

The background features a light blue grid pattern. A dashed blue line forms a path that winds across the page, starting from the top left, curving around the central text, and ending at the bottom right. Various school-related icons are scattered around: a backpack in the top left, a ruler and pencil in the top center, a calculator in the top right, a pencil case in the middle right, a paper airplane in the center, a bird in the middle right, a cloud in the middle left, a paper airplane in the middle right, a cloud in the bottom center, a ruler and set square in the bottom left, a backpack in the bottom center, a pencil in the bottom center, a book in the bottom right, and a pencil case in the bottom right.

2012 APMO



第一組



01



翻譯分析



Translation And Analysis

第一題

令 P 為 $\triangle ABC$ 內部的一點，令 D 、 E 、 F 為 \overline{AP} 與邊 \overline{BC} 、 \overline{BP} 與邊 \overline{CA} 以及線 \overline{CP} 和邊 \overline{AB} 相交的點。如果 $\triangle PFA$ 、 $\triangle PDB$ 和 $\triangle PEC$ 的面積均為 1，則證明 $\triangle ABC$ 的面積必為 6。

第二題

在 2012×2012 方格的每個網格中，輸入一個大於等於 0 或小於等於 1 的實數。思考通過繪製一條平行於網格水平邊或垂直邊的線，將方格分成 2 個由網格框組成的非空矩形。假設對於至少一個生成矩形，無論網格如何分割，矩形網格中的數字之和都小於或等於 1。算出方格中所有 2012×2012 個數字總和的最大值。

第三題

證明質數 p 和正整數 n 的所有 (p, n) 滿足 $\frac{n^p + 1}{p^n + 1}$ 為整數。

代數

第四題

令 $\triangle ABC$ 為一銳角三角形。以 D 表示從 A 點到邊 \overline{BC} 的垂線的垂足， M 表示 \overline{BC} 的中點， H 表示 $\triangle ABC$ 的垂心。設 E 為 $\triangle ABC$ 的外接圓 Γ 與 \overline{MH} 的交點， F 為 \overline{ED} 與圓 Γ 的交點（ E 除外）。

證明 $\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ 成立。

用 XY 表示線段 \overline{XY} 的長度。

第五題

設 n 為大於或等於2的整數。證明若實數 a_1, a_2, \dots, a_n 滿足 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = n$ ，則

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n - a_i a_j} \leq \frac{n}{2} \text{ 成立}$$



