XXX Asian Pacific Mathematics Olympiad

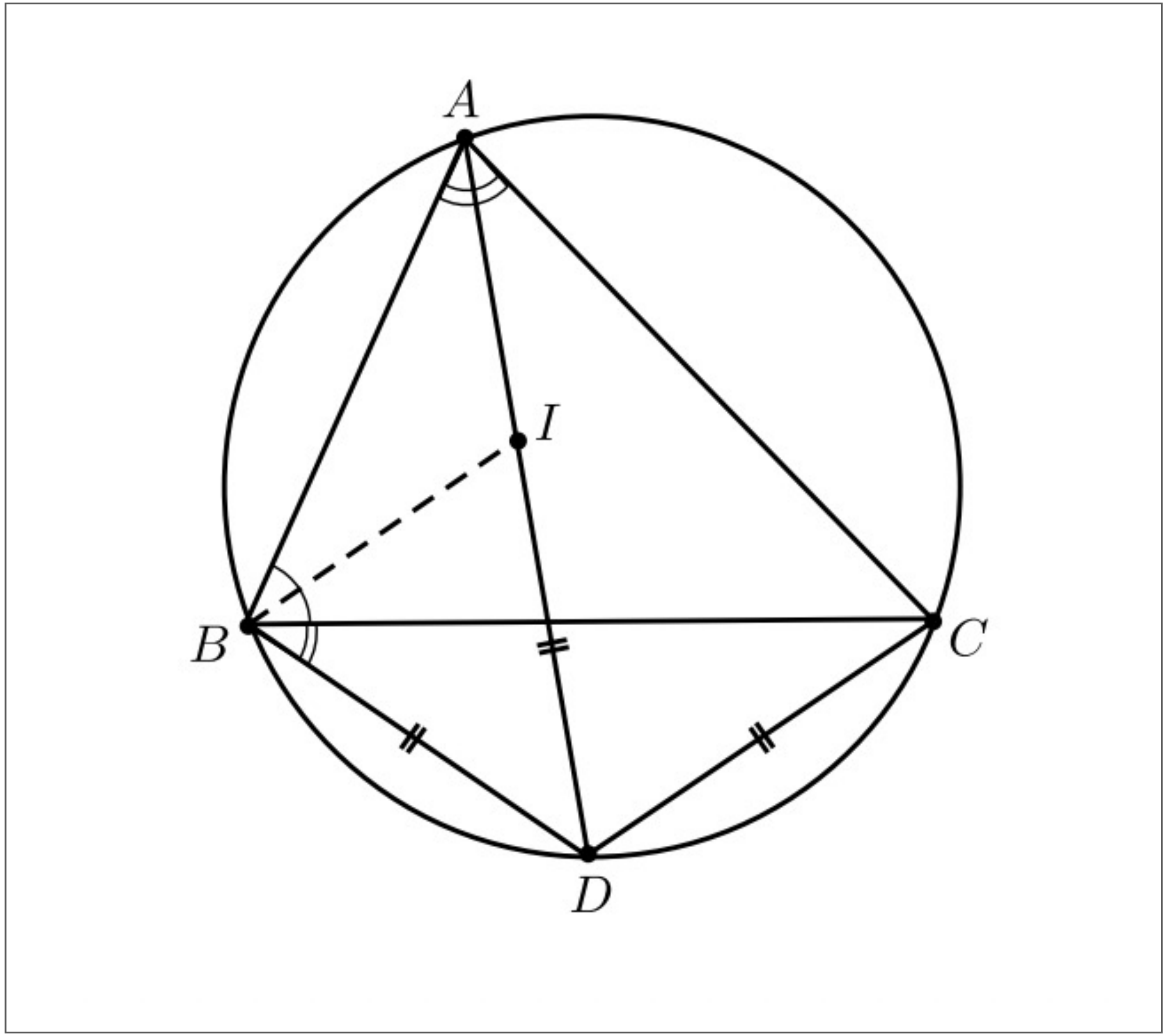
March, 2018

報告組別：第七組
組員：林咏勳,高新雄,江晁維,林鈺祐,楊荏喻

Problem 1. Let H be the orthocenter of the triangle ABC. Let M and N be the midpoints of the sides AB and AC, respectively. Assume that H lies inside the quadrilateral $BMNC$ and that the circumcircles of triangles BMH and CNH are tangent to each other. The line through H parallel to BC intersects the circumcircles of the triangles BMH and CNH in the points K and L, respectively. Let F be the intersection point of MK and NL and let J be the incenter of triangle MHN. Prove that $FJ = FA$.

