國際科展2019得獎作品

第8組

410831149 楊弘暐

410731137 朱珮綸

410731145 張劭恩

410831135 陳威廷

410731231 童震易

一等獎 連續函數與多倍角公式推廣研究

代數
+
數論

研究動機

Chebyshev Polynomial可被以下式子定義：$T_m(\cos(\theta))=\cos(m\theta)$。

例如：$2\cos^2(\theta)-1=\cos(2\theta)$，因此，$T_2(x)=2x^2-1$。

$4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)=\cos(3\theta)$，因此，$T_3(x)=4x^3-3x$，以此類推。

對cos而言，對於所有的$m\in\mathbb{N}$，均存在$T_m(x)\in\mathbb{C}[x]$使得$T_m(\cos(\theta))=\cos(m\theta)$。

一等獎 連續函數與多倍角公式推廣研究

代數
+
數論

研究動機

這讓我開始好奇，怎樣的函數f會有如此的性質呢？

（對於所有的$m\in\mathbb{N}$，均存在$\boldsymbol{P_m^f}(x)\in\mathbb{C}[x]$使得$\boldsymbol{P_m^f}(f(x))=f(mx)$。）

然而，經過簡單的驗證可以發現：這件事情對於一般的函數是不成立的（比如說：$\sin(x)$）。

基於單純的好奇心，我開始了此次的研究。

一等獎 連續函數與多倍角公式推廣研究

代數
+
數論

研究目的

原本的目標為找尋連續函數$f:\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$滿足對於所有$m \in \mathbb{N}$，均存在

$P_m^f(x) \in \mathbb{C}[x]$使得$P_m^f(f(x))=f(mx)$。

但對於任意的x，由於我們只關心mx的函數值。因此我們將目標改為連續函數$f:[0,\infty) \rightarrow \mathbb{C}$。我們因起初找不到方向，故先以解析函數作為觀察對象，得到初步結果後，才回來討論原本問題，最後將研究結果推廣至$f:(0,\infty) \rightarrow \mathbb{C}$及任意的$P$-多倍角函數。

二等獎 圓周上跳躍回歸問題之研究

數論

研究動機

第27屆環球城市數學競賽試題中，有一個關於圓周上跳躍問題：「12隻蚱蜢處於圓周上的不同點，牠們將圓周分割成12段弧，每步每隻蚱蜢同時沿順時針方向跳到以牠為端點的弧之中點，得到新的12段弧，繼續這樣的跳步，則是否能在12步後至少有一隻蚱蜢回到初始點？」我們對這樣的回歸性質感到好奇，便展開一連串的研究。

二等獎 圓周上跳躍回歸問題之研究

數論

研究目的

（一）圓周上相異n個點變換成與下一點所成弧之中點，求某點回歸的最小變換數。

（二）圓周上相異n個點變換成與下一點所成弧之中點，求某點回歸的所有可能變換數。

（三）圓周上相異n個點變換成與下一點所成弧之$p:q$處，求某點回歸的最小變換數。

（四）圓周上相異n個點變換成與下一點所成弧之$p:q$處，求某點回歸的所有可能變換數。

（五）圓周上相異n個點在特殊初始位置座標之回歸性質研究。

三等獎 費馬多邊形數定理之延伸探討

數論

研究動機

在一本書：《陶哲軒教你聰明解數學》中看到了四平方和定理，發現這麼美麗的定理居然不過是費馬多邊形數定理的一個特例罷了，看完了費馬多邊形數定理後，我又對於數學之美有了更深一層的認識，也決心要持續將費馬多邊形數定理繼續推廣下去。

三等獎 費馬多邊形數定理之延伸探討

數論

研究動機

在歷經去年的參展經驗的洗禮後，我對於此研究議題有了更深一層的體悟，同時也對於當時來不及完全解決此研究議題感到些許遺憾，恰好在去年參展完不久，我便對此議題有了新的靈感，因此，我便決定要持續對此研究主題進行研究，以期能夠達成新的突破。

三等獎　費馬多邊形數定理之延伸探討

數論

研究目的

本研究主要研究的核心問題為：

針對給定的二次式$f(n)=an^2+bn+c$，定義一數列$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle a_{-1}=0, a_n=an^2+bn+c, \forall n\geq 0\rangle$，研究是否存在一正整數$\gamma$，使得對於任意非負整數$x$，$x$皆可表示成數列$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$中取出的$\gamma$項之和，以及正整數$\gamma$與二次式$an^2+bn+c$兩者間的關係。

