2017

APMO

第 29 屆 亞 太 數 學 奧 林 匹 亞 競 賽

廖英秀/許定閎/王霆軒/林政勳/馬國凱

01

序列

一個由5個整數所成的集合被稱為可編排的，若且唯若我們存在一種將這5個整數排成一直排的方法，從前到後為a, b, c, d, e，使得$a-b+c-d+e=29$。

試求:所有長度為2017項的整數數列$n_1, n_2, \cdots, n_{2017}$，使得當我們將這個數列順時鐘圍成一圈時，任意相鄰的5個數都是可編排的。

序列

A valid 2017-tuple is $n_1 = \cdots = n_{2017}$. We will show that it is the only solution.

We first replace each number n_i in the circle $m_i \coloneqq n_i - 29$. Since the condition $a - b + c - d + e = 29$ can be rewritten as $(a - 29) - (b - 29) + (c - 29) - (d - 29) + (e - 29) = 0$, we have that any five consecutive replaced integers in the circle can be labeled a, b, c, d, e in such a way that $a - b + c - d + e = 0$. We claim that this is possible only when all of the m_i's are 0 (and thus all of the original n_i's are 29).

We work with indexes modulo 2017. Notice that for every i, m_i and m_{i+5} have the same parity. Indeed, this follows from $m_i \equiv m_{i+1} + m_{i+2} + m_{i+3} + m_{i+4} \equiv m_{i+5}$ (mod 2). Since $\gcd(5,2017) = 1$, this implies that all m_i's are of the same parity. Since $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5$ is even, all m_i's must be even as well.

Suppose for the sake of contradiction that not all m_i's are zero. Then our condition still holds when we divide each number in the circle by 2. However, by performing repeated divisions, we eventually reach a point where some mi is odd. This is a contradiction.

01 相似題

一個由5個整數所成的集合被稱為可編排的，若且唯若我們存在一種將這5個整數排成一直排的方法，從前到後為 a, b, c, d, e，使得 $a - b + c - d + e = 18$。

試求：所有長度為2017項的整數數列 $n_1, n_2, \cdots, n_{2017}$，使得當我們將這個數列順時鐘圍成一圈時，任意相鄰的5個數都是可編排的。

序列

設ABC為三角形，其中$AB < AC$。令D為角BAC的內角平分線與ABC的外接圓的另一個交點，又令Z為AC的中垂線與角BAC的外角平分線的交點。

證明:線段AB的中點，會落在三角形ADZ的外接圓上。

幾何

03

令$A(n)$表示滿足以下條件的正整數數列個數：$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$，$a_1 + \cdots + a_k = n$，且對於所有$i = 1,2,\cdots,k$，$a_i + 1$都是2的冪次。又令$B(n)$表示滿足以下條件的正整數數列個數：$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_m$，$b_1 + \cdots + b_m = n$，且對於所有$j = 1,2,\ldots,m-1$，都有$b_j \geq 2b_j + 1$成立 。

證明:對每個正整數 n，$A(n) = B(n)$

數論

一個有理數r被稱為有效率的，若r可表示為$\frac{p^k}{q}$，其中p, q是兩個互質的正整數，k則是大於1的整數。令a, b, c為正有理數使得$abc = 1$。假設存在正整數x, y, z使得$a^x + b^y + c^z$是一整數。

試證:a, b, c皆為有效率的。

數論

令n為一正整數。兩條長度為n的整數數列$\{a_1,\ldots,a_n\}$ 和$\{b_1,\ldots,b_n\}$被稱為一對精緻組合，若且唯若$|a_1b_1+\cdots+a_nb_n|\leq 1$

試問:最多能同時有幾條長度為n的相異整數數列，使得其中任兩條數列都是一對精緻組合?

序列

2017

感謝觀看 THANKS