第九組
2020年台灣國際科展

411031116楊子毅 411031117劉秉翰

411031118張銓敏 411031119陳柏諺

411031121戴士宬 411031138曾國恩

四角垛彩球遊戲研究

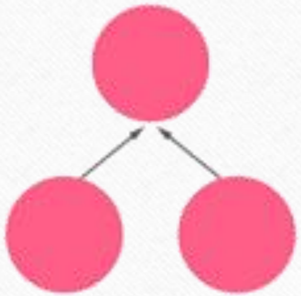
四等獎

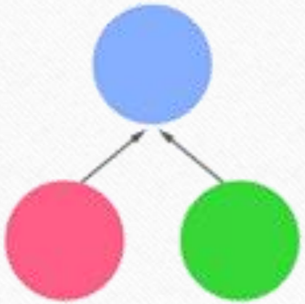
四角垛、同餘、矩陣方程

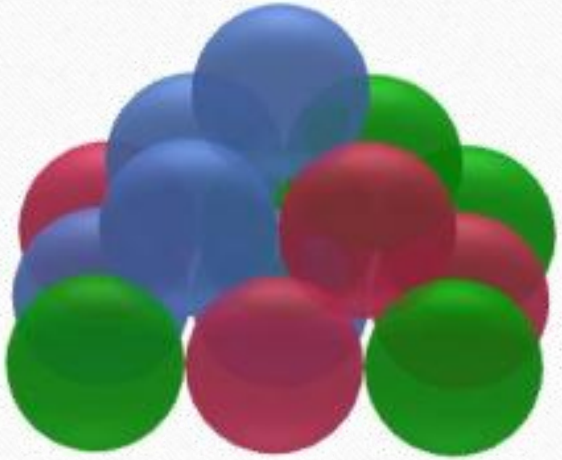
研究動機

曾在專題課討論到「數學傳播」中的一篇文章，引起了我們的興趣，文章內容為「先將 紅、藍、綠三種顏色的彩球共 n 顆排成第一列並將其稱為『題目』，接下來重複在第 k 列上方 擺放第 k +1 列，使第 k +1 列的每顆球皆位於第 k 列相鄰兩球的正上方，且第 k +1 列擺放規則 為若下方相鄰兩球同色，則上方擺放相同顏色的球；反之，則擺放第三種顏色的球。」如圖（一）、(二)，依此規則擺放彩球直到第 n 列只剩一顆球，將此球的顏色稱為「解」。我們將擺 放方式變為四角垛，如圖(三)，並且自訂遊戲規則作為本文研究的題目。

研究動機


圖(一)


圖(二)


圖(三)

研究目的

一. 給定最底層所有彩球之球色，求出最頂層彩球之球色。
二. 給定最底層所有彩球之球色，求出最快得知最頂層彩球之球色的方法。
三. 找出判斷「給定四角垛哪些位置彩球的顏色後，便可推得四角垛每顆彩球 的顏色」的方法。
四. 找出至少需給定幾顆彩球的顏色，便有擺放策略，而推得四角垛每顆彩球 的顏色。
五. 找出最底層至少需給定幾顆彩球的顏色，便有擺放策略，而推得四角垛每 顆彩球的顏色。

剛性三角形的進一步探討

四等獎

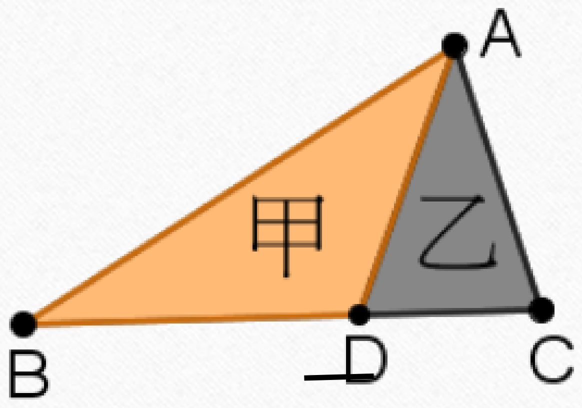
共軛擺放、軟Δ、硬Δ

研究動機

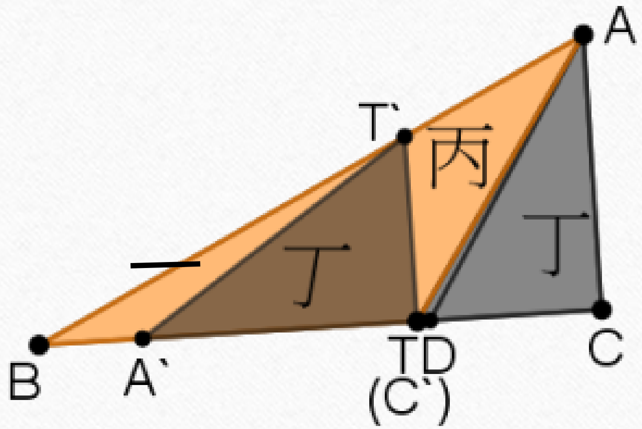
整天天馬行空愛亂想的小妘，有一天忽然問學姊小妏說:「自然界的水有分為軟水和硬水，那幾何世界裡的△，有沒有甚麼依據可將他們區分為軟△和硬△呢?」一臉錯愕的學姊想起△有剛性現象，直覺地認為不可能。笑嘻嘻的小妘又說:「之前看過新聞說蛇餓時會吃自己尾巴，那牠可以把自己吃掉嗎?如果以分角線$\overline{AD}$，如圖(0-1)為基準，雖然右邊乙區可以塞入左邊甲區中，這不足為奇，但如果此時仍存在一條在甲區中的塞瓦線$\overline{AT}$，如圖(0-2)，使變大的丁區仍可塞入變小的丙區中，我們就稱這△為軟△。」

狐疑的學姐說這要每一個內角都試一試才行，蛇真的可以吃了自己嗎?

