2012 APMO

第一組

01

翻譯 分析

Translation And Analysis

第一題

令 P為 ΔABC內部的一點，令 D、E、F 為 $\overline{AP}$ 與邊 $\overline{BC}$、 $\overline{BP}$ 與邊 $\overline{CA}$ 以及線 $\overline{CP}$ 和邊 $\overline{AB}$ 相交的點。如果 ΔPFA、ΔPDB 和 ΔPEC的面積均為 1，則證明 ΔABC的面積必為 6。

幾何

第二題

在 2012 x 2012 方格的每個網格中，輸入一個大於等於 0或小於等於 1的實數。 思考通過繪製一條平行於網格水平邊或垂直邊的線，將方格分成 2 個由網格框組成的非空矩形。 假設對於至少一個生成矩形，無論網格如何分割，矩形網格中的數字之和都小於或等於 1。 算出方格中所有 2012 x 2012個數字總和的最大值。

代數

第三題

證明質數 p 和正整數 n 的所有 (p, n)滿足 $\frac{n^p+1}{p^n+1}$ 為整數。

代數

第四題

令 ΔABC為一銳角三角形。 以D表示從 A 點到邊 $\overline{BC}$ 的垂線的垂足，M 表示 $\overline{BC}$ 的中點，H 表示ΔABC 的垂心。設 E 為ΔABC 的外接圓 Γ 與$\overline{MH}$ 的交點，F 為 $\overline{ED}$ 與圓 Γ 的交點（E 除外）。

證明$\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$成立。

用 XY 表示線段 $\overline{XY}$ 的長度。

幾何

第五題

設n為大於或等於2的整數。證明若實數$a_1,a_2,\ldots,a_n$滿足$a_1{}^2+a_2{}^2+\ldots\ldots+a_n{}^2=n$，則

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{n-a_ia_j}\leq\frac{n}{2}\text{ 成立}$$

