\ n\ 2+4-m\ 2\ n$，而是$an2+bn+c$，本文便是要探討在數列 $an2+bn+c$中至少選取多少個數方能保證它們的和可組成任意非負整數。

研究目的

本研究主要是針對於給定二次多項式$f(n)=an^2+bn+c$，其中將n依序帶入所有非負整數可得一數列$\langle a_n\rangle$，並規定$a_{-1}=0$，則對於任何非負整數x，存在一個最小正整數γ使 得： $x=\sum_{i=1}^{\gamma} a_{\alpha_i}$ (其中指標α_i為一般式型如an^2+bn+c之數列$\langle a_n\rangle$中的第α_i項)

（一） 建構一個數學模型，以利延伸推廣相關問題之探究。

（二） 運用所建構的數學模型，尋找出一些可應用的數學定理。

（三） 運用上述定理，找出$\boldsymbol{\gamma}$與$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$的關係式。

積少成多—以階差級數計算填數字方法數並推導其生成函數

名次:大會獎-二等獎

分析類別:組合

研究動機

壹、 研究動機

在學習排列組合這單元時，遇到了這個題目：

104 年指考數學乙單選第 1 題：
將正方形 ABCD 的每一條邊各自標上 1、2、3 中的某一個數，使得任兩條相鄰的邊，都標有恰好差 1 的兩個數。滿足這種條件的標示法總共有多少種？ (A)2 (B)4 (C)6 (D)8 (E)10。(答案為 D)

此題的限制條件，不利於直接利用排列數或組合數計算，而畫出樹狀圖後也必須將不符條件的一一刪去。所幸滿足此題的方法數很少，只需將 8 種方法畫出即可。然而，若持續將邊數擴大：六邊形、八邊形……，或者允許填入的數字範圍改成 1~4、1~5……，可想而知方法數將會遽增！我們想知道將邊數、數字範圍兩條件擴大時，任何情形的方法數究竟為何。

研究目的

一、在 2m 邊形的每一邊上填入 1~n 中的一個正整數，且相鄰邊上的數必須相差 1。以 m、n 求出符合以上填數字規則的方法數。

二、持續擴展問題，將相鄰的兩邊差 1 改成差 2、3、……、q，求出上述個種情形的方法數。

三、求出方法數的生成函數。

四、推導、證明公式後，尋求公式與已知組合學成果之間的關係。

表格塗色遊戲之分析

名次:大會獎-四等獎

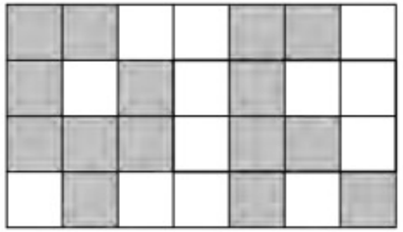
分析類別:組合 幾何

研究動機

- 在翻閱數奧書籍的時候，發現兩道題目值得推廣：

（1976USAMO）

（a）有一 4× 7 的方格表如圖，每格被塗上黑或白色。試證明：無論如何塗色，必存在一組 「可以形成矩形的 4 個頂點」的 4 個方格是同色的。



（b）將方格表改成 4× 6 大小，試找出一種塗色方式，使方格表中任意大小矩形的 4 個頂點 之方格不為同一顏色。 （1982 瑞典數奧） 有一 12× 12 的方格表，每一格被塗上 abc 三色之一

試證明：

無論如何塗色，必存在一組 「可以形成矩形的 4 個頂點」的 4 個方格是同色的。。 我們發現兩種類似的題型雖然都可以使用鴿籠原理來解釋，但所用的方法不盡然相同。 如果將這兩道題目延伸，增加可填入的顏色數量、改變方格表的長寬，甚至將方格表改為三 角格子表，又要以什麼觀點來討論這些情況？於是我們著手進行研究。

研究目的

- （一） 探討顏色數量 k 為 2 或 3 時，哪些 n、m 值會使得[k,n× m]完美。
- （二）找出一條足以判別[k,n× m]是否完美的判別式。
- （三）對於完美的[k,n× m]，找出其塗色方法的規律，並嘗試找出構造的通則或條件。
- （四） 將圖形推廣至三角格子表：探討在不同顏色數量 k 時，哪些 t 值會使得{k,t}完美。

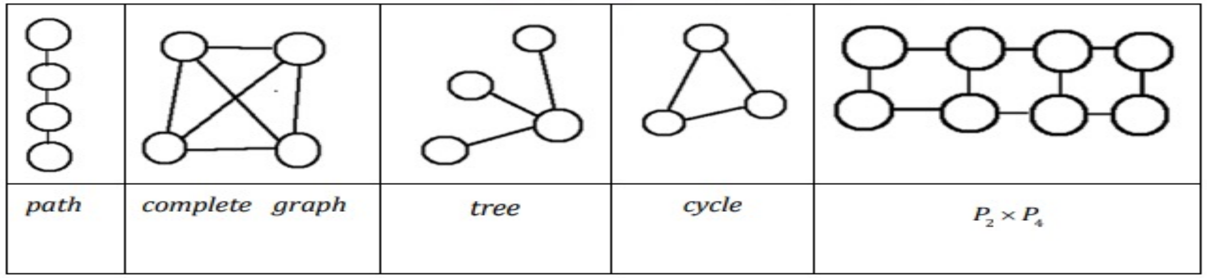
郵不得你不撕

名次:大會獎-四等獎

分析類別:組合學

研究動機

- 本研究是利用圖論領域解決能源管線配置效率問題，而圖論在應用方面相當廣泛，包括 實質物理空間，以及非實質的觀念世界。例如：交通路網、自來水、電力、電信...等管網管理、計畫管理評估、新鎮開發、都市系統結構、建物動線分析、建物結構。我們的問題情境 如下圖，台大電信機房的配線圖，此圖可轉換成點與線的圖論問題。這張電信配線圖存在著 path、tree、cycle、P2 *P4 的子圖。以下我們用 “能量” 一詞來取代電信、瓦斯、未來新興 能源等等。



- 我們研究問題的情境轉換成圖論的問題是，在任意P2´Pn的圖上所有的頂點上標一個自 然數，使其所有頂點所標的和為 K，而且對於所有介於1和 K 之間的自然數k，恆存在P2´Pn的連通子圖 ， 上所有點標號總和為k 。能達到這種性質的標號，稱為圖P2´Pn的一個 IC □coloring，以M(G)表示所有IC □coloring中 K 的最大值。

研究目的

- (一) 對於 P2*Pn，是否存在一種規律的標號方式，在一般性的長度n之下皆為 IC－coloring？
- (二) 如果存在那麼 M(P2*Pn)的值是多少？（為了解決此問題，我們必須找出上、下界的值， 而盡量提升下界，降低上界的手法來找出最佳的標號方式，而本作品以找出下界為主）。