研究動機



圖(0-1)



圖(0-2)

研究目的

一. 針對是否能多切一點點的那條塞瓦線來說，探討，如圖(0-2)，丁區塞入丙區時，丁區 相對於丙區的擺放方式種類。

二. 針對每一種擺放方式，利用幾何性質探討塞入是否能成功或必失敗。

三. 在能成功塞入的擺放方式中，對不同的∠A 角度建立最大∠B 和∠A 關係式。

四. 針對∠B 的容許範圍，建立最大∠B 的曲線 L 和最小∠B 的曲線 L‘ 。

五. 任給△的三內角，建立一套判斷是軟△或是硬△屬性的簡易流程圖。

平面封閉折線上構造多邊形之有向面積定值

四等獎

測量師公式、跳點、面積定值

研究動機

2015 年，有篇全國科展數學作品〈內外有致－類拿破崙多邊形性質及其有向面積定值〉，主要探討給定封閉凸、凹多邊形，內外交錯（或外內交錯）依序將頂點而構成新的封閉多邊形，他們主要研究新多邊形與原始多邊形的定量關係。

當時全國科展比賽評審教授給予的評語是「未來可考慮取 mod r,看是否能走出此類研究的新路」。我們蒐尋之後的歷屆科展比賽資料，結果發現這幾年來並沒有人針對「mod r」進行推廣研究，於是我們好奇詢問指導老師此研究沒有被人繼續探討的原因。指導老師告訴我們「mod r」的跳點多邊形難度很高且分類就有r種，要進行一般化推廣非常困難。

這個具有挑戰性的研究議題激發了我們想要一探究竟並完整解決這個問題的決心，因此，我們設定了新的條件——mod r,而展開以下研究工作。

研究目的

一. 探究重心多邊形的幾何性質。

二. 一般化：重心多邊形與原始多邊形的有向面積定值關係式。

三. 一般化：平行四邊形構造下的跳點多邊形與原始多邊形的有向面積定值關係式。

四. 一般化：箏形構造下的跳點多邊形與原始多邊形的有向面積定值關係式。

布洛卡點相關性質探討

四等獎

布洛卡點、布洛卡多邊形、紐伯格圓

研究動機

我發現布洛卡點的文獻皆只提及布洛卡點在三角形中的情形，並且文獻中的垂線、圓心、投影布洛卡三角形的性質皆僅止於相似與共布洛卡點關係，所以我好奇：若是將三角形推廣至四邊形、甚至多邊形，會有甚麼結果？而垂線、圓心、投影布洛卡三角形又有哪些幾何性質還未被發現呢？除此之外，文獻中布洛卡三角形的一頂點在紐伯格圓上環繞的動畫也讓我感興趣，於是我嘗試將其推廣至多邊形進行探討。

研究目的

一. 探討一般 n 邊形在存在布洛卡點的情形、並探討特例。

二. 將垂線、圓心、投影布洛卡三角形一般化推廣，並推廣至 n 邊形、探討其布洛卡點、外心(外接圓圓心)、頂點連線段等之間的幾何性質。

三. 探討布洛卡三角形的紐伯格圓推廣至布洛卡多邊形的情形。

四. 探討布洛卡多邊形的尺規作圖法。

五. 探討布洛卡多邊形在投影變換下的性質。

二元 3 平衡 n 字串之排列數探討

三等獎

字串、階差數列、排列組合

研究動機

在 100 學年度全國高中數學能力競賽的題目中，有一道題目內容如下：「由 0, 1 排成長度 n 的字串，稱為二元 n 字串。若一個二元 n 字串中出現字串 00 和字串 11 的個數一樣多，則稱為長度 n 的二元平衡字串。若以 an 表示長度 n 的二元平衡字串之個數，已知 $a_1 = a_2 = a_3 = 2$, $a_4 = 4$, $a_5 = 6$，試求 an 的一般公式。」但題目給出的解法卻是特例解，只有在 00-子字串, 11-子字串平衡的狀況下才適用，因此我們便想要改變作法，試圖用一個一般化的解法來處理這個問題。此外，我們也想將此問題拓展，討論在 000-子字串,111-子字串平衡時，n 位數列排列之符合個數是否也有一般解，也就是二元 3 平衡 n 字串個數是否有一般式。因此，我們便展開了一段有趣的數學研究之旅。

研究目的

一. 原題目之非特例解。

二. 二元 3 平衡 n 字串之關係式探討。

三. 二元 r 平衡 n 字串在滿足字串中無連續 r 個 0 或連續 r 個 1 時之個數遞迴式探討。

四. 二元 3 非平衡 n 字串之關係式探討。

五. 觀察二元 3 非平衡 n 字串在改變 000-子字串及 111-子字串之差值或字串之長度時，符合個數彼此間有何性質存在？

研究目的

六. 階差數列中各階階差首項值之求解過程與性質。

七. 將第五點推廣至二元 r 非平衡 n 字串。

八. 二元平衡 n 字串、二元 3 平衡 n 字串之 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{(n,i,0)}}{S_{(n-1,i,0)}}$ (i = 2, 3) 探討，其中$S_{(n,i,0)}$代表長度為n的字串中滿足i-0-子字串(連續i個 0所形成的子字串)與i-1-子字串(連續i個 1所形成的子字串)數目相同的個數。

