2020APMO試題

組員:411031116楊子毅　411031117劉秉翰
411031118張銓敏　411031119陳柏諺
411031121戴士宬　411031138曾國恩

問題 1.

令 Γ 是$\triangle ABC$的外接圓。讓 D 是 BC 邊上的一個點，Γ 在A點的切線與穿過 D 點、與線段BA平行之平行線在 E 點相交。

線段 CE 與 Γ 再次在 F 點相交。假設B,D, E,F 是同圓的。 證明AC,BF,DE是共點的。

問題 2.

證明 r=2是滿足以下條件的最大實數： 如果一個正整數數列a_1, a_2,. . . 滿足不等式

$$a_n \le a_{n+2} \le \sqrt{a_n^2 + \mathrm{r} a_{n+1}}$$

對於每個正整數n，存在一個正整數 M 使得a_{n+2}=a_n對於每個n≥ M。

問題 3.

確定所有正整數 k存在一個正整數m和一組 S 的正整數，使得任何整數 n> m 都可以寫成以恰好 k 種方式對 S 的不同元素求和。

問題 4.
讓Z表示所有整數的集合。 找到所有多項式 P(x) 與滿足以下性質的整數係數： 對於任意無限整數序列 $a_1,a_2,...$出現的每個整數Z恰好存在指數$i < j$和整數 k，
使得$a_i+a_{i+1}+...+a_j=P(k)$

問題 5.
令 $n\geq3$ 為固定整數。將 數字1寫在黑板上n次。 在黑板下方，有兩個最初是空的桶。 擦除數字 a 和 b 一次，並將它們替換為數字1和 $a+b$，然後在第一個桶中添加一塊石頭，然後將最大公因數(a, b)數量的石頭添加到第二個桶。 經過一些有限次數的移動。 第一個桶有 s 塊石頭，第二個桶有t塊石頭，其中s和t是正整數。 找出$\frac{t}{s}$的所有可能值。

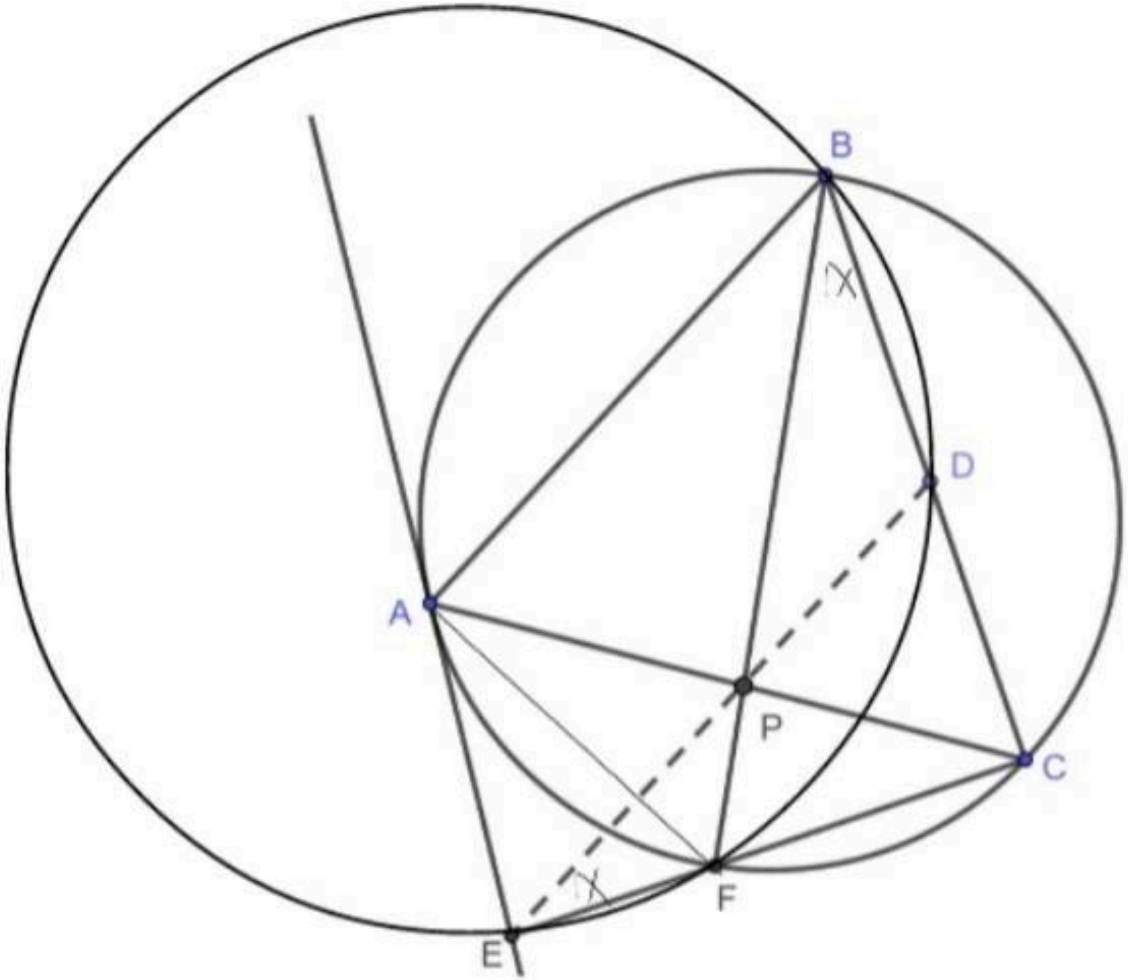
解決方法1.