三等獎　費馬多邊形數定理之延伸探討

數論

研究目的

(一)明確定義所研究之問題、建構出一套理論，並論證出一些可供應用的數學定理。

(二)藉由所求得定理，分別建構對於任意給定二次式an^2+bn+c，尋求其對應的正整數γ之上界、下界的模型。

(三)藉由優化研究目的(二)中的模型，使得所求得的上下界差距降低，最後用夾擠求得正整數γ的值。

三等獎

從「圓」「點」出發—過定點的圓內接多邊形之研究

幾何

研究動機

在閱讀歷屆科展作品時，於「在已知圖形上做過定點之三角形研究」這件作品的研究目的：

若給定三圖形Γ_1、Γ_2、Γ_3與三定點P、Q、R，如何做一三角形$\triangle ABC$使得A在Γ_1上、B在Γ_2上、C在Γ_3上且滿足P在$\overline{\boldsymbol{BC}}$上、$Q$在$\overline{\boldsymbol{AC}}$上且$R$在$\overline{\boldsymbol{AB}}$上？

三等獎

從「圓」「點」出發—過定點的圓內接多邊形之研究

幾何

研究動機

一、當Γ_1、Γ_2、Γ_3為三條直線時的作法

二、當Γ_1、Γ_2、Γ_3為兩直線和一圓時的作法

三、當Γ_1、Γ_2、Γ_3為一直線和兩圓時的作法

四、當Γ_1、Γ_2、Γ_3為三圓時的作法，但三圓不完全重合

五、當Γ_1、Γ_2、Γ_3為三圓時的作法，但三圓重合

六、將問題推廣為在已知圖形上作四邊形且當Γ_1、Γ_2、Γ_3、Γ_4為四重合的圓

三等獎

從「圓」「點」出發─過定點的圓內接多邊形之研究

幾何

研究動機

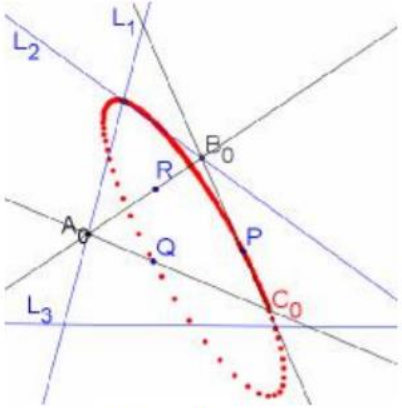
發現其中的問題五與六，作者是採用包絡的作圖方式處理，

但這樣的方式需限制在某些條件下，無法完整的推廣與證明，

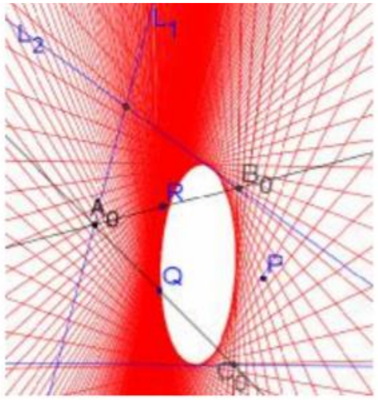
因此我希望找尋其他的作圖方式可以

來解決該問題並將之推廣至多邊形，

於是開啟我的研究之路。



圖(三十七)



圖(三十八)

三等獎

從「圓」「點」出發—過定點的圓內接多邊形之研究

幾何

研究目的

（一）探討平面上給定一圓及任三點皆不共線的n點，求作各邊或其延長線上恰含有前述n點中之一點的圓內接n邊形之作法。（n為大於2的正整數）

（二）探討平面上給定一圓及任三點皆不共線的n點，求作各邊或其延長線上恰含有前述n點中之一點的圓內接n邊形之解的個數與條件。（n為大於2的正整數）

三等獎

從「圓」「點」出發—過定點的圓內接多邊形之研究

幾何

研究目的

（三）探討平面上給定一圓及任三點皆不共線的n點，求作各邊或其延長線上恰含有前述n點中之一點的圓內接n邊形有唯一解的軌跡方程式、軌跡圖形及其性質。（n為大於2的正整數）

（四）探討空間中給定一圓球及不共線三點，求作各邊或其延長線上恰含有前述三點中之一點的球內接三角形有唯一解的軌跡方程式及其圖形。

三等獎 格子直線數與歐拉函數之探討

組合

研究動機

本研究在探討過原點且通過特定格子區域中格子點的直線數，利用縱向或橫向方式來計算。不論哪一種方式皆從正方形區域探討，得到其格子直線數與歐拉函數有關，特別是在橫向方式中增加上高斯符號與高斯符號協助計算，得到正方形、長方形、三角形及圓形區域的直線數及其上下界，及探討上下界的特定區域。此外，將原點移動到任意點，探討過任意點且通過特定格子區域中格子點的直線數，得到一些有趣的性質。

三等獎 格子直線數與歐拉函數之探討

組合

研究動機

接下來，從正方形區域推廣至高維度的超立方體區域中的直線數，並推導出三個歐拉函數的推廣式，其中一種是約當圓互質函數，使用這些函數不僅能簡化計算，更能拓寬歐拉函數的視野。另外二種皆是利用幾何結構推導出來，其中一種是用第二類史特林數來表示。