渾「圓」有「定」

從七圓定理到雙心六圓的性質探討與推廣

三等獎

七圓定理、雙心六圓、極點極線

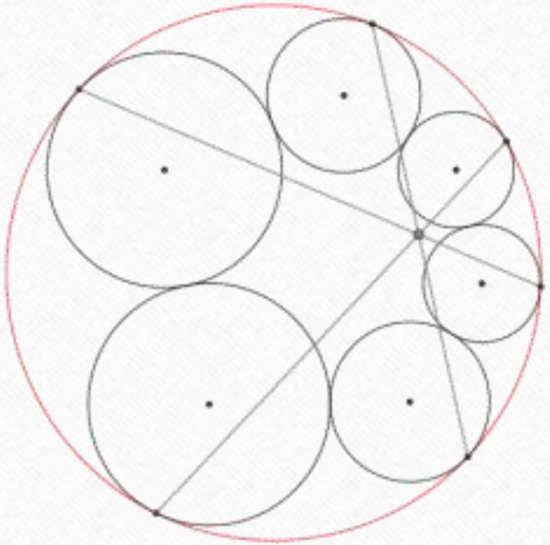
研究動機

在閱讀有關反演變換的文獻時，意外發現一個有趣、形似湯圓的圖形：在一個大碗中放入六顆湯圓。兩兩均內切的六個小圓，若其兩相鄰均外切，則其對應內切點連線共點，這就是「七圓定理」；雖名為「七圓」，關鍵卻在於其中的「六圓」，如下圖。

文獻上除了以不同樣貌出現外，如何尺規作圖？除了諸線共點的性質外，我們亦發現諸點共線、諸點共圓等特性。如果不是六個小圓而是更少圓，甚至更多圓呢？又或同時內外切於兩個內離圓，甚至同時外切於兩個外離圓的情形呢？於是展開本研究。

研究動機

聯想



研究目的

本研究試圖從七圓定理的性質探討與推廣，進而研究雙心六圓，以至多圓時的作圖關係式及共點、共線、共圓、共錐的不變性與對偶性探討，研究問題如下：內接正四邊形有無限多個嗎？

一. 探討七圓定理的性質與多圓的推廣。

二. 探討雙心六圓的作圖關係式與性質。

三. 以雙心六圓的結果探討雙心多圓的性質。

四. 試研究雙心多圓在兩外離圓及圓與直線的性質。

五. 七圓定理及雙心多圓在球面及球體上的推廣。

正三角形的最小拼接

三等獎

正三角形、鑲嵌、正整數解

研究動機

在高一的數學課堂中，老師提出上述問題作為我們專題研究的參考題材：「給邊長分別為7、5、3 的三種正三角形，如何使用這三種正三角形拼出另一正三角形，使其邊長達到最小？」我們對此問題甚感興趣，除了找出此問題的解外，也嘗試把「7、5、3」轉換成「a、b、c 三數兩兩互質」作為研究題目，投稿中學生網站小論文《‘try angle’ 組合的奧妙》。在此篇小論文的文章中，我們有了一些研究結果，節錄如下：

研究動機

若邊長分別為 a 、b 、c 三數兩兩互質的正三角形且 $a>b>c$ ，利用規則與不規則排列的拼法：

若 $\frac{a}{b}-\left[\frac{a}{b}\right]>1-\frac{a-b}{bc}$ ，則最小邊長為 $\min\left\{\left(\left[\frac{a}{b}\right]+1\right)bc+b, bc+az\right\}$ ，其中 $z\in\mathbb{N}$ 且滿足方程式 $bx+cy=az$ 有正整數解的最小正整數。

在研究過程中，我們曾嘗試用 python 撰寫程式後，發現最小邊長皆為bc+az，但卻未能找到數學方法證明，於是我們著手處理此問題。並希望能將a、b、c轉換為任意三種正整數邊長的正三角形，且推得此三數所能拼出之最小正三角形的一般化結論。

研究目的

一. 使用兩種不同邊長的正三角形拼出另一正三角形，使其邊長達到最小。
二. 使用三種邊長兩兩互質的正三角形，利用特定拼法拼出另一正三角形，使其邊長達到最小。
三. 使用三種邊長互質的正三角形，利用特定拼法拼出另一正三角形，使其邊長達到最小。
四. 使用三種任意正整數邊長的正三角形，利用特定拼法拼出另一正三角形，使其邊長達到最小。

超立方體最小控制集建構方式的探討

二等獎

超立方體、最小控制集、同構

研究動機

過去對超立方體最小控制集的研究，1990年文獻證明$\forall k \in N, n=2^k-1$，有$\gamma(Q_n)=2^{n-k}$；1998年文獻證明$\gamma(Q_5)=7$, $\gamma(Q_6)=12$；2008年文獻則提出$\gamma(Q_n)$的猜想：$\forall\ 2^{p-1}-1 < n < 2^p-1$, $\gamma(Q_n) = 2^{n-p+1} - [2^{2n-p-2^p+1}]$

起初我們希望透過研究控制點的排列方式，觀察是否對證明此猜想有所幫助，而在撰寫程式得出超立方體Q_5中的每一種最小控制集排列時，發現每一種解之間似乎均同構(isomorphic)，且Q_6的最小控制集中似乎也有相同規律。因此我們希望能在知道$\gamma(Q_n)$的各個超立方體中找出其一般化的建構模式，並探討是否存在著同構的現象。

