數學解題方法 期末報告

第一組

數與型

組員:

410731111 吳瑞琪

410731121 曾渤孟

410731130 陳宥諭

410731145 張劭恩

410731147 吳冠穎

目錄

摘要

本次報告會介紹圖形數以及和圖形相關的數列，從多角數的介紹與雙重、三重多角數問題出發到耳熟能詳的費氏數列並補充其他一樣和圖形、幾何相關的卡塔蘭數，巴都萬數列

壹、 圖形數

多角數

1.定義：如上圖中，邊長為 n 的正 K 邊形陣列數我們稱之為第 n 個 K 角數。

2. 第 n 個三角數 $=1+2+3+.....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

3.第 n 個四角數(平方數) $=1+3+5+.....+(2n-1)=n^2$

4.第 n 個五角數＝ $1+4+7+...+(3n-2)=\dfrac{n(1+3n-2)}{2}=\dfrac{n(3n-1)}{2}$

三角四角數(三角平方數)的存在性和個數問題：

假設第 n 個三角數=第 m 個四角數（平方數），則 $\frac{n(n+1)}{2}=m^2$

$\Rightarrow (2n+1)^2-2(2m)^2=1$

令 $x=2n+1$，$y=2m$

則 $x^2-2y^2=1$ 為一佩爾方程必有無限多組正整數解，

又 $x^2=1+2y^2$ 必為奇數，所以 x 必為奇數，若 $x=2n+1$ 則

$2y^2=(x+1)(x-1)=2(n+1)\times 2n \Rightarrow y^2=2n(n+1)$ 為偶數，所以 y 必為偶數，所以(m,n)也有無限多組正整數解。因此**三角平方數存在，且有無限多個**。

佩爾方程 $x^2-dy^2=1$ 的正整數解的遞推式：

設 (x_n,y_n) 和 (x_{n+1},y_{n+1}) 分別是佩爾方程 $x^2-dy^2=1$ 的第 n 和第 n+1 組正整數解

則 $x_n+y_n\sqrt{d}=\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)^n$ 且 $x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{d}=\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)^{n+1}$

所以 $x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{d}=\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)^{n+1}=\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)\left(x_n+y_n\sqrt{d}\right)$

$=\left(x_1x_n+dy_1y_n\right)+\left(y_1x_n+x_1y_n\right)\sqrt{d}$

因此得到遞推式：$x_{n+1}=x_1x_n+dy_1y_n$ （1）

且 $y_{n+1}=y_1x_n+x_1y_n$ (2）

即遞推式：$\begin{cases} x_{n+1}=x_1x_n+dy_1y_n \\ y_{n+1}=y_1x_n+x_1y_n \end{cases}$ （※※）

因為基本解 $\left(x_1,y_1\right)=(3,2)$ 又 $d=2$

所以**可得二元遞推式** $\begin{cases} x_{k+1}=3x_k+4y_k \\ y_{k+1}=2x_k+3y_k \end{cases}$ 此已足夠讓我快速算出其解，利用 excel 的遞推公式功能可得下表

x=2n+1	y=2m	n	m	3-4角數
3	2	1	1	1
17	12	8	6	36
99	70	49	35	1225
577	408	288	204	41616
3363	2378	1681	1189	1413721
19601	13860	9800	6930	48024900

貳、 數列與圖形的關係

費氏數列

費波那契數，又譯為黃金分割數。所形成的數列稱為費波那契數列

- **性質**

  在數學上，費波那契數是以遞迴的方法來定義：

- $F_0 = 0$
- $F_1 = 1$
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$（n≧2）

用文字來說，就是費氏數列由 0 和 1 開始，之後的費波那契數就是由之前的兩數相加而得出。首幾個費波那契數是：

1、 2、 3、 5、 8、 13、 21、 34、 55、 89、 144、 233、 377、 610、 987……特別指出：0 不是第一項，而是第零項。

- **發展歷史**

公元 1150 年印度數學家 Gopala 和金月在研究箱子包裝物件長寬剛好為 1 和 2 的可行方法數目時，首先描述這個數列。在西方，最先研究這個數列的人是費波那契，他描述兔子生長的數目時用上了這數列:

