



# 2019 APMO

第8組 410831149 楊弘暉  
410731137 朱珮綸  
410731145 張劭恩  
410831135 陳威廷  
410731231 童震易

The background is a white canvas decorated with various colorful geometric elements. In the top-left corner, there are concentric blue circles and a pink-to-white gradient. The top-right features a large orange circle with a yellow outline, a pink hatched rectangle, and a blue circle. The bottom-left has a yellow arc, a purple square, a white rectangle with a dotted pattern, a yellow 'X', and a red circle. The bottom-right shows a yellow circle overlapping a blue circle, and a series of concentric white circles. The text 'Problem 1' is centered in a stylized, orange-outlined font.

# Problem 1

# Problem 1

$\mathbb{Z}^+$  是一個正整數集合。

對於所有的正整數  $a$  和  $b$ ，確定出所有的函數  $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$

使得

$a^2 + f(a)f(b)$  可以被  $f(a) + b$  整除。

# Answer 1

對於所有的正整數 $n$ ， $f(n) = n$ 。

對於所有的 $n \in \mathbb{Z}^+$ ， $f(n) = n$ 明確的滿足原本的敘述，

我們表示出一些可能的方法去證明這是唯一可能的解。

## Solution 1-1

我們首先對於原本的敘述執行了以下的替換：

(1) 若  $a = b = 1$ ，我們發現  $f(1) + 1 \mid f(1)^2 + 1$ ，這意味著  $f(1) = 1$ 。

(2) 若  $a = 1$ ，我們發現  $b + 1 \mid f(b) + 1$ ，特別是對於所有的  $b \in \mathbb{Z}^+$ ， $b \leq f(b)$ 。

(3) 若  $b = 1$ ，我們發現  $f(a) + 1 \mid a^2 + f(a)$ ，因此  $f(a) + 1 \mid a^2 - 1$ ，特別是對於所有的  $a \geq 2$ ， $f(a) \leq a^2 - 2$ 。

## Solution 1-1

$p$  是一個任意的奇質數，對原本的敘述替換  $a = p$  和  $b = f(p)$ ，我們發現  $2f(p) \mid p^2 + f(p)f(f(p))$ 。

因此， $f(p)$  可能的值有  $1$ 、 $p$  和  $p^2$ 。

根據 (2)， $f(p) \geq p$ 。

根據 (3)， $f(p) \leq p^2 - 2$ 。

所以對於所有的質數  $p$ ， $f(p) = p$ 。

## Solution 1-1

對原本的敘述替換成  $a = p$ ，我們發現  $b + p \mid p^2 + pf(b)$ 。

然而，從

$$(b + p)(f(b) + p - b) = p^2 - b^2 + bf(b) + pf(b)$$

我們得到  $b + p \mid bf(b) - b^2$ 。

因此，這成立於任意大的質數  $p$ ，對於任何固定的  $b$ 。

也因此我們如預期的必得出

$$bf(b) - b^2 = 0 \quad \text{或} \quad f(b) = b。$$

## Solution 1-2

根據上述，我們有(1)~(3)敘述。

在(2)和(3)的情況下，我們有

$$3 \mid f(2) + 1 \quad \text{和} \quad f(2) + 1 \mid 3 \quad \text{對於} \quad b = 2。$$

現在利用  $a = 2$  我們得到  $2 + b \mid 4 + 2f(b)$ 。

令  $f(b) = x$ ，則

$$1 + x \equiv 0 \pmod{b + 1}$$

$$4 + 2x \equiv 0 \pmod{b + 2}。$$

## Solution 1-2

根據第一個等式得到

$$x \equiv b \pmod{b+1}$$

所以  $x = b + (b+1)t$  對於一些整數  $t \geq 0$ ，則

$$0 \equiv 4 + 2x \equiv 4 + 2(b + (b+1)t) \equiv 4 + 2(-2 - t) \equiv -2t \pmod{b+2}$$