最後我們使用此歐拉函數的推廣三式推導出高維度的超立方體、超長方體、單體(即高維度中廣義三角形區域)及角錐柱中的格子直線數及其上下界，特別是利用橫向方式獲得公式的更為精簡。

三等獎　格子直線數與歐拉函數之探討

組合

研究目的

一、探討正方形區域中某些格子點對應歐拉函數的關係，以及導出其格子直線數及其上下界，並且探討上下界的特定區域。同時探討將原點移動到任意點的直線數論證其性質。

二、探討任意三角形區域、長方形及圓形區域中的格子直線數及其上下界，以及探討上下界的特定區域。

三等獎　格子直線數與歐拉函數之探討

組合

研究目的

三、探討超立方體區域中某些格子點對應歐拉函數的推廣三式，且推導出超立方體區域中的格子直線數及其上下界，以及探討上下界的特定區域。

四、探討超長方體區域中的格子直線數及其上下界，並探討上下界的特定區域。

五、探討高維度單體及角錐柱中的格子直線數及其上下界，並探討上下界的特定區域。

三等獎 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{C_n^{2n}}=\frac{2\sqrt{3}\pi+18}{27}$ 與其相關的無窮級數

代數
+
組合

研究動機

班上討論校慶園遊會攤位時，同學們設計了一個博奕遊戲，流程如下：

1. 玩家隨意指定一個正整數n。
2. 莊家拿出大小相同的n顆白球與n顆黑球，並將之放入一足夠大的箱子內。(假設每一顆白球與黑球被取出的機率皆相等)
3. 玩家從箱子內一次取出n顆球，若n顆球均為白球則可得n元的獎金。

三等獎 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{C_n^{2n}}=\frac{2\sqrt{3}\pi+18}{27}$ 與其相關的無窮級數

代數
+
組合

研究動機

自然而然的，大家想要知道這個遊戲的實際效益，我想到了從期望值的定義出發。注意到若以實際情況來看，正整數n的大小跟範圍應加以考慮與限制，但我感興趣的是n可為任意大的情況，此時的期望值計算為$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{C_n^{2n}}$，為一個難處理的無窮級數，引起了我的研究動機，希望能透過一些數學概念與方法嘗試解決。

三等獎 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{C_n^{2n}}=\frac{2\sqrt{3}\pi+18}{27}$與其相關的無窮級數

代數
+
組合

研究目的

一、嘗試延伸原問題。

二、利用數學方法解決原問題並試著探討一系列相關的無窮級數。

三、將研究結果推廣並試著找出相關應用。

討論表中無窮級數的收斂值及近似值

肆、 研究過程與方法

一、計算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{C_n^{2n}}$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{C_n^{2n}}$ 之值

觀察原問題 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{C_n^{2n}}$ 含有項 $\frac{1}{C_n^{2n}}$，且分子的部分是一個多項式，與老師討論後決定先探討無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{C_n^{2n}}$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{C_n^{2n}}$ 的值。首先，我們先驗證原問題的收斂性：

引理 1.1

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{C_n^{2n}}$ 收斂

(2) 對所有的 $x\in\mathbb{R}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^x}{C_n^{2n}}$ 收斂

證明. 利用附錄一中的**性質 1.2** (比值審斂法)，驗證極限值小於 1 即可：

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{C_{n+1}^{2n+2}}\times\frac{C_n^{2n}}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^3}{(2n+2)(2n+1)(n)}\cdot\frac{(n+1)}{n}\right|=\frac{1}{4}<1$$

$$(2)\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^x}{C_{n+1}^{2n+2}}\times\frac{C_n^{2n}}{n^x}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^3}{(2n+2)(2n+1)(n)}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^x\right|=\frac{1}{4}<1,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

引理 1.1 證明了原問題的解之存在性，為了順利求出 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{C_n^{2n}}$ 的值，觀察到 $\dfrac{1}{C_n^{2n}}$ 與階乘有關，與老師討論後，或許可以利用 γ 函數與 β 函數的性質(可參考附錄一的**性質** 1.1)化簡原問題，經過計算後得到以下的引理：

引理 1.2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{C_n^{2n}}=\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left(t-t^2\right)^n\right)dt$$

證明. 由附錄一的**性質 1.1**，

$$\frac{1}{C_n^{2n}}=\frac{n!n!}{(2n)!}=\frac{\gamma(n+1)\gamma(n+1)}{\gamma(2n+1)}=(2n+1)\frac{\gamma(n+1)\gamma(n+1)}{\gamma(2n+2)}=(2n+1)\beta(n+1,n+1),$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{C_n^{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\beta(n+1,n+1)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt=\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left(t-t^2\right)^n\right)dt$$