1.第一個月初有一對剛誕生的兔子
2.第二個月之後（第三個月初）牠們可以生育
3.每月每對可生育的兔子會誕生下一對新兔子
4.兔子永不死去

假設在 n 月有兔子總共 a 對，n+1 月總共有 b 對。在 n+2 月必定總共有 a+b 對：因為在 n+2 月的時候，前一月（n+1 月）的 b 對兔子可以存留至第 n+2 月（在當月屬於新誕生的兔子尚不能生育)。而新生育出的兔子對數等於所有在 n 月就已存在的 a 對

- **與其他數列的關係**

1. 費波納契數也是帕斯卡三角的每一條紅色對角線上數字的和
2. 與黃金分割關係：

   斐波那契數列：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,……。一個完全是自然數的數列，通項公式卻是用無理數來表達的。而且當 n 趨向於無窮大時，前一項與後一項的比值越來越逼近黃金分割 0.618（或者說後一項與前一項的比值小數部分越來越逼近 0.618)。

   例如 1÷1=1，1÷2=0.5，2÷3=0.666，3÷5=0.6，5÷8=0.625，……，55÷89=0.617977，……，44÷233=0.61802575，……，46368÷75025=0.61803399，……，越到後面這些比值越接近黃金比。

- **推廣**

（1）斐波那契—盧卡斯數列

盧卡斯數列 1、3、4、7、11、18…，也具有斐波那契數列同樣的性質。我們可稱之為斐波那契—盧卡斯遞推：從第 3 項開始，每一項都等於前兩項之和

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$$

盧卡斯數列的通項公式為：

$$f(n)=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

斐波那契—盧卡斯數列之間的廣泛聯繫：

①任意兩個或兩個以上斐波那契—盧卡斯數列之和或差仍然是斐波那契—盧卡斯數列。

②任何一個斐波那契—盧卡斯數列都可以由斐波那契數列的有限項之和獲得。

類似的數列還有無限多個，我們稱之為斐波那契—盧卡斯數列。這兩個數列有一種特殊的聯繫：F(n)·L(n)=F(2n)及 L(n)=F(n-1)+F(n+1)

如數列 1，4，5，9，14，23…，因為 1，4 開頭，可記作 F[1，4]，斐波那契數列就是 F[1，1]，盧卡斯數列就是 F[1，3]，斐波那契—盧卡斯數列就是 F[a，b]。

(2)自然界中「巧合」

斐波那契數列中的斐波那契數會經常出現在我們的眼前——比如松果、鳳梨、樹葉的排列、某些花朵的花瓣數（典型的有向日葵花瓣），蜂巢，蜻蜓翅膀，超越數 e（可以推出更多），黃金矩形、黃金分割、等角螺線，十二平均律等。斐波那契數列在自然科學的其他分支，有許多應用。例如，樹木的生長，由於新生的枝條，往往需要一段「休息」時間，供自身生長，而後才能萌發新枝。所以，一株樹苗在一段間隔，例如一年，以後長出一條新枝；第二年新枝「休息」，老枝依舊萌發；此後，老枝與「休息」過一年的枝同時萌發，當年生的新枝則次年「休息」。這樣，一株樹木各個年份的枝椏數，便構成斐波那契數列。這個規律，就是生物學上著名的「魯德維格定律」

卡塔蘭數

卡塔蘭數(Catalan numbers)是組合數學中一個常在各種計數問題中出現的數列。以比利時的數學家歐仁·查理·卡塔蘭（1814–1894）命名。

- **性質**

1. 卡塔蘭數的一般項公式為$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$
2. C_n的另一個表達形式為$C_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}$ for n≥1，所以，C_n是一個自然數；這一點在先前的一般項公式中並不是顯而易見的。

3. 遞迴關係 ：

$$C_0 = 0 \; and \; C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} \; for \; n \geq 0$$

它也滿足 ：

$$C_0 = 0 \; and \; C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$$

4. 第三點提供了一個更快速的方法來計算卡塔蘭數。
卡塔蘭數的漸近增長為

$$C_n \sim \frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}$$

它的含義是當 n → ∞時，左式除以右式的商趨向於 1。(這可以用 n!的斯特靈公式來證明。)
所有的奇卡塔蘭數 Cn 都滿足$n = 2^k - 1$。所有其他的卡塔蘭數都是偶數。

而且

$$C_n = \int_0^4 x^n \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4}{x} - 1} \, dx$$