∠CBA=180°- ∠EDB=180°- ∠EFB
=180°- ∠EFA- ∠AFB
=180°- ∠CBA- ∠ACB= ∠BAC

設P為線段AC和線段BF之交點。我們可以得出
∠PAE = ∠CBA = ∠BAC = ∠BFC.

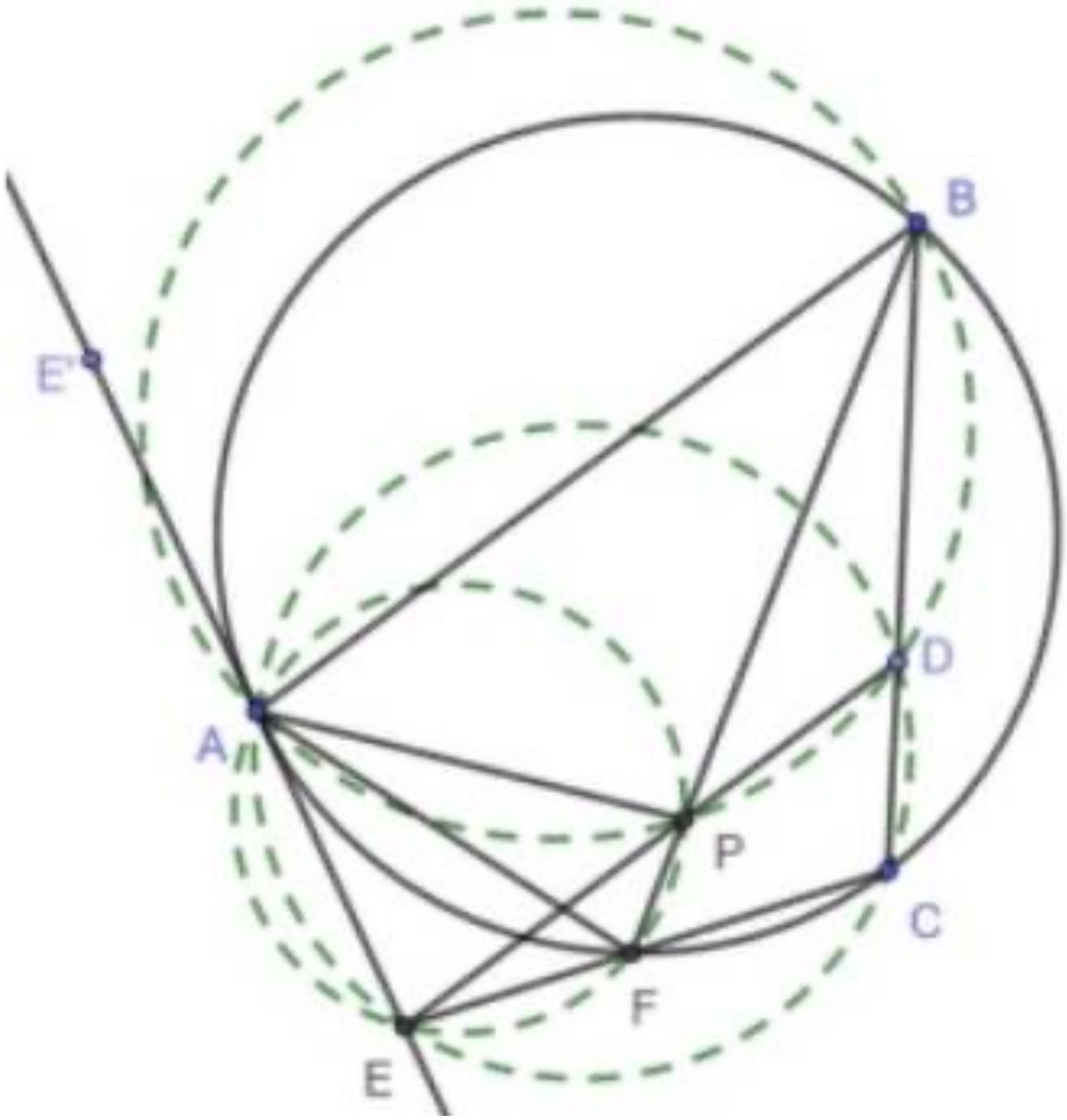
這也暗示著說A, P, F, E 是同圓的。而後可求出
∠FPE = ∠FAE = ∠FBA,