又因為  $1+x \mid b^2 - 1$  (由 (3) 得到)，所以  $t \leq b-2$ 。

若  $b+2$  是奇數，則  $t \equiv 0 \pmod{b+2}$ ，可知  $t = 0$ ，這

意味著  $f(b) = b$ 。

## Solution 1-2

若  $b + 2$  是偶數，則

$$t \equiv 0 \pmod{(b + 2)/2} ,$$

可知  $t = 0$  或  $t = (b + 2)/2$ ，

但是若  $t \neq 0$ ，根據定義可知

$$\frac{b+4}{2} = 1 + t = \frac{x+1}{b+1} ,$$

又因為  $x + 1 \mid b^2 - 1$ ，所以  $\frac{b+4}{2}$  可以被  $b - 1$  整除，

因此  $b + 4 \mid 10$  且唯一的可能性是  $b = 6$ ，

所以對於偶數的  $b$ ， $b \neq 6$  我們得到  $f(b) = b$ 。

## Solution 1-2

最後，根據 (2) 和 (3)，在  $b = 6$  的情況下，我們有

$$7 \mid f(6) + 1 \text{ 和 } f(6) + 1 \mid 35 ,$$

這意味著  $f(6) = 6$  或  $f(6) = 34$ 。

在  $a = 5$ ， $b = 6$  的情況下根據原始方程式得到

$$11 \mid 5(5 + f(6)) , \text{ 所以後者是不成立的。}$$

因此，對於每一個正整數  $n$ ， $f(n) = n$ 。

## Solution 1-3

利用歸納法進行

在 *Solution 1* 中，我們有  $f(1) = 1$ ，假設對於一些整數  $n \geq 2$ ， $f(n-1) = n-1$ 。

將原本的敘述替換成  $a = n$  和  $b = n-1$ ，可得

$$f(n) + n - 1 \mid n^2 + f(n)(n - 1) \quad ,$$

因為  $f(n) + n - 1 \mid (n - 1)(f(n) + n - 1)$ ，所以

$$f(n) + n - 1 \mid 2n - 1 \quad .$$

## Solution 1-3

將原本的敘述替換成  $a = n - 1$  和  $b = n$ ，可得

$$2n - 1 \mid (n - 1)^2 + (n - 1)f(n) = (n - 1)(n - 1 + f(n)) \quad ,$$

因為  $(2n - 1, n - 1) = 1$ ，所以

$$2n - 1 \mid f(n) + n - 1 \quad .$$

因此， $f(n) + n - 1 = 2n - 1$ ，

這意味著所需的  $f(n) = n$ 。

The background is white with various colorful geometric shapes and patterns. In the top left, there are concentric blue circles and a pink triangle. In the top right, there is a large orange circle with a yellow outline and a pink hatched rectangle. In the bottom left, there is a yellow arc, a purple square, a grid of dots, and a yellow 'X'. In the bottom right, there are concentric grey circles, a yellow circle, and a blue circle. The text 'Problem 2' is centered in a light blue, rounded, cursive font with a purple outline.

# Problem 2

## Problem 2

$m$  是一個固定的正整數。

用以下的做法定義一無限序列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  :

$a_1$  是一個正整數，且對於每一個整數  $n \geq 1$ ，我們有

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n^2 + 2^m & \text{if } a_n < 2^m \\ \frac{a_n}{2} & \text{if } a_n \geq 2^m \end{cases}$$

對於每個  $m$ ，測定出所有  $a_1$  可能的值，使得序列的每一項都是一個整數。

The background is white and decorated with various colorful geometric shapes and patterns. In the top left, there are concentric blue circles and a pink triangle. In the top right, there is a large orange circle with a yellow outline and a pink hatched rectangle. In the bottom left, there is a yellow arc, a purple square, a white rectangle with a dotted pattern, and a yellow 'X' shape. In the bottom right, there are concentric blue circles, a yellow circle, and a blue circle. The text 'Problem 3' is centered in a stylized, orange-outlined font.