透過引理 1.2 可將無窮級數和轉換為一個積分式，故只要求出此積分便能得到我們想要的結果。利用上述引理，可以得到我們的第一個主要結果：

定理 1.1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{C_n^{2n}}=\frac{2\sqrt{3}\pi+18}{27}$$

證明. 由引理 1.2 與附錄二的引理 1.3，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{C_n^{2n}}=\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}n(2n+1)\left(t-t^2\right)^n\right)dt=\int_0^1\frac{\left(t^2-t\right)\left(t^2-t-3\right)}{\left(t^2-t+1\right)^3}dt$$

利用附錄一之**性質 1.3** (奧斯特洛格拉德斯基積分方法)，令

$$P(t)=(t^2-t)(t^2-t-3)\text{，}Q(t)=(t^2-t+1)^3\text{，}$$

$$Q'(t)=(6t-3)(t^2-t+1)^2\text{，}Q_1(t)=(t^2-t+1)^2\text{，}Q_2(t)=\frac{Q(t)}{Q_1(t)}=t^2-t+1\text{，}$$

則存在唯一的多項式

$$P_1(t)=At^3+Bt^2+Ct+D,\ \ P_2(t)=Et+F,\ \ A,B,C,D,E,F\in\mathbb{R}$$

使得

$$\int \frac{(t^2-t)(t^2-t-3)}{(t^2-t+1)^3}dt = \frac{At^3+Bt^2+Ct+D}{(t^2-t+1)^2} + \int \frac{Et+F}{t^2-t+1}dt$$

將等號兩側微分，得到

$$\frac{(t^2-t)(t^2-t-3)}{(t^2-t+1)^3} = \frac{(t^2-t+1)^2(3At^2+2Bt+C)-2(At^3+Bt^2+Ct+D)(2t-1)(t^2-t+1)}{(t^2-t+1)^4} + \frac{Et+F}{t^2-t+1}$$

通分化簡後比較係數可得 $(A,B,C,D,E,F)=\left(-\frac{2}{3},1,\frac{1}{3},-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right)$, 故

$$\int\frac{(t^2-t)(t^2-t-3)}{(t^2-t+1)^3}dt=-\frac{2t^3-3t^2-t+1}{3(t^2-t+1)^2}+\frac{1}{3}\int\frac{1}{t^2-t+1}dt\,,$$

另外，由積分公式

$$\int\frac{1}{t^2+a^2}dt=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{t}{a}+C\text{ ， }a>0,\ C\text{ 為常數}$$

可知

$$\frac{1}{3}\int\frac{1}{t^2-t+1}dt=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt=\frac{2\tan^{-1}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)}{3\sqrt{3}}+C.$$

故所求

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{C_n^{2n}}=\int_0^1\frac{\left(t^2-t\right)\left(t^2-t-3\right)}{\left(t^2-t+1\right)^3}dt=\left(-\frac{2t^3-3t^2-t+1}{3\left(t^2-t+1\right)^2}+\frac{2\tan^{-1}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)}{3\sqrt{3}}+C\right)\Bigg|_0^1=\frac{2\sqrt{3}\pi+18}{27}$$

多麼漂亮的結果！此無窮級數和竟然包含了無理數 $\sqrt{3}$ 與超越數 π 。

接下來繼續思考的方向為，將分子中多項式的次數提高時，是否均能沿用以γ函數跟β函數的形式將問題轉為積分處理？考慮 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{C_n^{2n}}$ 的情形，可得到以下結果：

定理 1.2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{C_n^{2n}}=\frac{10\sqrt{3}\pi+108}{81}$$

證明. 利用引理 1.2 與附錄二的引理 1.4，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{C_n^{2n}}=\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^2(2n+1)\left(t-t^2\right)^n\right)dt=-\int\frac{\left(t^2-t\right)\left(t^2-t-9\right)\left(t^2-t+13\right)}{\left(t^2-t+1\right)^4}dt$$

利用附錄一之**性質 1.3** (奧斯特洛格拉德斯基積分方法)，令

$$P(t)=-\left(t^2-t\right)\left(t^2-t-9\right)\left(t^2-t+13\right)\text{，}Q(t)=\left(t^2-t+1\right)^4$$

$$Q'(t)=4(2t-1)\left(t^2-t+1\right)^3\text{，}Q_1(t)=\left(t^2-t+1\right)^3\text{，}Q_2(t)=t^2-t+1$$

則存在唯一的多項式

$$P_1(t)=At^5+Bt^4+Ct^3+Dt^2+Et+F\text{，}P_2(t)=Gt+H\text{，}A,B,C,D,E,F,G,H\in\mathbb{R}$$