- **發展歷史**

1730 年，中國清代蒙古族數學家明安圖比卡特蘭更早使用了卡特蘭數，在發現三角函數冪級數的過程中，見《割圜密率捷法》。後來他的學生在 1774 年將其完成發表，不過明安圖這裡對卡塔蘭數研究用處不大。
1753 年，尤拉在解決凸多邊形劃分成三角形問題的時候，推出了卡特蘭數。
1758 年，Johann Segner 給出了尤拉問題的遞迴關係；
1838 年，拉梅給出完整證明和簡潔表達式；歐仁·查理·卡塔蘭在研究河內塔時探討了相關問題，解決了括號表達式的問題。
1900 年，Eugen Netto 在著作中將該數歸功於卡塔蘭。
內蒙古師範大學教授羅見今 1988 年以及 1999 年的文獻研究表明實際上最初發現卡塔蘭數的也不是尤拉，而是明安圖。
最後，由比利時的數學家歐仁·查理·卡塔蘭命名。在中國卻應當由清代蒙古族數學家明安圖命名。

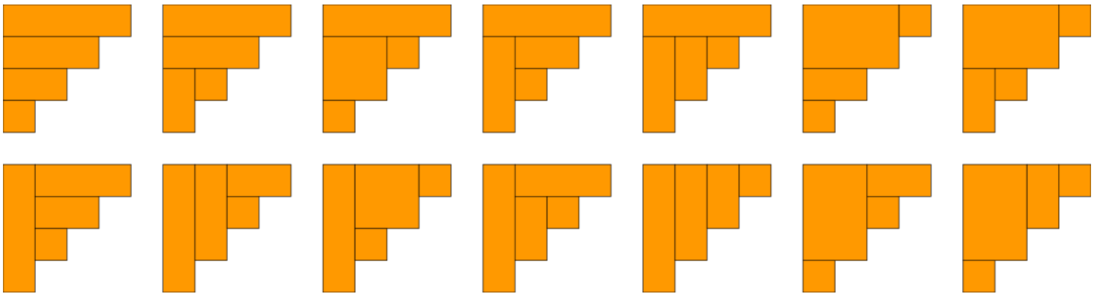
- **應用**

卡塔蘭數有很多與幾何有關的應用，以下會舉幾個例子做說明:

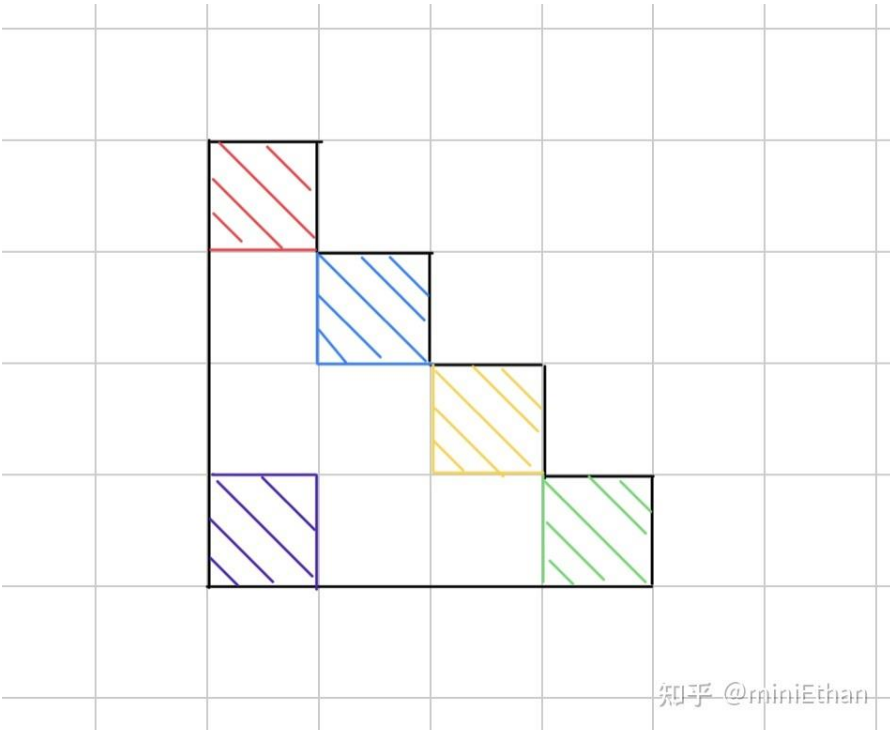
1. C_n表示用 n 個長方形填充一個高度為 n 的階梯狀圖形的方法個數

C_n表示用 n 個長方形填充一個高度為 n 的階梯狀圖形的方法個數。圖為

n = 4 的情況：

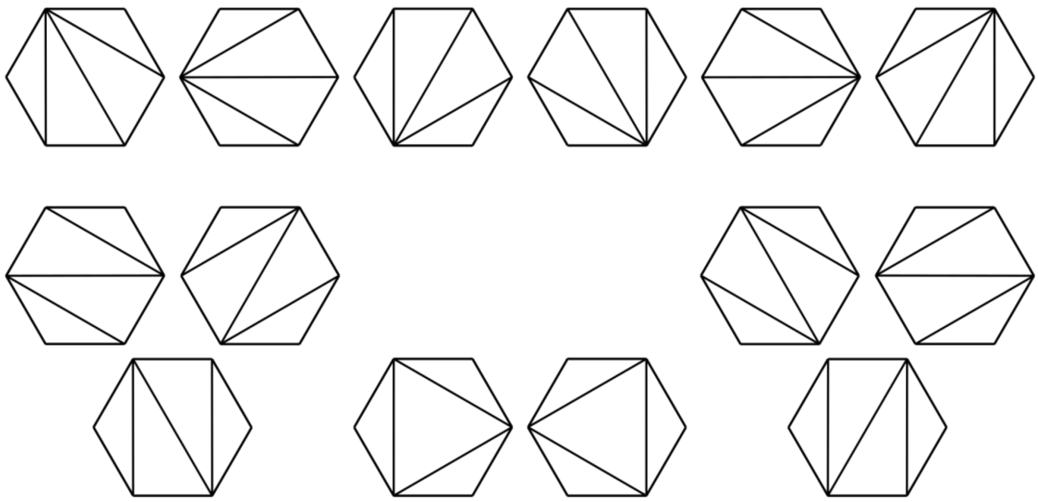


這裡可以設 f(n)是 n 階階梯可分成長方形方法數，f(0)=f(1)=1
給階梯著色，如下圖，紅藍黃綠的區塊必定在不同矩形，以紫色為基準，紅紫同矩形時，方法數為 f(0)f(3)，紫藍則是 f(1)f(2)，紫黃則是 f(2)f(1)，紫綠是 f(3)f(0)
f(4)=f(0)f(3)+ f(1)f(2) + f(2)f(1)+ f(3)f(0)，符合 Cn 的遞迴定義