研究目的

一. 探討Q_1、Q_2、Q_3、Q_4最小控制集的建構模式與同構現象

二. 提出$\gamma(Q_5)=7$更簡單的證明，並探討Q_5最小控制集的建構模式與同構現象

三. 提出$\gamma(Q_6)=12$更簡單的證明，並探討Q_6最小控制集的建構模式與同構現象

四. 證明$\gamma(Q_8)=32$，並探討Q_7、Q_8最小控制集的建構模式與同構現象

改良式廣度優先網路爬蟲演算法之組合分析

一等獎、青少年科學獎

k-錯排、遍歷、網路爬蟲

研究動機

我們注意到分散網路爬蟲的運作方式與錯排問題有些關連。當我們利用電腦幫助我們進行錯排模擬時，我們發現排列後有一些循環組結構。例如：數字1, 2, 3, 4, 5進行排列時，1對應到2，2對應到3，3對應到1，4對應到5，5對應到4，這樣就形成兩個循環組，我們以(1 2 3)(4 5)表示。當我們尋找有關錯排列的相關文獻，發現已經有人針對一般錯排列的個數及循環組數進行研究[1,2]。後來我們找到文獻[13]提及2-錯排的遞迴關係式，引起我的好奇心。但在文獻中僅有列出遞迴關係式的結果，而無提到證明過程。

研究動機

為想了解此問題，所以寄了一些email請教相關文獻作者，終於等到美國密蘇里州立大學Reid L.教授的回覆(personal communication, June 03, 2019)，得知其推導過程。我因而產生興趣嘗試推導k-錯排的遞迴關係式(k≥3)，之後對於k-錯排問題多次向Reid L.教授請教，也對於文獻[13]中提出的開放問題進行研究。

研究目的

一. 探討k-錯排相關性質。

1. 推導 $\left|D_{(k,n)}\right|$的遞迴關係式。
2. 推導於 k-錯排下循環組數的遞迴關係式。
3. 提出 k-錯排演算法。
4. k-錯排數值分析。
5. 文獻開放問題：$\left|D_{(k,n)}\right| \equiv 0 \pmod{k}$。

研究目的

二. 分析網路爬蟲最佳化問題。

1. 分析網路爬蟲的遍歷行為。
2. 提出網路爬蟲最佳爬行疆域。
3. 如何改良分散式網路爬蟲？

正n邊形內接正四邊形之探討

三等獎

正n邊形、內接正四邊形、尺規作圖

研究動機

在閱讀第 54 屆全國中小學科學展覽歷屆作品時，看到在一個正 n 邊形的三個不同邊上可以內接無限多個正三角形，因此好奇：是否在正 n 邊形內也都能接出正四邊形？是否也有無限多個內接正四邊形？因此開始進行研究和探討。