使得

$$-\int \frac{(t^2-t)(t^2-t-9)(t^2-t+13)}{(t^2-t+1)^4}dt=\frac{At^5+Bt^4+Ct^3+Dt^2+Et+F}{(t^2-t+1)^3}+\int \frac{Gt+H}{t^2-t+1}dt$$

利用微分左右兩式經通分後比較係數得到

$$(A,B,C,D,E,F,G,H)=\left(\frac{14}{9},-\frac{35}{9},\frac{10}{3},-\frac{10}{9},\frac{13}{9},-\frac{2}{3},0,\frac{5}{9}\right)$$，故

$$-\int \frac{(t^2-t)(t^2-t-9)(t^2-t+13)}{(t^2-t+1)^4}dt=\frac{14t^5-35t^4+30t^3-10t^2+13t-6}{9(t^2-t+1)^3}+\frac{5}{9}\int \frac{1}{t^2-t+1}dt$$

另外，由積分公式知

$$\frac{5}{9}\int\frac{1}{t^2-t+1}dt=\frac{5}{9}\int\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt=\frac{10\tan^{-1}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)}{3^{\frac{5}{2}}}+C \text{ ，}$$

故所求

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{C_n^{2n}}=\left(\frac{14t^5-35t^4+30t^3-10t^2+13t-6}{9\left(t^2-t+1\right)^3}+\frac{10\tan^{-1}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)}{3^{\frac{5}{2}}}+C\right)\Bigg|_0^1=\frac{10\sqrt{3}\pi+108}{81}$$

比較無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{C_n^{2n}}$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{C_n^{2n}}$ ，不難發現前者計算上的步驟更為繁瑣且積分的次方更高，若往下繼續探究 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{C_n^{2n}}$ ，雖可照相似的流程進行運算，但似乎不是個明智的決定，於是我有了另外的疑問：是否能夠更快速的求得一系列的無窮級數和？

二、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{C_n^{2n}}$ 的收斂函數與其推論

若考慮原問題分子的部分為與 x,n 有關的函數 $M(x,n)$，則此無窮級數可轉為

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M(x,n)}{C_n^{2n}},$$

比較簡單的想法是令 $M(x,n)$ 為連續函數，此時就可以計算相對應的收斂區間。好處是每在收斂區間內代入一個不同的 x 值，均能得到一個相對應無窮級數和，便可更有效率地得到一系列的無窮級數。

翻閱了一些微積分的參考資料後，發現冪級數 $M(x,n)=x^n$ 是一個不錯的選擇，每代入一個 x 值，能產生指數函數，與原問題多少也有關聯，於是我開始著手研究

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{C_n^{2n}}$$

的相關性質，過程中利用了遞迴概念與一階微分方程式的公式解作進一步討論。

首先觀察此冪級數的收斂性：

引理 2.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{C_n^{2n}}$ 的收斂區間為 $(-4,4)$.

證明. 由附錄一之性質 1.2 (比值審斂法)知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收斂的條件為

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}|x|<1 \Rightarrow |x|<4,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{C_n^{2n}}$ 的收斂區間為 $(-4,4)$

確認了收斂性後，我們便可以令 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{C_n^{2n}}$ 在區間 $(-4,4)$ 的收斂函數為

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{C_n^{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n,\quad a_n=\frac{1}{C_n^{2n}},\quad x\in(-4,4),$$

則對於 $f(x)$ 我們有如下的結果：

引理 2.2 $f(x)$ 滿足

$$\begin{cases} f'(x)-\dfrac{(x+2)}{x(4-x)}f(x)=\dfrac{1}{4-x}, & x\in(-4,4)\setminus\{0\} \\ f(0)=0 \end{cases}$$

證明. 觀察 a_n 滿足

$$a_n=\frac{1}{C_n^{2n}}=\frac{n!n!}{(2n)!}=\frac{(n-1)!(n-1)!}{(2n-2)!}\times\frac{n^2}{(2n-1)2n}=\frac{n}{4n-2}a_{n-1},\ n\geq 2$$

化簡得到

$$(4n-2)a_n=na_{n-1},\ n\geq 2,$$

故

$$\sum_{n=2}^{\infty}(4n-2)a_nx^n=\sum_{n=2}^{\infty}na_{n-1}x^n \tag{1}$$

另外，考慮 $f'(x)$ 滿足

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \Rightarrow xf'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n \ ,$$

故(1)的左式可化簡為

$$\sum_{n=2}^{\infty}(4n-2)a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(4n-2)a_n x^n-2a_1x=4xf'(x)-2f(x)-x$$

另外，(1)的右式為

$$\sum_{n=2}^{\infty} na_{n-1}x^n=x\sum_{n=2}^{\infty} na_{n-1}x^{n-1}=x\left(\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n\right)\right)=x\left(\frac{d}{dx}\left(x\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)\right)=x\left(xf(x)\right)'$$