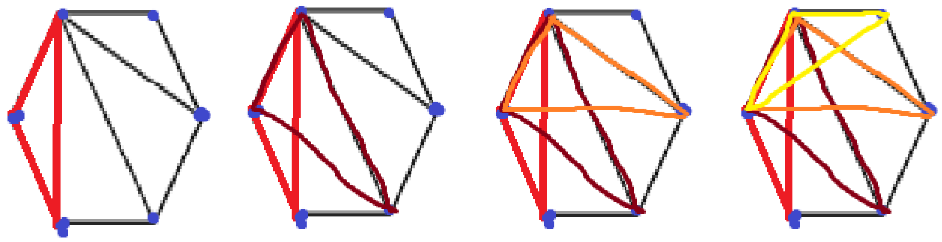


2.　C_n表示通過連結頂點而將 n + 2 邊的凸多邊形分成三角形的方法個數

Cn 表示通過連結頂點而將 n + 2 邊的凸多邊形分成三角形的方法個數。圖為 n = 4 的情況：

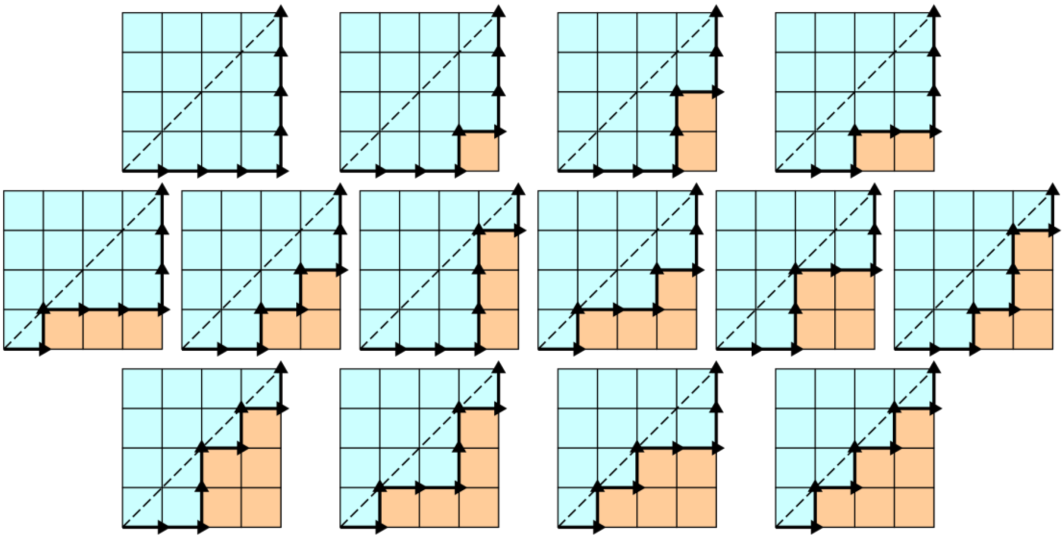


這邊則可以設 f(n)是 n+2 邊形劃分數，f(0)=f(1)=1
先選定一邊，再從剩下的點選一點當三角形頂點，多邊形被分成兩塊
和前面概念類似，下圖的情況即是 f(0)f(3)
六邊形劃分數就是 f(4)=f(0)f(3)+ f(1)f(2) + f(2)f(1)
+ f(3)f(0)，即C_4



3. C_n表示所有在 $n \times n$ 格點中不越過對角線的單調路徑的個數

C_n表示所有在 $n \times n$ 格點中不越過對角線的**單調路徑**的個數。一個單調路徑從格點左下角出發，在格點右上角結束，每一步均為向上或向右。計算這種路徑的個數等價於計算 Dyck word 的個數：X 代表「向右」，Y 代表「向上」。下圖為 n = 4 的情況：

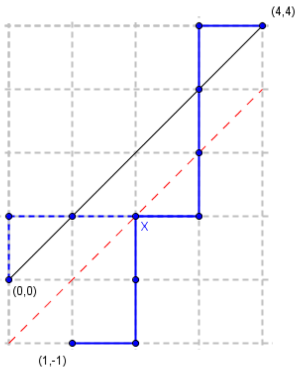


這個問題可以先設左下角為原點，右上角為(n, n)，如下圖

總行走路徑方法為$\binom{2n}{n}$，即 2n 步中 n 步向右、向上的組合數

延伸圖形，做(0, -1)到(n, n-1)連線，可發現穿越對角線的路徑都能和(1, -1)到(n, n)對應(沿紅線反射)

所以方法數為$\binom{2n}{n}$- $\binom{2n}{n-1} = C_n$



巴都萬數列

$$P(0) = P(1) = P(2) = 1$$
$$P(n) = P(n-2) + P(n-3)$$

$P(n)$ 的前幾個值是：

1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151, 200, 265, ...

巴都萬數列是一個整數的數列，然後他是根據旁邊這個圖來定義他每一項的值，他的前三項都是 1，第四項開始可以從他前二項，和前第三項相加得到

- **發展歷史**

接下來我來稍微介紹他的由來，因為網路上找到關於這個數列的歷史幾乎

是沒有，八都萬數列的命名是以建築師理查・八都萬來命名，但他把這個數列的發現歸功給荷蘭的建築師，漢斯范德蘭在 1994 年發表的論文

- **性質**

1. 遞迴關係

我們來了解一下八都萬數列他的一些性質，他的遞迴關係，

- $P_n = P_{n-1} + P_{n-5}$（此關係可從圖中見得）
- $P_n = P_{n-2} + P_{n-4} + P_{n-8}$
- $P_n = P_{n-3} + P_{n-4} + P_{n-5}$
- $P_n = P_{n-4} + P_{n-5} + P_{n-6} + P_{n-7} + P_{n-8}$

佩蘭數列滿足相同的遞迴關係。它亦可從巴都萬數列定義：$Perrin_n = P_{n+1} + P_{n-10}$

這邊說明了他的其中一項會剛好等於前幾項的和，像是第三個，Pn=前三到前五項的和相加，然後佩蘭數列他也跟八都萬數列一樣滿足相同的遞迴關係

2. 反巴都萬數列

接下來是反八都萬數列

使用遞迴關係 $P_{-n} = P_{-n+3} - P_{-n+1}$ 可將巴都萬數列推廣到負數項。這樣的定義跟將斐波那契數推廣到反費氏數列相似。另一方面，反費氏數列取絕對值便和費氏數列相等，但反巴都萬數列卻不：

... -7, 4, 0, -3, 4, -3, 1, 1, -2, 2, -1, 0, 1, -1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1 ...