02



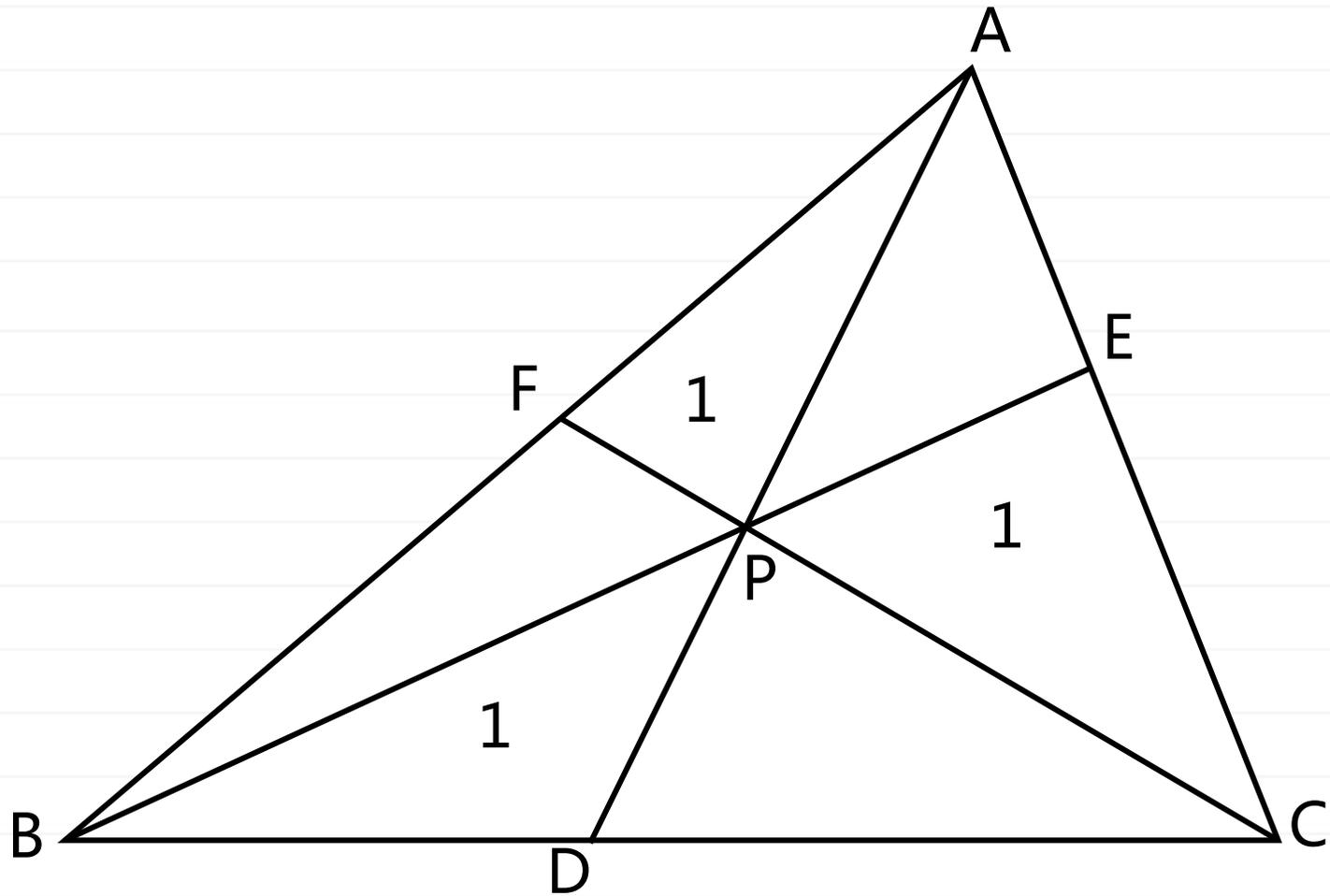
講解



Explain

第一題

令 P 為 $\triangle ABC$ 內部的一點，令 D 、 E 、 F 為 \overline{AP} 與邊 \overline{BC} 、 \overline{BP} 與邊 \overline{CA} 以及線 \overline{CP} 和邊 \overline{AB} 相交的點。如果 $\triangle PFA$ 、 $\triangle PDB$ 和 $\triangle PEC$ 的面積均為 1，則證明 $\triangle ABC$ 的面積必為 6。



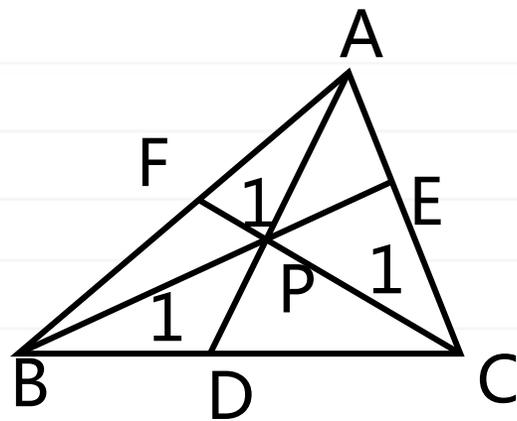
令 $x = \Delta PAB$, $y = \Delta PBC$ 和 $z = \Delta PCA$ 。

從 $y : z = \Delta BCP : \Delta ACP = \overline{AF} : \overline{BF} = \Delta BPF : \Delta APF$
 $= (x - 1) : 1$