代入 (1) 式中得到

$$4xf'(x)-2f(x)-x=x\left(xf(x)\right)'=x\left(f(x)+xf'(x)\right),$$

觀察 $f(0)=0$, 當 $x\neq 0$ 時，化簡後可得到一個 $f(x)$ 的一階微分方程式

$$f'(x)-\frac{(x+2)}{x(4-x)}f(x)=\frac{1}{4-x}$$

接下來的步驟便是求解 $f(x)$，也是這份研究中最重要的部分：

定理 2.1

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{(4-x)^{3}}}\left(\sqrt{x(4-x)}+4\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right),\quad x\in(-4,4)$$

證明. 當 $x\in(-4,4)\setminus\{0\}$ 時，**引理 2.3** 得到了 $f'(x)-\dfrac{(x+2)}{x(4-x)}f(x)=\dfrac{1}{4-x}$，

利用附錄一之**性質 1.4** (一階微分方程式的公式解)，令

$$P(x)=-\frac{x+2}{x(4-x)},\quad Q(x)=\frac{1}{4-x}$$

代入公式解得

$$f(x)=e^{-\int -\frac{x+2}{x(4-x)}dx}\left(C_1+\int \frac{\frac{1}{4-x}}{e^{-\int -\frac{x+2}{x(4-x)}dx}}dx\right)$$ ，C_1 為常數

觀察

$$e^{\int\frac{x+2}{x(4-x)}dx}=e^{\int\left(\frac{1}{2x}+\frac{3}{2(4-x)}\right)dx}=e^{\frac{1}{2}(\ln x)-\frac{3}{2}(\ln(4-x))}=e^{\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}},$$

故

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}\left(C_1+\int\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x}}dx\right)，C_1\text{為常數} \qquad (2)$$

利用變數變換 $u=\sqrt{x}$ 與 $u=2\sin v$ 可推得

$$\int \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \sqrt{4-u^2}du = 8\int \cos^2(v)\,dv = 2\left(2\cos(v)\sin(v)+2v\right)+C_2,$$ C_2 為常數

由於 $v=\sin^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$, $\sin v=\frac{\sqrt{x}}{2}$, $\cos v=\frac{\sqrt{4-x}}{2}$ ，故

$$\int \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{x}\sqrt{4-x}+4\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)+C_2$$ ， C_2 為常數

所以(2)式中 $f(x)$ 經常數項合併後可化簡為

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}\left(\sqrt{x}\sqrt{4-x}+4\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right)+\frac{C\sqrt{x}}{\sqrt{(4-x)^3}}，\ C\text{ 為常數}$$

由於 $f(x)$ 的收斂區間為 $(-4,4)$，可將部分根號合併後得

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{(4-x)^3}}\left(\sqrt{x(4-x)}+4\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right)+C\sqrt{\frac{x}{(4-x)^3}}，\ C\text{ 為常數}$$

觀察到與 C 相鄰的項為 $\sqrt{\dfrac{x}{(4-x)^3}}$，在 $(-4,4)$ 為一無窮可微的函數，可利用附錄一之**性質**

1.5 (泰勒級數) 的概念在 $x=0$ 展開：

$$\sqrt{\frac{x}{(4-x)^3}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{8}+\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{64}+\frac{15x^{\frac{5}{2}}}{1024}+\frac{35x^{\frac{7}{2}}}{8192}+\ldots$$

不難發現按照升冪排列後每一項的 x 次方皆不為整數之形式，但是從定義看，$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{C_n^{2n}}$

展開後每一項的 x 次方皆為整數之形式，比較後得到 $C=0$ 的結論。

最後，與 $f(0)=0$ 的結果合併後推得

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{(4-x)^3}}\left(\sqrt{x(4-x)}+4\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right),\quad x\in(-4,4)$$

引理 1.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(2n+1)\left(t-t^2\right)^n = \frac{\left(t^2-t\right)\left(t^2-t-3\right)}{\left(t^2-t+1\right)^3}$$

證明. 令 $S=\sum_{n=1}^{\infty} n(2n+1)\left(t-t^2\right)^n$ ，展開得到

$$3\left(t-t^2\right)+10\left(t-t^2\right)^2+21\left(t-t^2\right)^3+\cdots \tag{4}$$

將(4)式乘上$\left(t-t^2\right)$ ，得到

$$\left(t-t^2\right)S=3\left(t-t^2\right)^2+10\left(t-t^2\right)^3+21\left(t-t^2\right)^4+\cdots \tag{5}$$

將(4)式減去(5)式，

$$\left(1-t+t^{2}\right)S=3\left(t-t^{2}\right)+7\left(t-t^{2}\right)^{2}+11\left(t-t^{2}\right)^{3}+\cdots \qquad (6)$$

