2019 APMO

第8組 410831149 楊弘暐
410731137 朱珮綸
410731145 張劭恩
410831135 陳威廷
410731231 童震易

Problem 1

Problem 1

$\mathbb{Z}^+$是一個正整數集合。

對於所有的正整數a和b，確定出所有的函數$f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$

使得

$$a^2 + f(a)f(b)\text{可以被}f(a) + b\text{整除。}$$

Answer 1

對於所有的正整數$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{f(n)=n}$。

對於所有的$\boldsymbol{n}\in \mathbb{Z}^{+}$，$\boldsymbol{f(n)=n}$明確的滿足原本的敘述，

我們表示出一些可能的方法去證明這是唯一可能的解。

Solution 1-1

我們首先對於原本的敘述執行了以下的替換：

(1) 若$a=b=1$，我們發現 $f(1)+1 \mid f(1)^2+1$，這意味著$f(1)=1$。

(2) 若$a=1$，我們發現 $b+1 \mid f(b)+1$，特別是對於所有的$b \in \mathbb{Z}^+$，$b \le f(b)$。

(3) 若$b=1$，我們發現 $f(a)+1 \mid a^2+f(a)$，因此 $f(a)+1 \mid a^2-1$，特別是對於所有的$a \ge 2$，$f(a) \le a^2-2$。

Solution 1-1

p是一個任意的奇質數，對原本的敘述替換$a=p$和$b=f(p)$，我們發現 $2f(p)\mid p^2+f(p)f(f(p))$。

因此，$f(p)$可能的值有1、p和p^2。

根據(2)，$f(p)\geq p$。

根據(3)，$f(p)\leq p^2-2$。

所以對於所有的質數p，$f(p)=p$。

Solution 1-1

對原本的敘述替換成$a=p$，我們發現$b+p\mid p^2+pf(b)$。

然而，從

$$(b+p)(f(b)+p-b)=p^2-b^2+bf(b)+pf(b)$$

我們得到 $b+p\mid bf(b)-b^2$。

因此，這成立於任意大的質數p，對於任何固定的b。

也因此我們如預期的必得出

$$bf(b)-b^2=0 \quad \text{或} \quad f(b)=b。$$

Solution 1-2

根據上述，我們有(1)~(3)敘述。

在(2)和(3)的情況下，我們有

$$3 \mid f(2)+1 \quad 和 \quad f(2)+1 \mid 3 \quad 對於 b=2。$$

現在利用$a=2$我們得到 $2+b \mid 4+2f(b)$。

令$f(b)=x$，則

$$1+x \equiv 0 \pmod{b+1}$$

$$4+2x \equiv 0 \pmod{b+2}。$$

Solution 1-2

根據第一個等式得到

$$x \equiv b \pmod{b+1}$$

所以$x = b + (b+1)t$對於一些整數$t \geq 0$，則

$$0 \equiv 4 + 2x \equiv 4 + 2(b + (b+1)t) \equiv 4 + 2(-2 - t) \equiv -2t \pmod{b+2}$$

又因為$1 + x \mid b^2 - 1$(由(3)得到)，所以$t \leq b - 2$。

若$b + 2$是奇數，則$t \equiv 0 \pmod{b+2}$，可知$t = 0$，這意味著$f(b) = b$。

Solution 1-2

若$b+2$是偶數，則

$$t \equiv 0 \pmod{(b+2)/2} \text{，}$$

可知$t=0$或$t=(b+2)/2$，

但是若$t \neq 0$，根據定義可知

$$\frac{b+4}{2} = 1 + t = \frac{x+1}{b+1} \text{，}$$

又因為$x+1 \mid b^2-1$，所以$\frac{b+4}{2}$可以被$b-1$整除，

因此$b+4 \mid 10$且唯一的可能性是$b=6$，

所以對於偶數的b，$b \neq 6$我們得到$f(b)=b$。

Solution 1-2

數論

最後，根據(2)和(3)，在$b = 6$的情況下，我們有

$$7 \mid f(6) + 1 \quad 和 \quad f(6) + 1 \mid 35 \quad ，$$

這意味著$f(6) = 6$或$f(6) = 34$。

在$a = 5$，$b = 6$的情況下根據原始方程式得到

$11 \mid 5(5 + f(6))$，所以後者是不成立的。

因此，對於每一個正整數n，$f(n) = n$。

Solution 1-3

利用歸納法進行

在Solution 1中，我們有$f(1)=1$，假設對於一些整數$n\geq 2$，$f(n-1)=n-1$。

將原本的敘述替換成$a=n$和$b=n-1$，可得

$$f(n)+n-1\mid n^2+f(n)(n-1)\quad ,$$

因為$f(n)+n-1\mid (n-1)(f(n)+n-1)$，所以

$$f(n)+n-1\mid 2n-1\quad 。$$

Solution 1-3

將原本的敘述替換成$a = n - 1$和$b = n$，可得

$2n - 1 \mid (n-1)^2 + (n-1)f(n) = (n-1)(n-1+f(n))$ ，

因為$(2n-1, n-1) = 1$，所以

$$2n - 1 \mid f(n) + n - 1 \quad 。$$

因此，$f(n) + n - 1 = 2n - 1$，

這意味著所需的$f(n) = n$。

Problem 2

Problem 2

數論

m是一個固定的正整數。

用以下的做法定義一無限序列$\{a_n\}_{n\geq 1}$：

a_1是一個正整數，且對於每一個整數$n \geq 1$，我們有

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n^2 + 2^m & if\ a_n < 2^m \\ \dfrac{a_n}{2} & if\ a_n \geq 2^m \end{cases}$$

