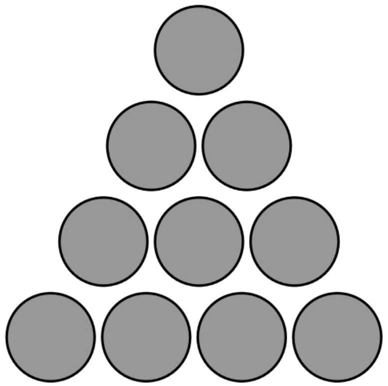
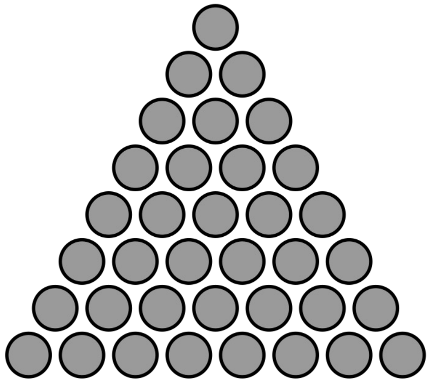
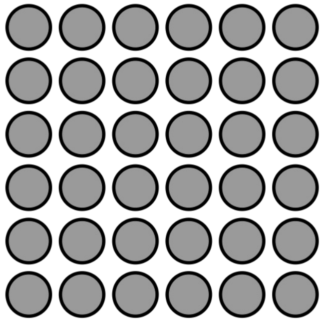
數與型 第一組

多角數

多角數是可以排成正多邊形的整數。古代數學家發現某些數目的豆子或珠子可以排成正多邊形。例如10可以排成三角形有些數既可排成三角形，又可排成正方形，例如36（這些數稱為三角平方數）