將(6)式乘上$\left(t-t^{2}\right)$，得到

$$\left(t-t^{2}\right)\left(1-t+t^{2}\right)S=3\left(t-t^{2}\right)^{2}+7\left(t-t^{2}\right)^{3}+11\left(t-t^{2}\right)^{4}+\cdots \qquad (7)$$

將(6)式減去(7)式，

$$\left(1-t+t^{2}\right)^{2}S=3\left(t-t^{2}\right)+4\left(t-t^{2}\right)^{2}+4\left(t-t^{2}\right)^{3}+4\left(t-t^{2}\right)^{4}+\cdots \qquad (8)$$

(8)式可利用無窮等比級數化簡為

$$-\left(t-t^2\right)+4\left(\left(t-t^2\right)+\left(t-t^2\right)^2+\cdots\right)=-\left(t-t^2\right)+4\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(t-t^2\right)\left(1-\left(t-t^2\right)^n\right)}{1-\left(t-t^2\right)}\right) \quad (9)$$

由於$0<t<1$，$0<\left(t-t^2\right)<1$，故 (9) 式的極限收斂，化簡為

$$-\left(t-t^2\right)+4\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(t-t^2\right)\left(1-\left(t-t^2\right)^n\right)}{1-\left(t-t^2\right)}\right)=-\left(t-t^2\right)+4\left(\frac{t-t^2}{1-t+t^2}\right) \quad (10)$$

將(10)式代回(8)式，移項得到

$$S=\frac{-\left(t-t^2\right)+4\left(\frac{t-t^2}{1-t+t^2}\right)}{\left(1-t+t^2\right)^2}=\frac{\left(t^2-t\right)\left(t^2-t-3\right)}{\left(t^2-t+1\right)^3}$$

引理 1.4

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(2n+1)\left(t-t^2\right)^n = -\frac{\left(t^2-t\right)\left(t^2-t-9\right)\left(t^2-t+13\right)}{\left(t^2-t+1\right)^4}$$

證明. 令 $S=\sum_{n=1}^{\infty} n^2(2n+1)\left(t-t^2\right)^n$，仿造**引理 1.3** 的方式利用階差化簡得到

$$\left(1-t+t^2\right)^3 S = -9\left(t-t^2\right)-\left(t-t^2\right)^2+12\left[\left(t-t^2\right)+\left(t-t^2\right)^2+\cdots\right] \tag{11}$$

將(11)式化簡為極限的形式

$$\left(1-t+t^2\right)^3 S=-9\left(t-t^2\right)-\left(t-t^2\right)^2+12\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\left(t-t^2\right)\left[1-\left(t-t^2\right)^n\right]}{1-\left(t-t^2\right)}\right\} \tag{12}$$

由於$0<t<1$，$0<\left(t-t^2\right)<1$，故(12)式的極限收斂，移項得到

$$S=\frac{-9\left(t-t^2\right)-\left(t-t^2\right)^2+\dfrac{12\left(t-t^2\right)}{1-\left(t-t^2\right)}}{\left(1-t+t^2\right)^3}=-\frac{\left(t^2-t\right)\left(t^2-t-9\right)\left(t^2-t+13\right)}{\left(t^2-t+1\right)^4}$$

Thank you for listening!

附錄三

僅將本文所得到的結果做一個整理：

無窮級數	收斂值(函數)	近似值 (小數點後第四位)
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{C_n^{2n}}$	$\frac{2\sqrt{3}\pi+18}{27}$	1.0697
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{C_n^{2n}}$	$\frac{108+10\sqrt{3}\pi}{81}$	2.0051
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{C_n^{2n}}=f(x)$	$\sqrt{\frac{x}{(4-x)^3}}\left(\sqrt{x(4-x)}+4\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right)$	收斂範圍 $x\in(-4,4)$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{C_n^{2n}}$	$\frac{9+2\sqrt{3}\pi}{27}$	0.7364
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{C_n^{2n}}$	$\frac{2+\pi}{2}$	2.5708
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{C_n^{2n}}$	$\frac{9+4\sqrt{3}\pi}{3}$	10.2552
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{C_n^{2n}}$	$\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(1+\frac{\pi}{3}\right)$	0.1470