研究目的

一. 首先利用電腦繪圖觀察是否所有的正 n 邊形都存在內接正四邊形，再嘗試以數學式證明之。

二. 內接正四邊形有無限多個嗎？

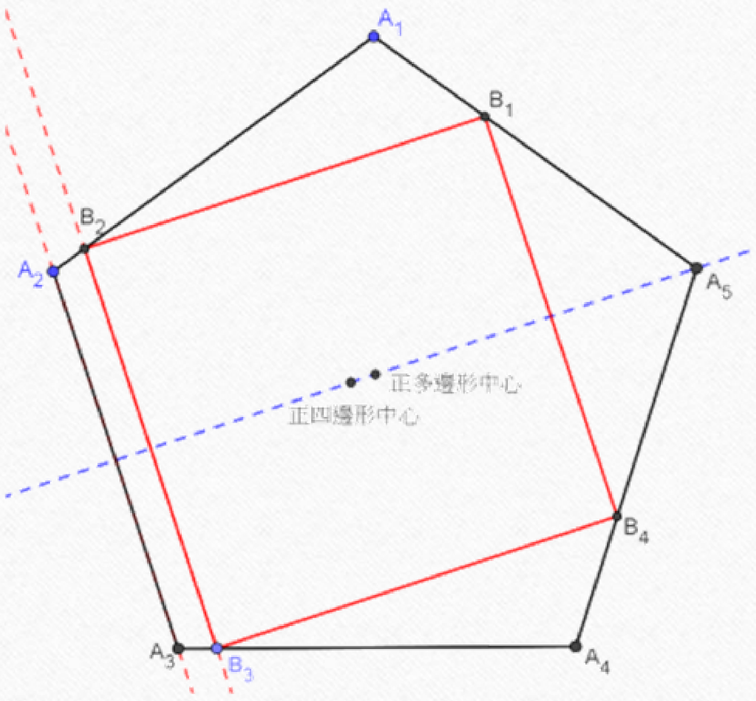
三. 內接正四邊形是否和正 n 邊形有關聯性。

四. 找一個尺規作圖法畫出所有正 n 邊形的內接正四邊形。

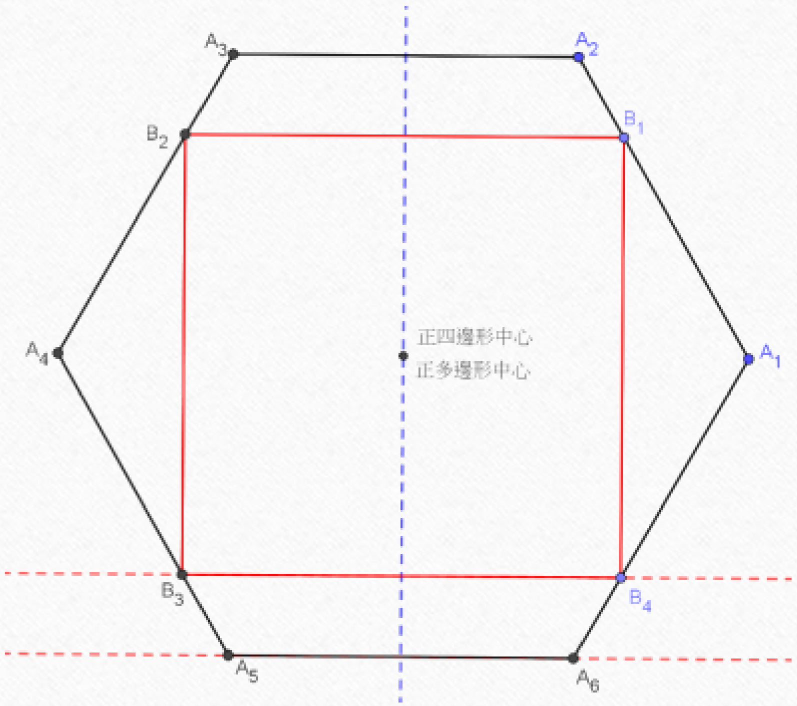
定義

- 探討之正 n 邊形之 n 個頂點命名為 A1、A2、A3、…、An，其內接正四邊形之 4 個頂點命名為 B1、B2、B3、B4。
- 分項討論正 n 邊形依邊長數分為 n= 4k、4k+1、4k+2、4k+3，k 是正整數。