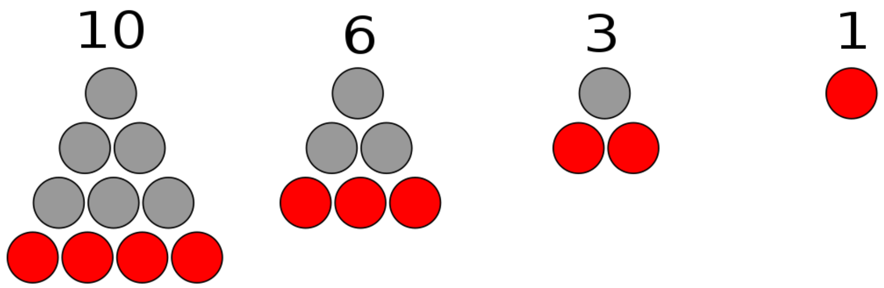




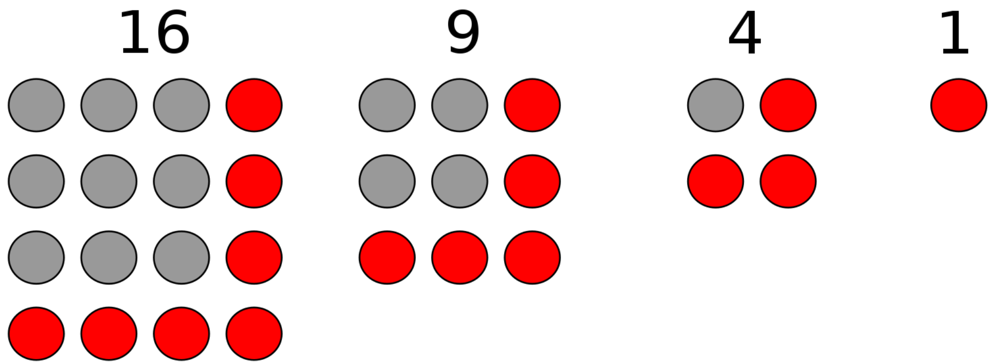


多邊形數可以幫助數數目。例如將一堆圓形的藥丸倒進一個等邊三角形的盒，便可以透過數每邊的藥丸數目來知道藥丸的數目。

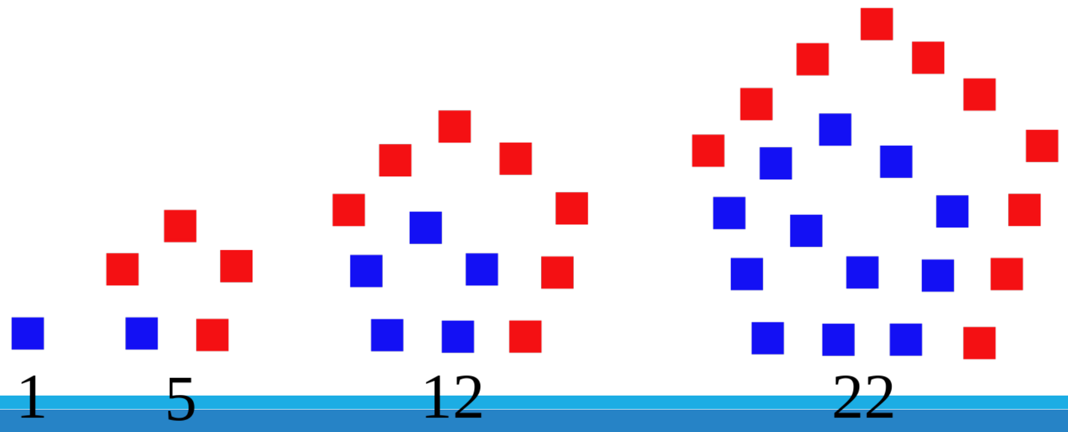
將多邊形數擴充到下一個項的方法是，擴充某兩個相連的臂，然後將中間的空白處補上。



三角數

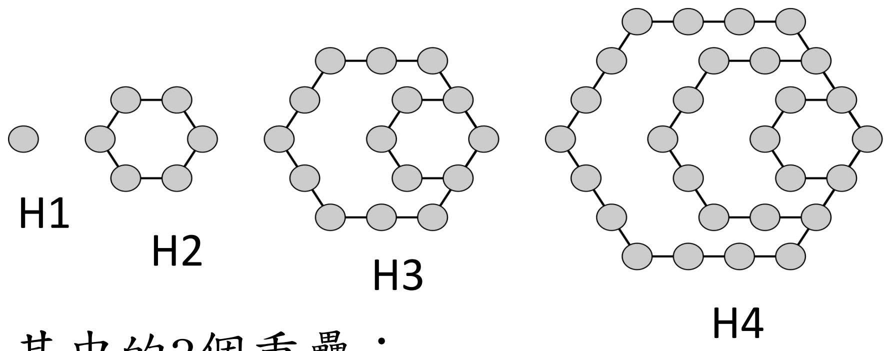


四角數



五角數

六角數 (Hexagonal Number)首5個「六角數」分別為1、6、15、28，若以Hn 表示第n個「六角數」，Hn =n(2n−1)以下以H1、H2、H3、H4 個點排成「六角」的圖形：



1.觀察 H5，H5 比H4 多了4排，每排5個，其中的3個重疊；

2. $H_5 = H_4 + 4 \times 5 - 3 = 28 + 20 - 3 = 45$；

3. 可以概推得， $H_k - H_{k-1} = 4k - 3$；

4. $(H_2 - H_1) + (H_3 - H_2) + \cdot\cdot\cdot + (H_n - H_{n-1})$

$= (4 \times 2 - 3) + (4 \times 3 - 3) + \cdot\cdot\cdot + 4n - 3$

$= 4 \times (2 + 3 + \cdot\cdot\cdot + n) - 3(n - 1)$

$= 4 \times \frac{(n+2)(n+1)}{2} - 3(n - 1)$

$= 2(n^2 + n - 2) - 3n + 3$

$= 2n^2 - n - 1$ 2

5. $H_1 = 1$， $H_n - H_1 = 2n^2 - n - 1$， $H_n = 2n^2 - n = n(2n - 1) H_1$

多角數(Polygonal Number)

如「六角數」一樣，若N 個點能如下排成一個「k-角形」，N 就是一個「k-角數」：

1. 先排一點在原點O；

2. 以 O為其中一個頂，多放k–1點成為「k-角形」的其餘k–1個頂；3. 選定以 O為頂的兩條邊，向外延一固定長的兩個位置上放兩點，以這兩條新的邊，每距同定長的位置上放下點，補上其餘k–2條邊，得每條邊上有3點的「k-角形」；

4. 如此，在每條邊上有n點的「k-角形」，再以O為頂的兩條邊，向外延一單位長的兩個位置上，放兩點，以這兩條新的邊，每一單位長的位置上放下點，補上其餘k–2條邊，排多一層「k-角形」；