可得 $z(x - 1) = y$, $(z + 1)x = x + y + z$ 。

同理可得 $(x + 1)y = x + y + z$ 和 $(y + 1)z = x + y + z$ 。

因此 , 我們得到 $(x + 1)y = (y + 1)z = (z + 1)x$ 。

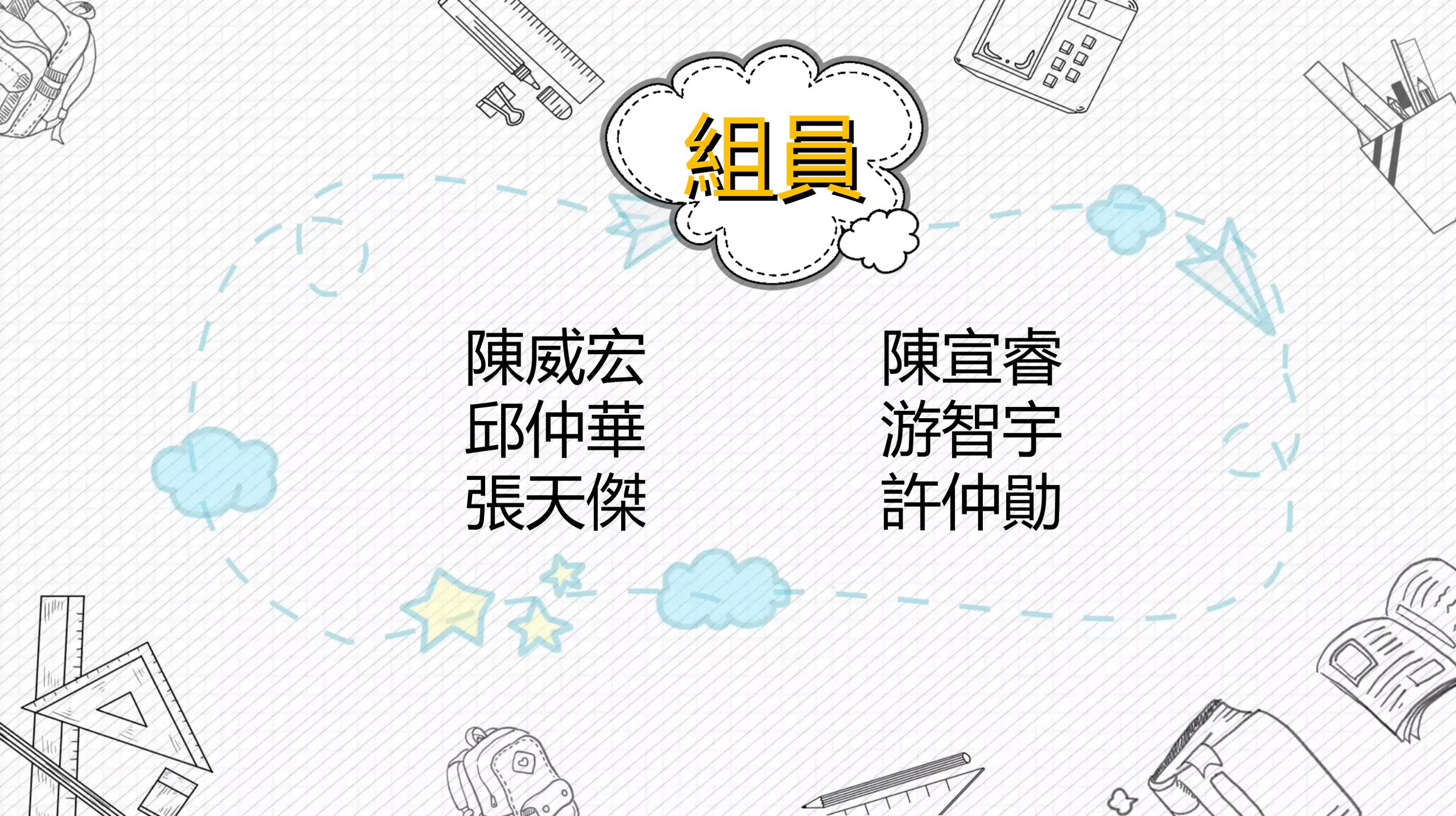


若一P點在三角型內部，分別為以下十個點，則
 $\Delta APB:\Delta BPC:\Delta CPA$ 的比為何？

- | | |
|---------|-------------|
| (1) 外心 | (6) 布洛卡兒點 |
| (2) 重心 | (7) 費馬點 |
| (3) 內心 | (8) 熱爾崗點 |
| (4) 垂心 | (9) 奈格爾點 |
| (5) 九點圓 | (10) 圓心斯俾克點 |

我們將這十個銳角三角形內的特殊點分割三角形的面積比作個總表以方便我們運用

Z	$a\Delta ZBC : a\Delta ZCA : a\Delta ZAB$
重心 G	1:1:1
內心 I	$a : b : c$
外心 O	$a \cos A : b \cos B : c \cos C$
垂心 H	$a \sec A : b \sec B : c \sec C$
九點圓圓心 N	外心+垂心
布洛卡兒點 P	$\frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2}$
費馬點 Q	$a \csc\left(A + \frac{\pi}{3}\right) : b \csc\left(B + \frac{\pi}{3}\right) : c \csc\left(C + \frac{\pi}{3}\right)$
熱爾崗點 Ge	$\frac{1}{s-a} : \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-c}$
奈格爾點 Na	$(s-a) : (s-b) : (s-c)$
斯俾克點 S	$(b+c) : (c+a) : (a+b)$



組員

陳威宏
邱仲華
張天傑

陳宣睿
游智宇
許仲勳