討論正n邊形

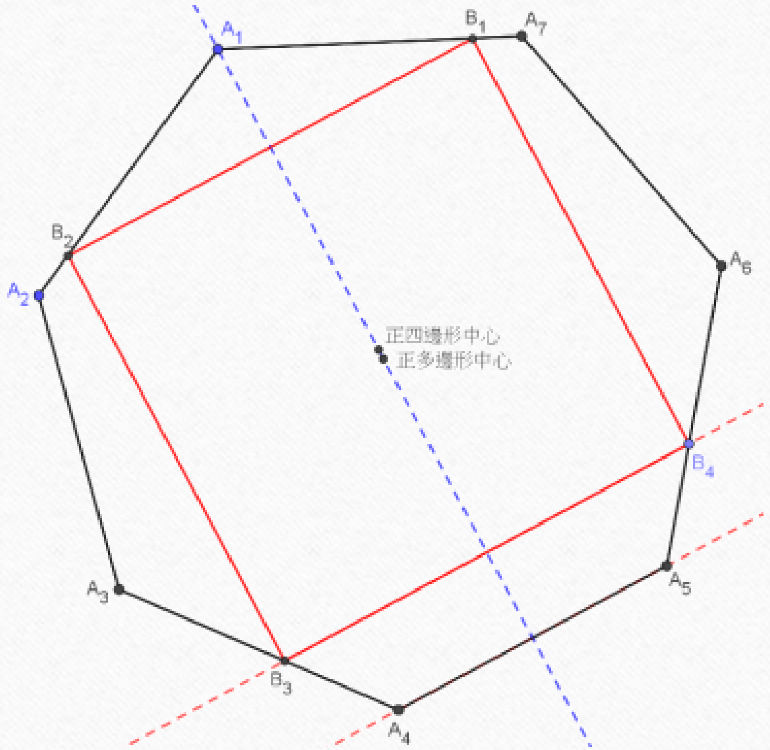


A_1
B_1
B_2
A_2
A_5
正多邊形中心
正四邊形中心
B_4
A_3
B_3
A_4

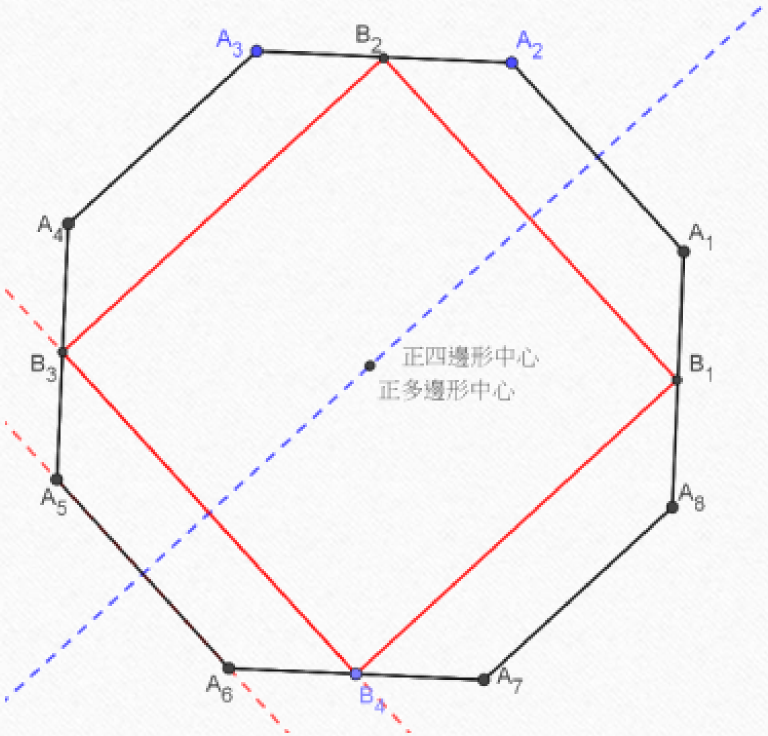


A_3
A_2
B_2
B_1
A_4
正四邊形中心
正多邊形中心
A_1
B_3
B_4
A_5
A_6

討論正n邊形

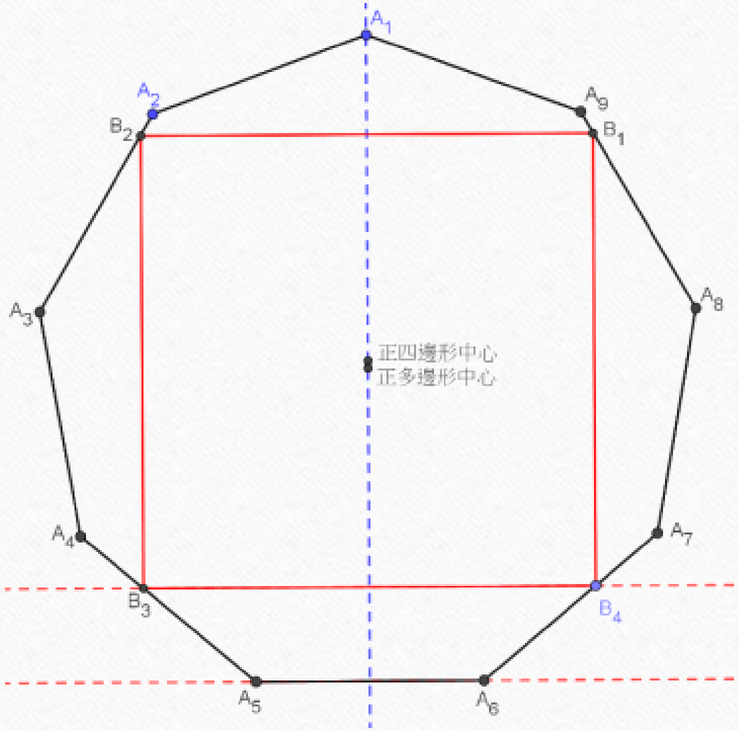


A1
B1
A7
B2
A2
A6
正四邊形中心
正多邊形中心
B4
A3