# Problem 3

## Problem 3

幾何

有一個不等邊三角形  $ABC$  與其外接圓  $\Gamma$ ， $M$  是  $\overline{BC}$  的中點，  
在  $\overline{AM}$  上有一動點  $P$ 。

$\triangle BPM$  和  $\triangle CPM$  的外接圓與  $\Gamma$  分別再次相交於點  $D$  和  $E$ 。

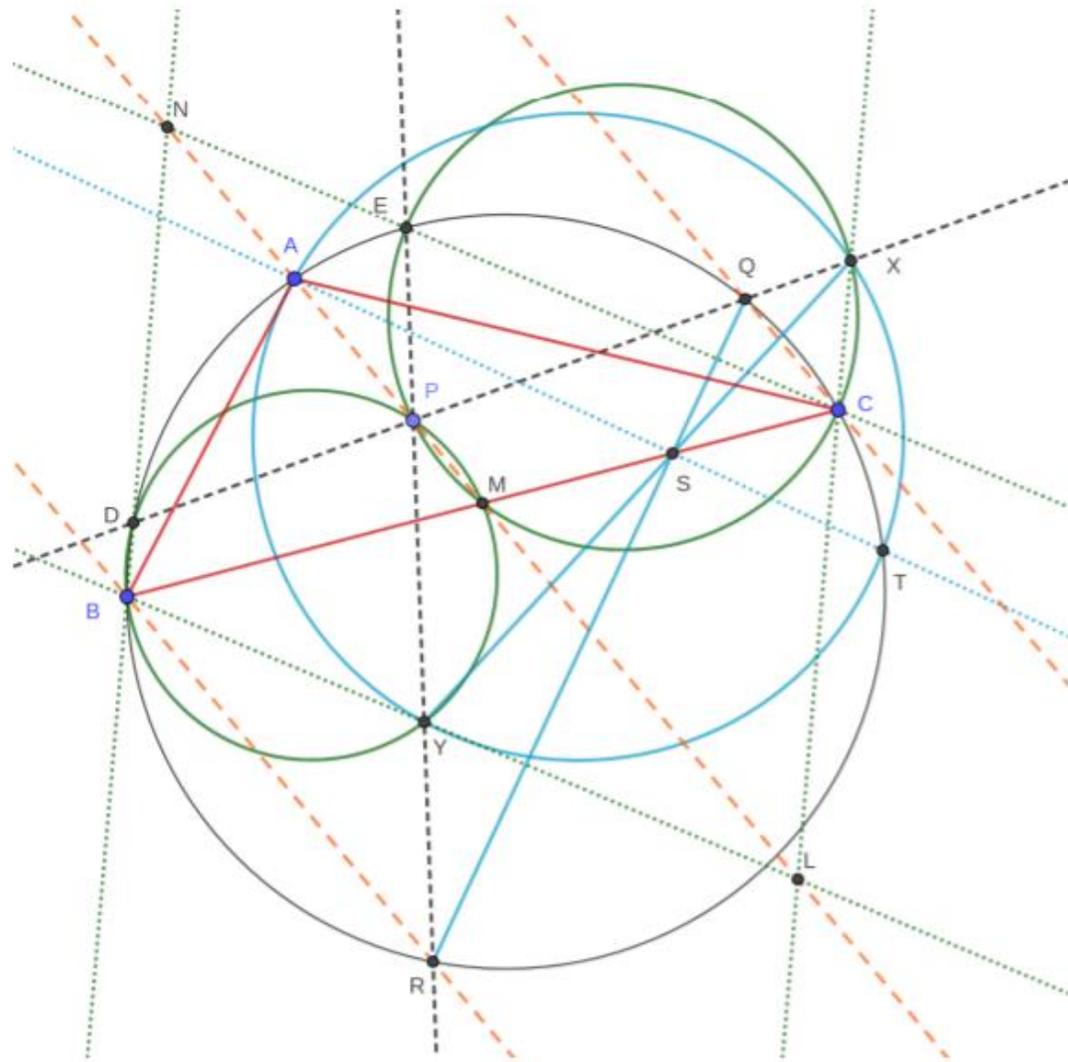
$\overleftrightarrow{DP}$  和  $\overleftrightarrow{EP}$  與  $\triangle CPM$  和  $\triangle BPM$  的外接圓分別 (第二次) 相交  
於點  $X$  和  $Y$ 。