Proposed by Mahdi Etesamifard, Iran

問題 1. 令 H 為三角形 ABC 的正交中心。令 M 和 N分別為邊 AB 和 AC 的中點。假設 H 位於四邊形 BMNC 且三角形 BMH 和 CNH 的外接圓彼此相切。通過 H 平行於 BC 的線與外接圓相交於 K 點和 L 點，同時形成三角形 BMH 和 CNH。讓 F 成為 MK 和 NL 的交點，令 J 為三角形 MHN 的中心。證明FJ = FA。



Problem 3. A collection of n squares on the plane is called tri-connected if the following criteria are satisfied:

(i) All the squares are congruent.

(ii) If two squares have a point P in common, then P is a vertex of each of the squares.

(iii) Each square touches exactly three other squares.

How many positive integers n are there with $2018 \leq n \leq 3018$, such that there exists a collection of n squares that is tri-connected? Proposed by Senior Problems Committee of the Australian Mathematical Olympiad Committee

問題 3. 平面上 n 個正方形的集合稱為tri-connected，如果滿足以下標準：

(i)所有的正方形都是全等的。

(i i)如果兩個正方形有一個公共點 P，那麼 P 是每個正方形的頂點正方形。

(i i i)每個方格恰好與其他三個方格相接。

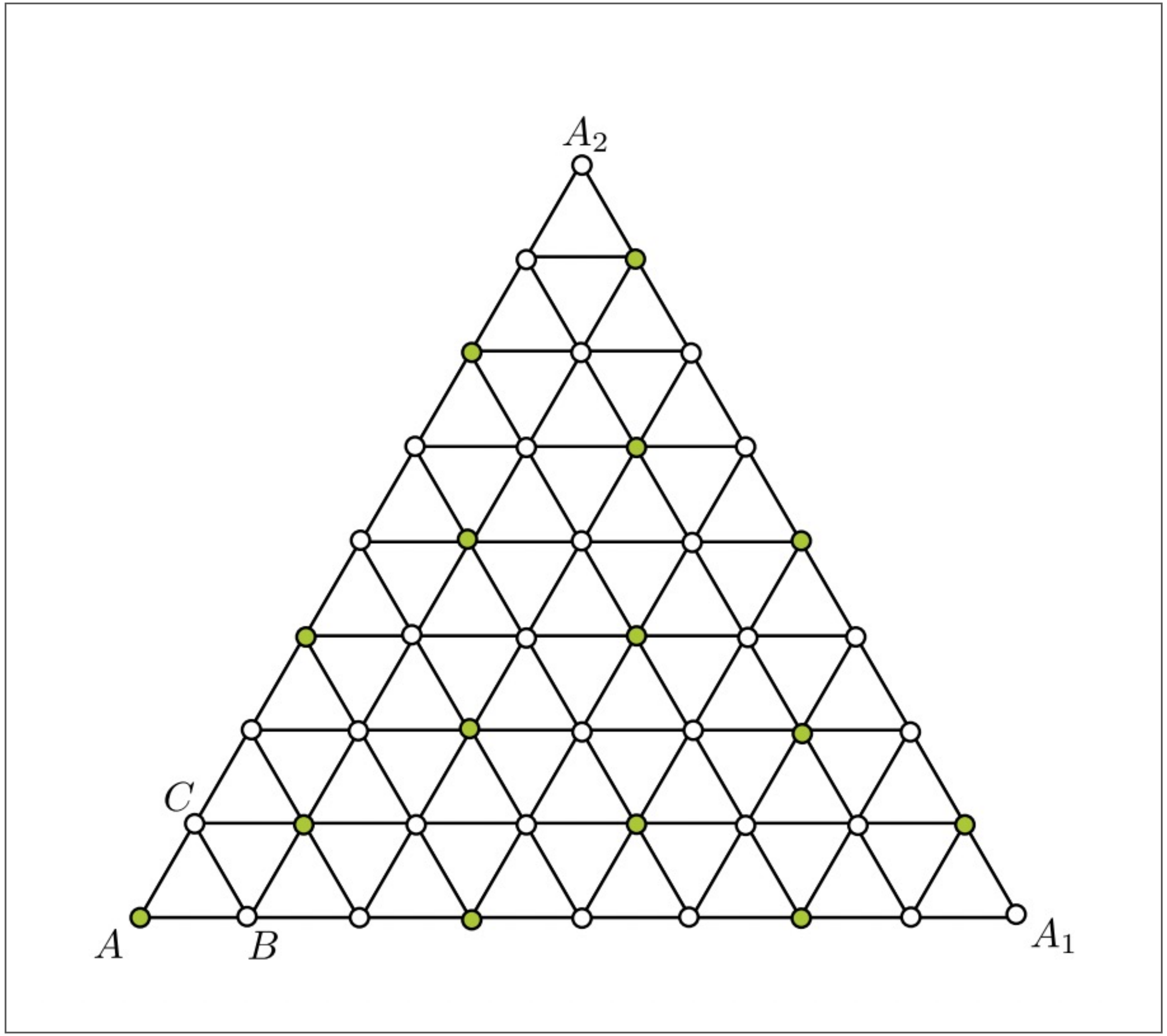
有多少個正整數 n 且 $2018 \leq n \leq 3018$，使得存在n 個三角形的集合是 triconnected？