3. 項的和

首 n 項（包括第0項）之和比 P_{n+5} 少2：

$$\sum_{m=0}^{n} P_m = P_{n+5} - 2.$$

下面是每隔數項的和：

$$\sum_{m=0}^{n} P_{2m} = P_{2n+3} - 1$$
$$\sum_{m=0}^{n} P_{2m+1} = P_{2n+4} - 1$$
$$\sum_{m=0}^{n} P_{3m} = P_{3n+2}$$
$$\sum_{m=0}^{n} P_{3m+1} = P_{3n+3} - 1$$
$$\sum_{m=0}^{n} P_{3m+2} = P_{3n+4} - 1$$
$$\sum_{m=0}^{n} P_{5m} = P_{5n+1}.$$

下面的恆等式跟項與項的乘積之和有關：

$$\sum_{m=0}^{n} P_m^2 = P_{n+2}^2 - P_{n-1}^2 - P_{n-3}^2$$
$$\sum_{m=0}^{n} P_m^2 P_{m+1} = P_n P_{n+1} P_{n+2}$$
$$\sum_{m=0}^{n} P_m P_{m+2} = P_{n+2} P_{n+3} - 1.$$

4. 其他恆等式

$$P_n^2 - P_{n+1}P_{n-1} = P_{-n-7}.$$

巴都萬數列跟二項式係數之和有關：

$$\sum_{2m+n=k} \binom{m}{n} = P_{k-2}.$$

5. 估計值

$x^3 - x - 1 = 0$有三個根：唯一的實數根p（即銀數）和兩個複數根q和r。

$$P_n = \frac{p^n}{(3p^2-1)} + \frac{q^n}{(3q^2-1)} + \frac{r^n}{(3r^2-1)}.$$

因為q和r的絕對值都少於1，當n趨近無限，其冪會趨近0。因此，對於很大的n，可以以下面的公式估計：

$$P_n \approx \frac{p^n}{(3p^2-1)} = \frac{p^n}{4.264632...}.$$

從上面的公式亦知$\frac{P_{n+1}}{P_n}$的值趨近銀數。

6. 整數分拆上的意義

P_n可以用不同的整數分拆來定義。

- P_n是將$n+2$寫成一個有序、每項是2或3的和式的方法的數目。例如$P_6 = 4$，有4種方法將8寫成這類和式：
  2+2+2+2；2+3+3；3+2+3；3+3+2
- P_{2n-2}是將n寫成一個有序且式中沒有項為2的和式的方法的數目。例如$P_{5\times2-2} = P_8 = 7$，有7種方法將5寫成這類和式：
  1+1+1+1+1；1+1+3；1+3+1；3+1+1；4+1；1+4；5
- P_n是將n寫成一個有序且「回文型」且式中沒有項為2的和式的方法的數目。例如$P_9 = 9$，有9種方法將9寫成這類和式：
  9；1+7+1；1+1+5+1+1；1+1+1+3+1+1+1；1+1+1+1+1+1+1+1+1; 3+3+3；4+1+4；3+1+1+1+3; 1+3+1+3+1
- 若上述情況改為$P_8 = 8$，則數列如下：
  1+1+1+1+1+1+1+1: 4+4; 3+1+1+3; 1+3+3+1; 1+1+4+1+1; 1+6+1; 8
- P_n是將$n+4$寫成一個有序的、每項除以3都餘2的和式的方法的數目。例如$P_7 = 5$，有5種方法將11寫成這類和式：
  11；2+2+2+5；2+2+5+2；2+5+2+2；5+2+2+2

7. 多項式

巴都萬數列可以一般化成一個多項式的集。

$$P_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 0 \\ x, & \text{if } n = 1 \\ x^2, & \text{if } n = 2 \\ xP_{n-2}(x) + P_{n-3}(x), & \text{if } n \geq 3 \end{cases}$$