而因此線段AB與線段EP平行.
所以點E、P、D共線,結果也由此而出。



解決方法2.

另E'為直線EA延伸上的點.
由 ∠AED = ∠E’AB = ∠ACD, 可知點A, D, C, E 為共圓. 另 P點是線段BF 和線段DE的交點.
由 ∠AFP = ∠ACB = ∠AEP, 可知點A, P, E, F為共圓.此外,由 ∠EPA = ∠EFA = ∠DBA, 可知點 A, B, D, P 為共圓. 藉由考慮 (BDFE),(APFE) 和 (BDPA)三圓的激進中心. 我們可以找到線段BD,線段AP,線段EF交於C點。以上可知結果。



類似題

做一個任意三角形ABC，在AB、BC、AC邊上各
做出一個正三角形，假設對應頂點為D、E、F。
試證:AE、BD、CF共點

類似題解答

作正三角形△CAD、△ABF 的外接圓 O1、O2，設兩圓交於 Q 點（和 A 點）， 連QB、QF、QD、QC

∵在 O1 中，$\angle DQC = \frac{1}{2}DC = 60^{\circ}$，$\angle CQA = \frac{1}{2}CA = 60^{\circ}$， 又在 O2 中，$\angle BQF = \frac{1}{2}BF = 60^{\circ}$，$\angle AQB = \frac{1}{2}AB = 60^{\circ}$

∴ $\angle DQC + \angle CQA + \angle AQB = 180^{\circ}$ 且 $\angle CQA + \angle AQB + \angle BQF = 180^{\circ}$ 即 B、Q、D 三點共線且 C、Q、F 三點共線 ⇒ $\overleftrightarrow{BD}$ 和 $\overleftrightarrow{CF}$ 交於 Q 點，再作正三角形△BCE 的外接圓 O3，設 O1、O3 交於 P 點（和 C 點） ，連接PD、PC、PA、PE、PB

∵在圓 O1 中，$\angle CPA = \frac{1}{2}CA = 60^{\circ}$，又在圓 O3 中，$\angle CPE = \frac{1}{2}CE = 60^{\circ}$