A5
B3
A4

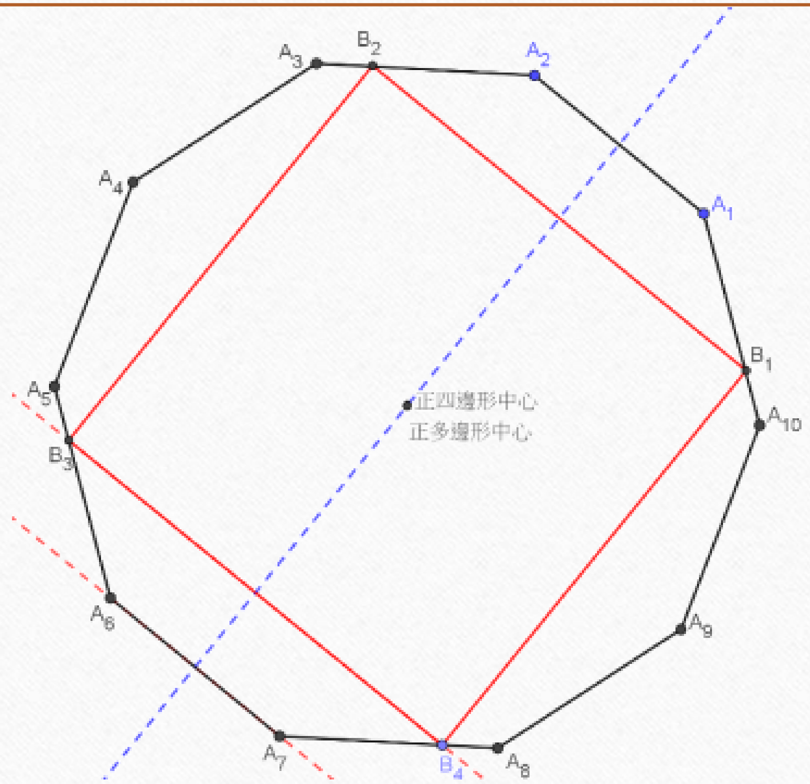


A3
B2
A2
A4
A1
B3
正四邊形中心
正多邊形中心
B1
A5
A8
A6
B4
A7

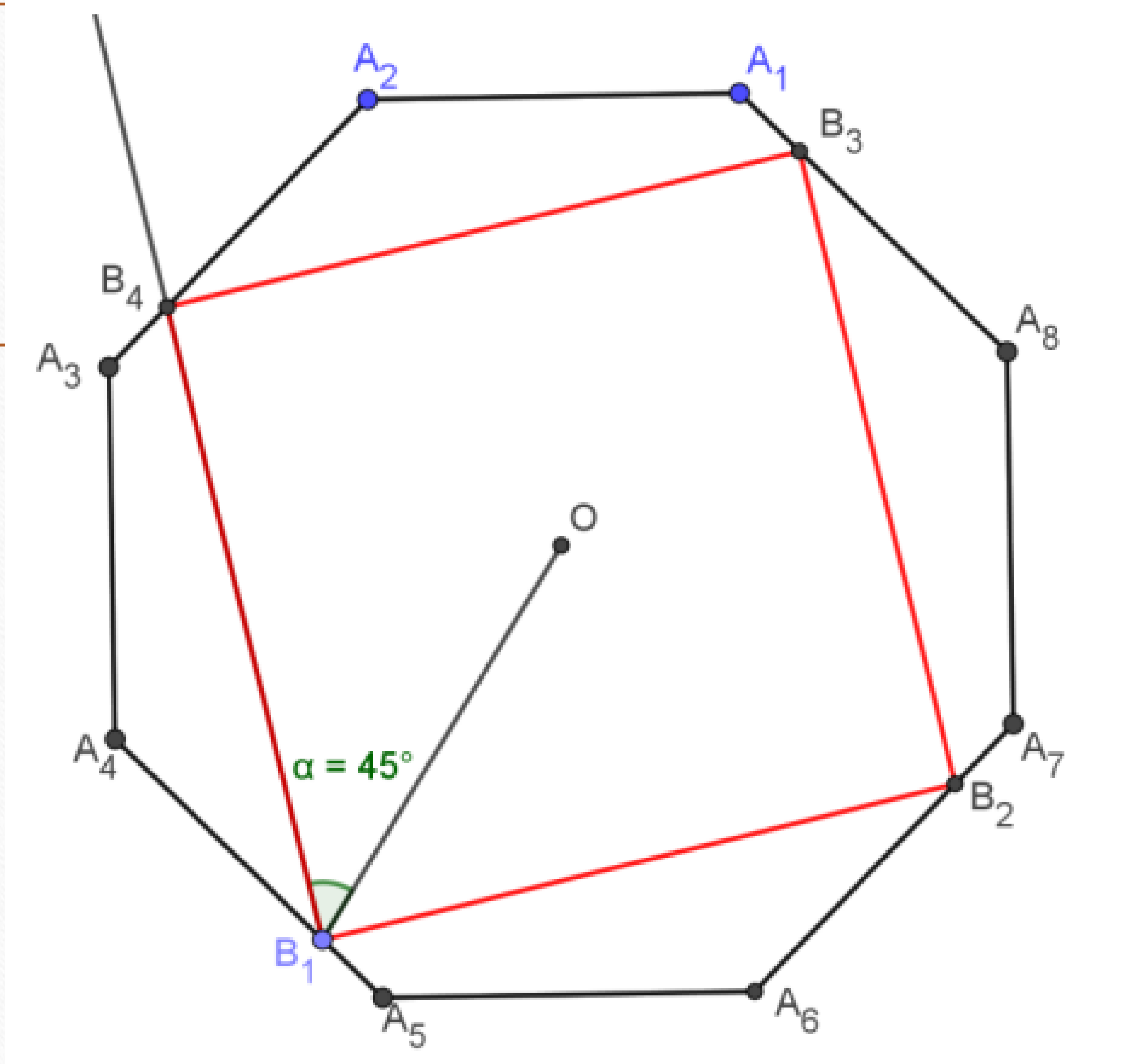
討論正n邊形

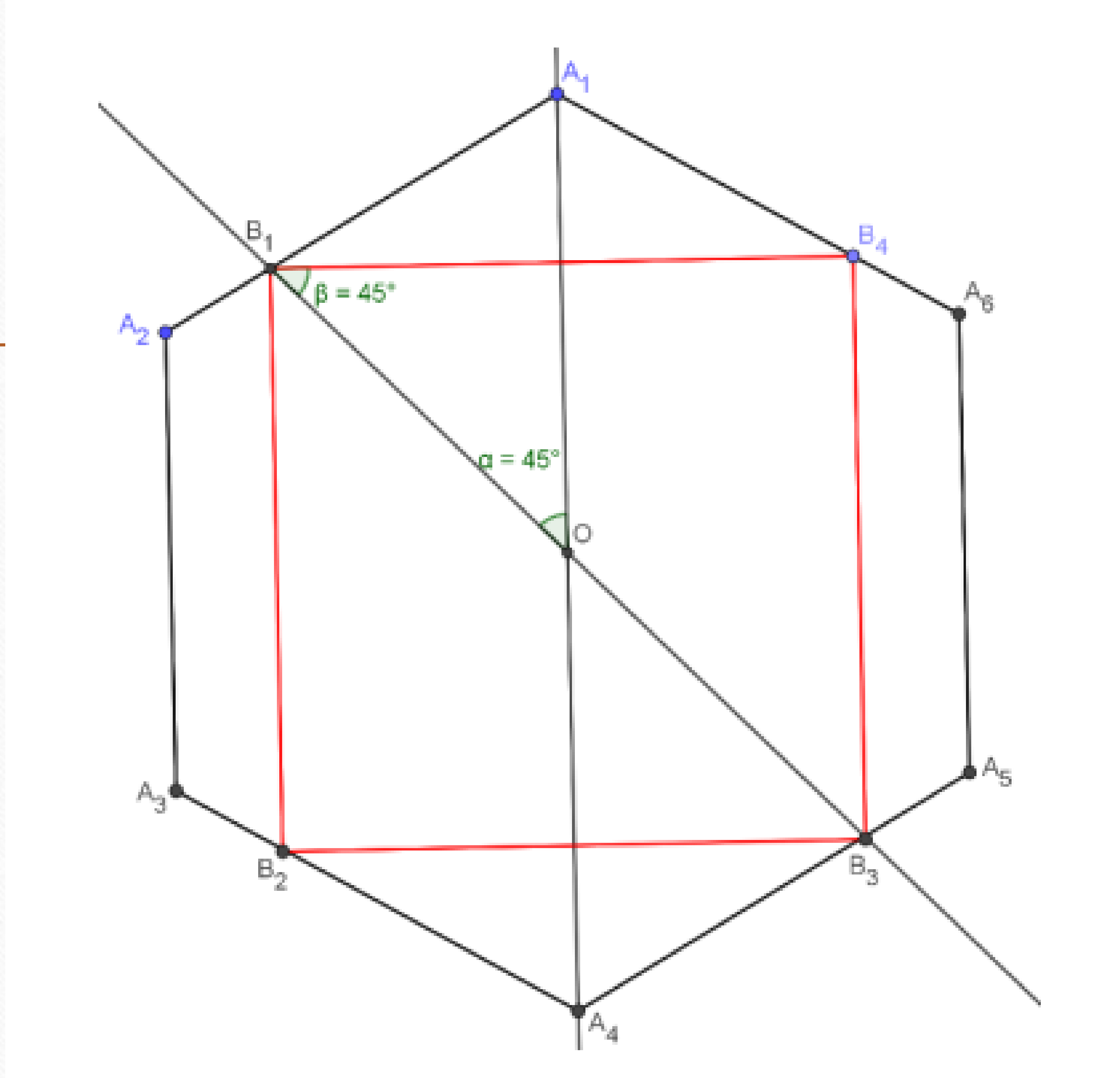


A1
A2
B2
A9
B1
A3
A8
正四邊形中心
正多邊形中心
A4
A7
B3
B4
A5
A6



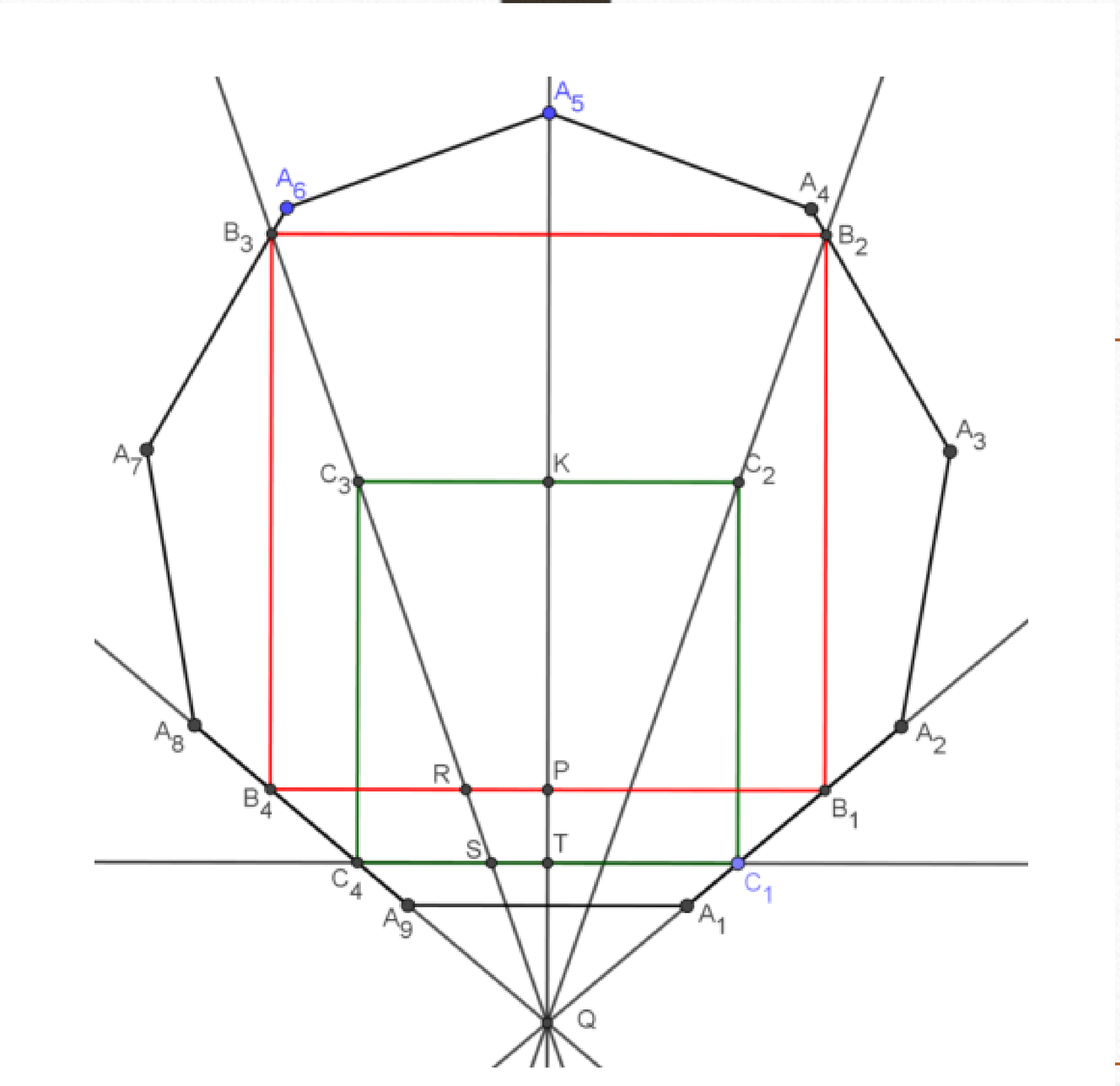
A3
B2
A2
A4
A1
B1
A5
A10
正四邊形中心
正多邊形中心
B3
A6
A9
A7
B4
A8


A2
A1
B3
B4
A3
A8
O
A4
α = 45°
A7
B2
B1
A5
A6



A1
B1
B4
A6
A2
β = 45°
α = 45°
O
A3
A5
B2
B3
A4

平行法 4K+3）



結論

	4k	4k+1	4k+2	4k+3
有無內接正四邊形	有	有	有	有
有無與正 n 邊形共中心	有	無	有	無
有無與正 n 邊形共對稱軸	有	有	有	有
非全等內接正四邊形的個數	無限多個	1 個	1 個	1 個

謝謝觀賞