代數

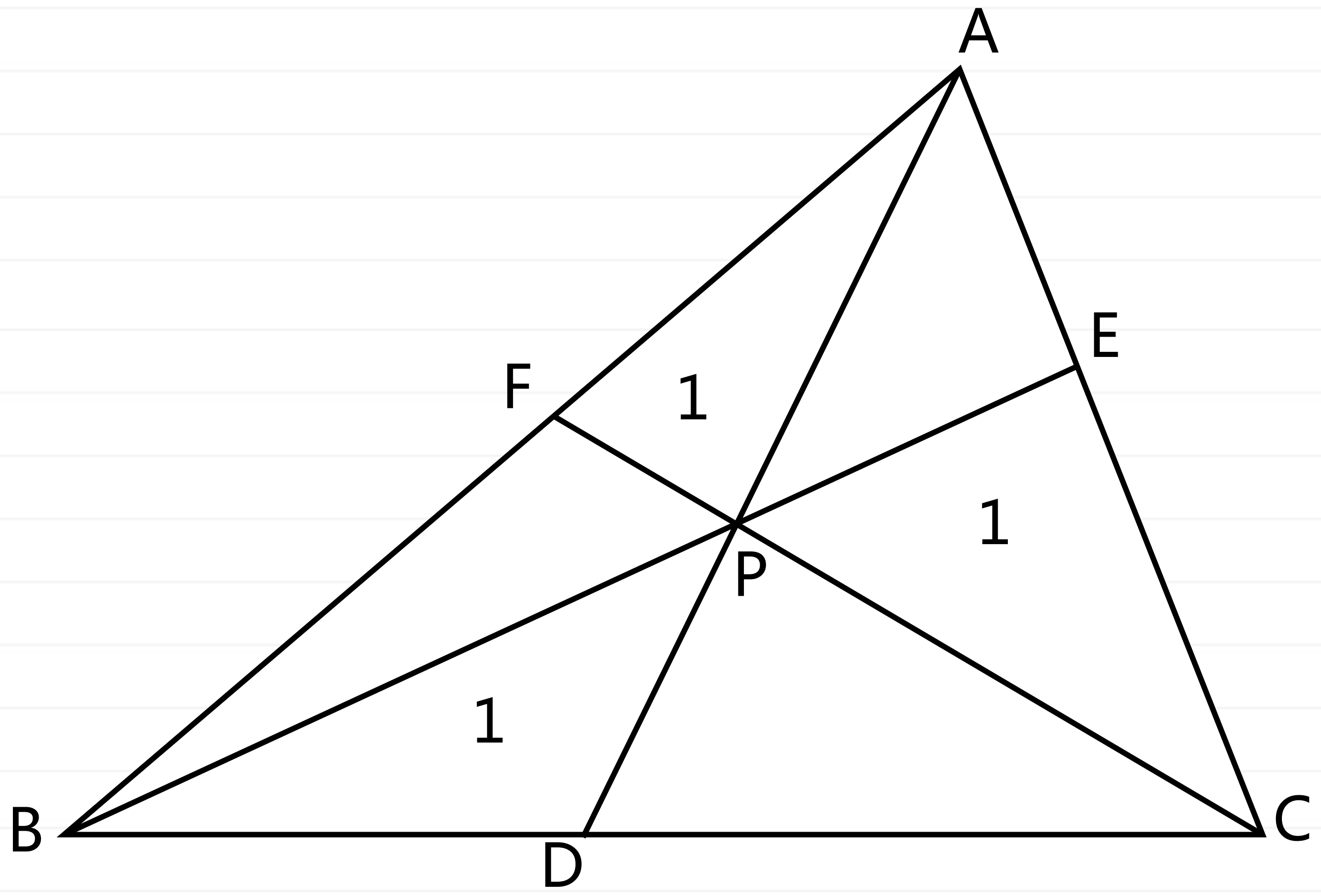
02

講解

Explain

第一題

令 P為 ΔABC內部的一點，令 D、E、F 為 $\overline{AP}$ 與邊 $\overline{BC}$、 $\overline{BP}$ 與邊 $\overline{CA}$ 以及線 $\overline{CP}$ 和邊 $\overline{AB}$ 相交的點。如果 ΔPFA、ΔPDB 和 ΔPEC的面積均為 1，則證明 ΔABC的面積必為 6。


A
E
F
1
1
P
1
B
D
C

令$x = \Delta PAB$，$y = \Delta PBC$ 和 $z = \Delta PCA$。

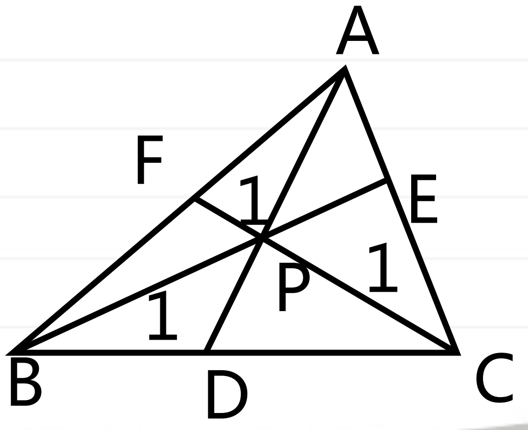
從$y : z = \Delta BCP : \Delta ACP = \overline{AF} : \overline{BF} = \Delta BPF : \Delta APF$

$= (x - 1) : 1$

可得 $z(x - 1) = y$， $(z + 1)x = x + y + z$。

同理可得$(x+ 1)y = x+y +z$ 和 $(y + 1)z = x+y +z$。

因此，我們得到 $(x+ 1)y = (y + 1)z =(z + 1)x$。



若一P點在三角型內部，分別為以下十個點，則ΔAPB:ΔBPC:ΔCPA 的比為何?

(1)外心
(2)重心
(3)內心
(4)垂心
(5)九點圓
(6)布洛卡兒點
(7)費馬點
(8)熱爾崗點
(9)奈格爾點
(10)圓心斯俾克點

我們將這十個銳角三角形內的特殊點分割三角形的面積比作個總表以方便我們運用

Z	$a\Delta ZBC : a\Delta ZCA : a\Delta ZAB$
重心 G	$1:1:1$
內心 I	$a:b:c$
外心 O	$a\cos A : b\cos B : c\cos C$
垂心 H	$a\sec A : b\sec B : c\sec C$
九點圓圓心 N	外心+垂心
布洛卡兒點 P	$\dfrac{1}{b^2}:\dfrac{1}{c^2}:\dfrac{1}{a^2}$
費馬點 Q	$a\csc\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right): b\csc\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right): c\csc\left(C+\dfrac{\pi}{3}\right)$
熱爾崗點 Ge	$\dfrac{1}{s-a}:\dfrac{1}{s-b}:\dfrac{1}{s-c}$
奈格爾點 Na	$(s-a):(s-b):(s-c)$
斯俾克點 S	$(b+c):(c+a):(a+b)$

組員

陳威宏
邱仲華
張天傑

陳宣睿
游智宇
許仲勛