由澳大利亞數學奧林匹克高級問題委員會提出

Problem 4. Let ABC be an equilateral triangle. From the vertex A we draw a ray towards the interior of the triangle such that the ray reaches one of the sides of the triangle. When the ray reaches a side, it then bounces off following the *law of reflection*, that is, if it arrives with a directed angle α, it leaves with a directed angle $180^\circ - \alpha$. After n bounces, the ray returns to A without ever landing on any of the other two vertices. Find all possible values of n.

Proposed by Daniel Perales and Jorge Garza, Mexico

問題 4. 設 ABC 是一個等邊三角形。從頂點 A 我們畫一個射線朝向三角形的內部，使得射線到達三角形的一邊。當光線到達一側時，它會以反射定律反射，即如果它以有向角 α到達，則以有向角180° – α離開。在 n 次反彈後，光線返回到 A，而不會落在任何一個其他兩個頂點。找出所有可能的 n 值。



由墨西哥Daniel Perales 和 Jorge Garza 提出

Problem 5. Find all polynomials $P(x)$ with integer coefficients such that for all real numbers s and t, if $P(s)$ and $P(t)$ are both integers, then $P(st)$ is also an integer.

Proposed by William Ting-Wei Chao, Taiwan

問題 5. 找出所有具有整數係數的多項式 $P(x)$ 使得對於所有實數數 s 和 t，如果 $P(s)$ 和 $P(t)$ 都是整數，那麼 $P(st)$ 也是整數。

由台灣 William Ting-Wei 提出

<u>主軸問題</u>

Problem 2. Let $f(x)$ and $g(x)$ be given by

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4} + \cdots + \frac{1}{x-2018}$$

and

$$g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-5} + \cdots + \frac{1}{x-2017}.$$

Prove that

$$|f(x) - g(x)| > 2$$

for any non-integer real number x satisfying $0 < x < 2018$.

Proposed by Senior Problems Committee of the Australian Mathematical Olympiad Committee

問題2: 給定f(x)和g(x),請證明對於任何滿足 0 <x< 2018 的非整數實數 x ，|f(x) − g(x)| > 2

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4} + \cdots + \frac{1}{x-2018}$$

$$g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-5} + \cdots + \frac{1}{x-2017}.$$

由澳大利亞數學奧林匹克高級問題委員會提出

解題

有兩種情況：$2n - 1 < x < 2n$ 和 $2n < x < 2n + 1$。

注意 $f(2018 - x) = -f(x)$ 和 $g(2018 - x) = -g(x)$，即繞點 (1009,0) 轉半圈保留 f 和 g 的圖。所以只考慮 $2n - 1 <x< 2n$ 的情況。