證明：

隨著  $P$  的變化， $\triangle AXY$  的外接圓會通過一個區別於  $A$   
的固定點  $T$ 。

# Problem 3

幾何



<https://www.youtube.com/watch?v=SPX77Sw290s>

The background is white with various colorful geometric shapes and patterns. In the top left, there are concentric blue circles and a pink triangle. In the top right, there is a large orange circle with a yellow outline and a pink hatched rectangle. In the bottom left, there is a yellow arc, a purple square, a grid of dots, and a yellow 'X'. In the bottom right, there are concentric blue circles, a yellow circle, and a blue circle. The text 'Problem 4' is centered in a light blue, rounded, outlined font.

# Problem 4

## Problem 4

考慮一個  $2018 \times 2019$  的板子，其每一單位平方內都有整數，分享一個共同邊的兩個單位平方被稱為鄰居。

你在每一輪選擇一些單位平方，則每一個被選中的單位平方，他們所有鄰居的平均數都可以計算出來（一個平方單位計算一個鄰居平均數），最後在完成計算之後，每一個被選中的單位平方中的數字替換成相對應的平均數。

那麼有沒有可能在經過有限的輪次後，每次都能使所有平方內的數字都變成一樣的？

The background is white with various colorful geometric shapes and patterns scattered around. In the top left, there are concentric blue circles and a pink triangle. In the top right, there are orange circles, a yellow circle, and a pink hatched rectangle. In the bottom left, there are orange horizontal bars, a yellow 'X' shape, and a grid of dots. In the bottom right, there are concentric blue circles, a yellow circle, and a blue circle. The text 'Problem 5' is centered in a stylized, orange-outlined font.

# Problem 5

## Problem 5

對於所有的實數  $x$  和  $y$ ，確定出所有函數  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
使得

$$f(x^2 + f(y)) = f(f(x)) + f(y^2) + 2f(xy)$$

# 相似題

The background features a variety of colorful geometric elements. In the top left, there are concentric blue circles and a pink-to-white gradient. The top right has a large orange circle with a yellow outline, a pink hatched rectangle, and a blue circle. The bottom left shows a yellow arc, a grid of dots, and a yellow 'X' shape. The bottom right includes a yellow circle overlapping a blue circle, and a series of concentric white circles on a blue background.

# 相似題

考慮一個  $2020 \times 2021$  的表格，其中每一個方格內都有一個整數。你在每一輪選擇 57 個方格，則每一個被選中的單位平方方格，以方格自己為中心的九宮格，將其餘八格計算出平均數（邊緣的方格一樣以自己為中心去計算，不須計算到八格），最後在完成 57 次計算之後，每一個被選中的方格中的數字替換成相對應的平均數。

那麼有沒有可能在經過有限的輪次後，每次都能使所有方格內的數字都變成一樣的？

The background is a vibrant, abstract composition of geometric shapes and patterns. In the top left, there are concentric blue circles and a pink-to-white gradient. A yellow arc is positioned below the circles. On the left side, there is a vertical orange rectangle with a dotted pattern and a large orange 'X' shape. At the bottom left, there are several horizontal orange bars. In the top right, there is a large orange circle with a yellow outline and a pink-to-white gradient. A yellow circle is positioned below it. On the right side, there are concentric white circles and a yellow circle. At the bottom right, there is a large yellow circle with a green-to-yellow gradient and a blue circle. The text "Thank you for listening!" is centered in a white, rounded, cursive font with a light blue shadow.

*Thank you for listening!*