對於每個m，測定出所有a_1可能的值，使得序列的每一項都是一個整數。

Problem 3

Problem 3

幾何

有一個不等邊三角形ABC與其外接圓Γ，M是$\overline{BC}$的中點，在$\overline{AM}$上有一動點P。

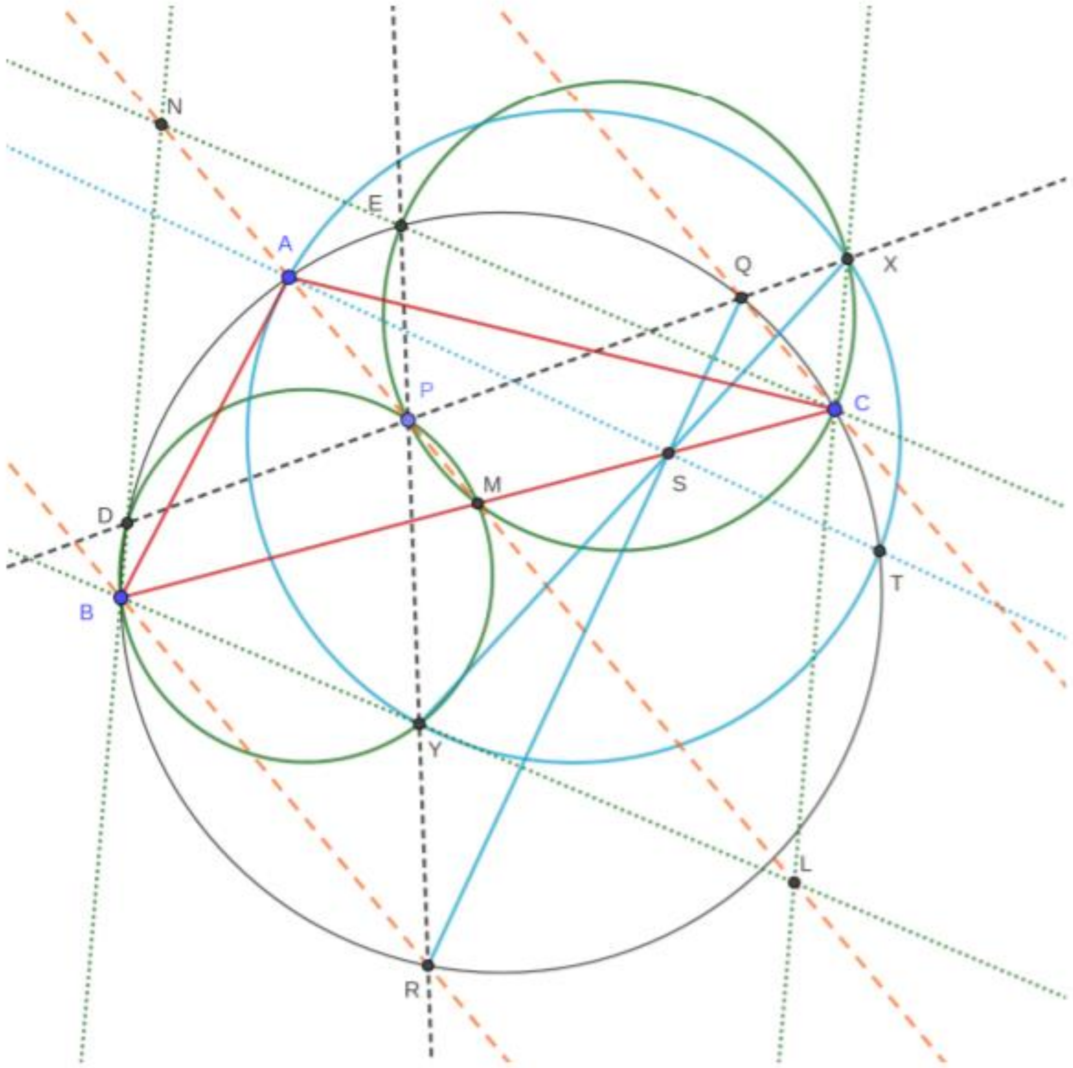
ΔBPM和ΔCPM的外接圓與Γ分別再次相交於點D和E。

$\overleftrightarrow{DP}$和$\overleftrightarrow{EP}$與ΔCPM和ΔBPM的外接圓分別(第二次)相交於點X和Y。

證明：

隨著P的變化，ΔAXY的外接圓會通過一個區別於A的固定點T。

Problem 3



https://www.youtube.com/watch?v=SPX77Sw290s

Problem 4

Problem 4

考慮一個2018×2019的板子，其每一單位平方內都有整數，分享一個共同邊的兩個單位平方被稱為鄰居。

你在每一輪選擇一些單位平方，則每一個被選中的單位平方，他們所有鄰居的平均數都可以計算出來(一個平方單位計算一個鄰居平均數)，最後在完成計算之後，每一個被選中的單位平方中的數字替換成相對應的平均數。

那麼有沒有可能在經過有限的輪次後，每次都能使所有平方內的數字都變成一樣的？

Problem 5

Problem 5

代數+數論

對於所有的實數x和y，確定出所有函數$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

使得

$$f\left(x^2 + f(y)\right) = f\big(f(x)\big) + f\left(y^2\right) + 2f(xy)$$

相似题

相似題

考慮一個2020×2021的表格，其中每一個方格內都有一個整數。你在每一輪選擇57個方格，則每一個被選中的單位平方方格，以方格自己為中心的九宮格，將其餘八格計算出平均數(邊緣的方格一樣以自己為中心去計算，不須計算到八格)，最後在完成57次計算之後，每一個被選中的方格中的數字替換成相對應的平均數。

那麼有沒有可能在經過有限的輪次後，每次都能使所有方格內的數字都變成一樣的？

Thank you for listening!