令 $d(x) = g(x) - f(x)$。我們將證明當 $2n - 1 < x < 2n$ 且$n \in \{1,2,...,1009\}$，$d(x) > 2$。

對於任何 0 <x< 2018 的非整數 x，我們知道

$$d(x+2)-d(x)=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x-2018}-\frac{1}{x-2017}\right)>0+0=0.$$

因此，在 1 <x< 2的情形下，我們足以證明d(x) > 2。

由於 x < 2，得 $\frac{1}{x-2i-1}>\frac{1}{x-2i}$ (i = 2,3,...,1008)

我們還知道 $\frac{1}{x-2018}<0$ 因此可以推導出在1 <x< 2時,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}>2\\ \Leftrightarrow&\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2-x}\right)+\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x}\right)>2\\ \Leftrightarrow&\frac{1}{(x-1)(2-x)}+\frac{3}{x(x-3)}>2.\end{aligned}$$

由 GM – HM 不等式（或者考慮二次方程的最大值$(x-1)(2-x)$) 得知

$$\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{2-x} > \left(\frac{2}{(x-1)+(2-x)}\right)^2 = 4.$$

找到下界 $\dfrac{3}{x(x-3)}$, 注意 $x(x-3) < 0$ for $1 < x < 2$. 所以我們尋找一個

上$x(x-3)$ 的界限。從二次方的形狀來看，這發生在 $x = 1$ 或 $x = 2$ 處，

兩者都產生出此結果 $\dfrac{3}{x(x-3)} > -\dfrac{3}{2}$，意即 $d(x) > 4 - \dfrac{3}{2} > 2$，得證。

延伸題

給定f(x)和g(x),請證明對於任何滿足 0 < x< 2020 的非整數實數 x ，|f(x) − g(x)| > 2

f(x)=$\sum_{n=0}^{1010} \frac{1}{x-2n}$ $\quad g(x) = \sum_{n=0}^{1009} \frac{1}{x-(2n+1)}$

請證明對於任何滿足 0 <x< 2020 的非整數實數 x ，|f(x) − g(x)| > 2

有兩種情況：$2n-1<x<2n$ 和 $2n<x<2n+1$。

注意 $f(2020-x)=-f(x)$ 和 $g(2020-x)=-g(x)$，即繞點 $(1010,0)$ 轉半圈保留 f 和 g 的圖。所以只考慮 $2n-1<x<2n$ 的情況。

令 $d(x)=g(x)-f(x)$。我們將證明當 $2n-1<x<2n$

且 $n\in\{1,2,\ldots,1010\}$， $d(x)>2$。

對於任何 0 <x< 2020 的非整數 x，我們知道

d(x+2)-d(x)=($\frac{1}{x-1}$ - $\frac{1}{x-2}$)+($\frac{1}{x-2020}$ - $\frac{1}{x-2019}$) > 0 + 0 = 0

因此，在 1 <x< 2的情形下，我們足以證明d(x) > 2。

由於 x < 2，得 $\frac{1}{x-2i-1} > \frac{1}{x-2i}$ (i = 2,3,...,1008)。

我們還知道 $1/(x-2020) < 0$,因此可以推導出在1 <x< 2時

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}>2$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2-x}\right)+\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x}\right)>2$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{(x-1)(2-x)}+\frac{3}{x(x-3)}>2.$$

由 算幾不等式（或者考慮二次方程的最大值(x – 1)(2 – x)) 得知

$$\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{2-x} > \left(\frac{2}{(x-1)+(2-x)}\right)^2 = 4.$$

找到下界.$\frac{3}{x(x-3)}$, 注意 x(x – 3) < 0 for 1 <x< 2. 所以我們尋找一個上

x(x – 3) 的界限。從二次方的形狀來看，這發生在 x = 1 或 x = 2 處，

兩者都產生出此結果 $\frac{3}{x(x-3)} > -\frac{3}{2}$ ，意即$d(x) > 4 - \frac{3}{2} > 2$，得證。

相關參考資料：

https://www.apmo-official.org/problems （2018年度部分）