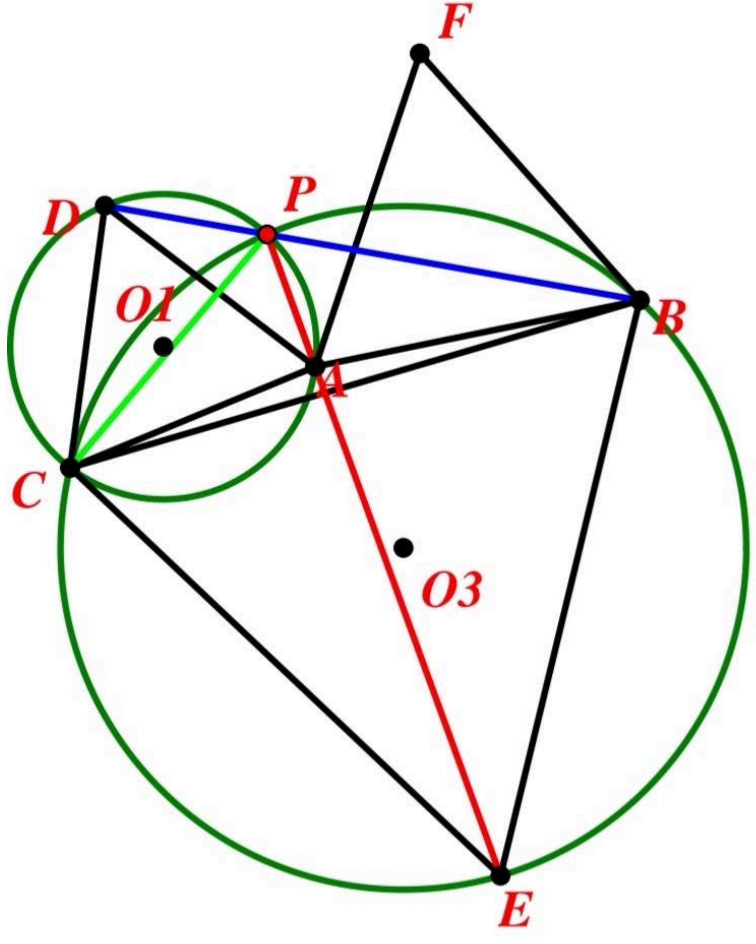
∴ $\angle CPA = \angle CPE = 60^{\circ}$ ⇒ P、A、E三點共線

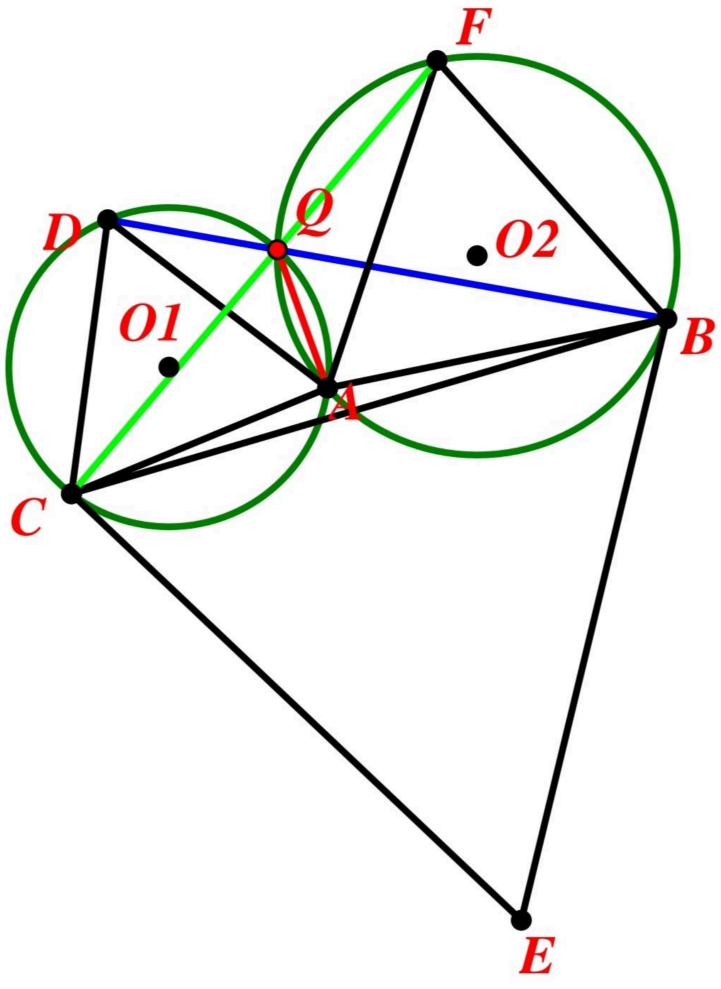
∵ $\angle BPE + \angle EPC + \angle DPC = 180^{\circ}$

∴B、P、D 三點共線

∵Q 點、P 點均為 $\overleftrightarrow{BD}$ 與圓 O1 之交點

∴P 點即為 Q 點 ⇒ $\underset{AE}{\leftrightarrow}$ 、 $\underset{BD}{\leftrightarrow}$ 、 $\underset{CF}{\leftrightarrow}$ 三線共點


F
P
D
O1
B
A
C
O3
E


F
Q
D
O2
O1
B
A
C
E

資料來源:

https://www.apmo-official.org/static/solutions/apmo2020_sol.p

https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/56/pdf/030421.pdf

https://mathworld.wolfram.com/RadicalCenter.html