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n}{C_n^{2n}}$	$\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(1+\frac{5}{3}\pi\right)$	86.8561
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^n}{C_n^{2n}}$	$\left(\frac{3\sqrt{2}-4}{2}\right)\left(\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}\right)$	0.3621
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^n}{C_n^{2n}}$	$\left(\frac{3\sqrt{2}+4}{2}\right)\left(\sqrt{2}+\frac{3\pi}{2}\right)$	25.2497
$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{C_{2k}^{n}2^{n-2k-1}\cdot 3^k}{C_n^{2n}}$	$7+\left(7+\frac{8}{\sqrt{3}}\right)\pi$	43.5015
$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{C_{2k+1}^{n}2^{n-2k-2}\cdot 3^{\frac{2k+1}{2}}}{C_n^{2n}}$	$4\sqrt{3}+\left(\frac{14}{3}+4\sqrt{3}\right)\pi$	43.3546
$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{C_{2k}^{n}2^{n-k-1}}{C_n^{2n}}$	$3+\left(1+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\pi$	12.8059
$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{C_{2k+1}^{n}2^{n-k-\frac{3}{2}}}{C_n^{2n}}$	$2\sqrt{2}+\left(2+\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)\pi$	12.4438
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{C_n^{2n}}$	$\frac{-1}{5}+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$	−0.3721
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{C_n^{2n}}$	$-\frac{1}{3}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\ln\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$	−0.5868
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{C_n^{2n}}$	$-\frac{3}{7}+\frac{4\sqrt{3}}{7\sqrt{7}}\ln\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)$	−0.7216

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{C_{2n}^{4n}}$	$\frac{1}{15}+\frac{\sqrt{3}\pi}{27}+\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$	0.1821
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{C_{2n-1}^{4n-2}}$	$\frac{4}{15}+\frac{\sqrt{3}\pi}{27}-\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$	0.5543
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{C_{2n}^{4n}}$	$\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\ln\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$	0.9920
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{C_{2n-1}^{4n-2}}$	$\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\ln\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$	1.5788
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{C_{2n-1}^{4n-2}}$	$\frac{9}{7}+\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{7\sqrt{7}}\ln\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)$	4.7668
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n-1}}{C_{2n-1}^{4n-2}}$	$\frac{12}{7}+\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{7\sqrt{7}}\ln\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)$	5.4884
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{C_{n}^{2n}}=f'(x)$	$\begin{cases}\dfrac{6\sqrt{x(4-x)}+4(2+x)\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{(4-x)^2\sqrt{x(4-x)}} \\ 0, \quad x=0\end{cases}$	收斂範圍 $x\in(-4,4)$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^{n-1}}{C_{n}^{2n}}$	$\frac{3+\pi}{2}$	3.0708
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n}}{C_{n}^{2n}}$	$18+\frac{20\pi}{\sqrt{3}}$	54.2760

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{C_n^{2n}}$	$\frac{-6}{25}+\frac{4}{25\sqrt{5}}\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$	-0.2744
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n}{C_n^{2n}}$	$-\frac{1}{3}$	-0.3333
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n n}{C_n^{2n}}$	$\frac{-18}{49}-\frac{12}{49\sqrt{21}}\ln\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)$	-0.3255
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{C_{2n}^{4n}}$	$\frac{16}{75}+\frac{\sqrt{3}\pi}{27}+\frac{1}{50\sqrt{5}}\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)$	0.3977
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{C_{2n-1}^{4n-2}}$	$\frac{34}{75}+\frac{\sqrt{3}\pi}{27}-\frac{1}{50\sqrt{5}}\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)$	0.6721
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 2^{2n}}{C_{2n}^{4n}}$	$\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}$	2.9041
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 2^{2n-1}}{C_{2n-1}^{4n-2}}$	$\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}$	3.2374
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 3^{2n}}{C_{2n-1}^{4n-2}}$	$\frac{432}{49}+\frac{10\pi}{\sqrt{3}}-\frac{2\sqrt{3}}{49\sqrt{7}}\ln\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)$	26.9753
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 3^{2n-1}}{C_{2n-1}^{4n-2}}$	$\frac{10\pi}{\sqrt{3}}+\frac{2}{343}\left(1575+\sqrt{21}\ln\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)\right)$	27.3007

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{C_n^{2n}}$	$\frac{2\left(135\sqrt{3}+37\pi\right)}{81\sqrt{3}}$	4.9904
$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k(n-k)C_k^n}{C_n^{2n}}$	$\frac{16+5\pi}{4}$	7.9267
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{C_n}$	$\frac{27+2\sqrt{3}\pi}{27}$	1.4031
$C(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{C_n}$	$\begin{cases}\frac{6\sqrt{x(4-x)}+4(x+2)\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{(4-x)^2\sqrt{x(4-x)}} \\ 0, \quad x=0\end{cases}$	收斂範圍 $x\in(-4,4)$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{C_{2n}}$	$\frac{7}{25}+\frac{\sqrt{3}\pi}{27}+\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+\frac{1}{50\sqrt{5}}\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)$	0.3782
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{C_{2n-1}}$	$\frac{18}{25}+\frac{\sqrt{3}\pi}{27}-\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)-\frac{1}{50\sqrt{5}}\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)$	1.0248
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{C_n^{2n}}$	$\frac{32}{3}+\frac{238\pi}{81\sqrt{3}}$	15.9961