首七個巴都萬多項式為：

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= x^2 \\ P_3(x) &= x^2 + 1 \\ P_4(x) &= x^3 + x \\ P_5(x) &= x^3 + x^2 + x \\ P_6(x) &= x^4 + 2x^2 + 1 \\ P_7(x) &= x^4 + 2x^3 + x^2 + x \end{aligned}$$

8. 生成函數

巴都萬數列的生成函數為

$$G(P_n; x) = \frac{1 + x}{1 - x^2 - x^3}.$$

它可以用於證明巴都萬數跟幾何級數的項的積的等式，例如：

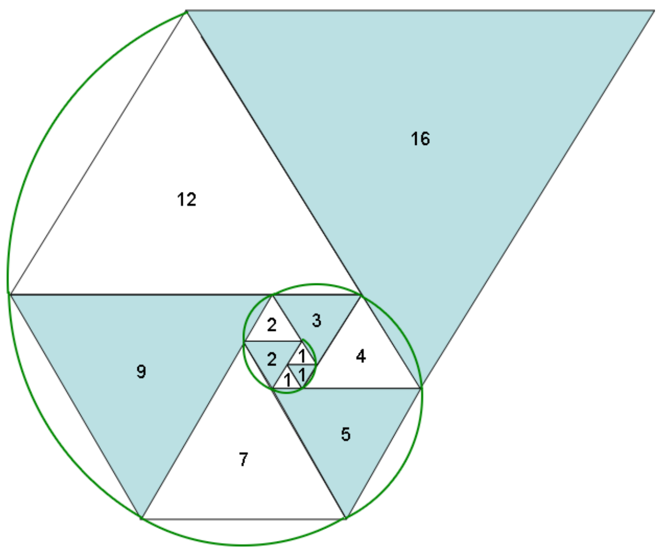
$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{P_n}{2^n} = \frac{12}{5}.$$

- **其他特質**

- 奇偶性：按「奇奇奇偶偶奇偶」的組合重覆出現。
- 數列中的質數：$P_{3,4} = 2; P_5 = 3; P_7 = 5; P_8 = 7; P_{14} = 37; P_{19} = 151; P_{30} = 3329; P_{37} = 23833; ..$
- 數列中的平方數：$P_{0,1,2} = 1; P_6 = 2^2; P_9 = 3^2; P_{11} = 4^2; P_{15} = 7^2$

以巴都萬數為邊長的等邊三角形組成的螺旋

→



參考資料

圖形數

1. chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/http://www.mathsgreat.com/numbers/numbers_002.pdf
2. https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/%E5%A4%9A%E9%82%8A%E5%BD%A2%E6%95%B8
3. chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/http://www.mathsgreat.com/numbers/numbers_003.pdf
4. 010031.pdf (ntsec.gov.tw)
   https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2013/pdf/010031.pdf

費氏數列

1. 費波那契數 - 維基百科，自由的百科全書 (wikipedia.org)
   https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/%E6%96%90%E6%B3%A2%E9%82%A3%E5%A5%91%E6%95%B0

卡塔蘭數

1. 卡塔蘭數 - 維基百科，自由的百科全書 (wikipedia.org)
   https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%8D%A1%E5%A1%94%E5%85%B0%E6%95%B0
2. 卡塔蘭 | Quod Erat Demonstrandum (wordpress.com)
   https://johnmayhk.wordpress.com/2014/02/03/cn/
3. Catalan 数相关问题 - 知乎 (zhihu.com)
   https://zhuanlan.zhihu.com/p/26066363
4. 神奇的卡塔兰(Catalan)数 - 知乎 (zhihu.com)
   https://zhuanlan.zhihu.com/p/385994583
5. 卡特蘭數_百度百科 (baidu.hk)
   https://baike.baidu.hk/item/%E5%8D%A1%E7%89%B9%E8%98%AD%E6%95%B8/6125746
6. cathist4.pdf (ucla.edu)
   https://www.math.ucla.edu/~pak/papers/cathist4.pdf

巴都萬數列

Richard Padovan. *Dom Hans van der Laan: modern primitive*:

Architectura & Natura Press, ISBN 9789071570407.
Natura Press, ISBN 9789071570407.