5. 若 N 個點能恰好如此排成多層的「k-角形」，N 就是一個「k-角數」。

多角數的通項公式 $P_{k,n}=\frac{(n)(n+1)(k-2)}{2}$ +n

1. 若以 $P_{k,n}$ 表示第 n 個「k-角數」，首五個「k-角數」分別為 $P_{k,1}$ 、 $P_{k,2}$ 、 $P_{k,3}$ 、 $P_{k,4}$ 、 $P_{k,5}$ ，其中$P_{k,1}=1$、 $P_{k,2}=$ k；
2. 2. 由 $P_{k,n}$ 排成的「k-角形」，最外的一層有k 條邊，每條邊上有n點；
3. 3. 如「六角數」一樣， $P_{k,n}=P_{k,n-1}$ +n(k−2)−(k−3)，即 $P_{k,n}-P_{k,n-1}=$ n(k−2)−(k−3)；
4. 4. $(P_{k,n}-P_{k,n-1}) + (P_{k,n-1}-P_{k,n-2}) + \cdots + (P_{k,3}-P_{k,2}) + (P_{k,2}-P_{k,1})$
   =[n(k −2)−(k −3)]+[(n−1)(k −2)−(k −3)]+・・・+[3(k −2)−(k −3)]+[2(k −2)−(k −3)] =(k−2)[n+(n−1)+・・・+3+2]−(n−1)(k−3)
   =(k−2)× $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$ −(n−1)(k −3)

5. $P_{k,n}-P_{k,1}=$ (k −2)× $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$ −(n−1)(k −3)

$P_{k,n}=$ (k −2)× $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$ −(n−1)(k −3)+1

$P_{k,n}=\frac{(n)(n+1)(k-2)}{2}$+n

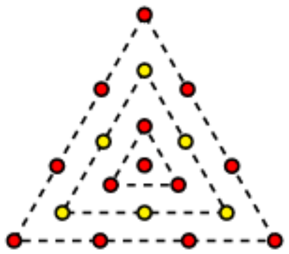
費馬多角數定理

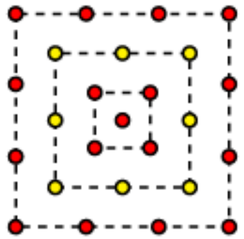
每個正整數可以表為不多於k個「k-角數」之和

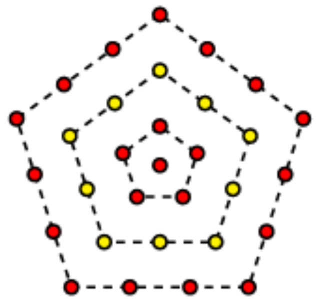
1. 費馬(Pierre de Fermat,1607-1665)曾經提出：每個正整數或者是一個三角數、或者是兩個或三個三角數之和；每個正整數或者是一個四角數、或者是兩個、三個或四個四角數之和；以及對任意n(n≥3) 角數也有類似的關系；
2. 費馬「聲稱」他已得到證明，唯沒有文獻記錄他的「證明」；
3. 拉格朗日(Joseph Louis Lagrange,1736-1813)于 1770年，證明了「每個正整數都可以表為不多于4 個四角數之和，即4個平方和」；
4. 1796年，高斯(C.F.Gauss,1777-1855)用「二次型」的理論證明了 n = 3 的情況；
5. 1815年，柯西(Augustin-Louis Cauchy,1789-1857)給出了一般情況的證明。

中心多角數

若N 個點能如下排成一個「k-角形」，N 就是一個「中心k-角數」：
1. 先排一點在原點O；
2. 以 O為中心，用k個點在O外圍成一個「k-角形」；
3. 在第一層的「k-角形」外，用2k 個點在外再圍出一個邊長為2單位的「k-角形」；
4. 在最外一層邊長為n的「k-角形」，用(n+1)k 個點在外再圍出一個邊長為n+1單位的「k-角形」；
5. 若 N 個點能恰好如此以O為中心，排成多層的「k-角形」，N 就是一個「中心k-角數」。6. 對于任意正整數k，1都是「中心k-角數」。


19 是「中心三角數」


25 是「中心四角數」


31 是「中心五角數」

中心k-角數」的通項公式

第n個「中心k-角數」 $P_{k,n}$==1+$\frac{kn(n+1)}{2}$

1.第 1 個「中心k-角數」只有1點， $P_{k,1}$ =1；

2. 第 2 個「中心k-角數」有多k點， $P_{k,2}$ =1+k；

3. 第 3 個「中心k-角數」比 $P_{k,2}$ 多一圈「k-角形」的點，因為每邊有3 點，唯頂上的點重複的數了兩次， $P_{k,3}$ = $P_{k,2}$ +k×3−k = $P_{k,2}$ +2k =1+k+2k；

4. 第 4 個「中心k-角數」比 $P_{k,3}$ 多一圈「k-角形」的點，其中每邊上4 點，頂上的點重複的數了兩次， $P_{k,4}$ = $P_{k,3}$ +k×4−k = $P_{k,3}$ +3k =1+k+2k+3k；

5. $P_{k,n}$ 比 $P_{k,n-1}$ 多一圈「k-角形」的點，其中每邊上 n 點，頂上的點重複的數了兩次， $P_{k,n}$ = $P_{k,n-1}$ + k ×n−k = $P_{k,n-1}$ +(n−1)k = 1+k+2k+3k+・・・+(n−1)k

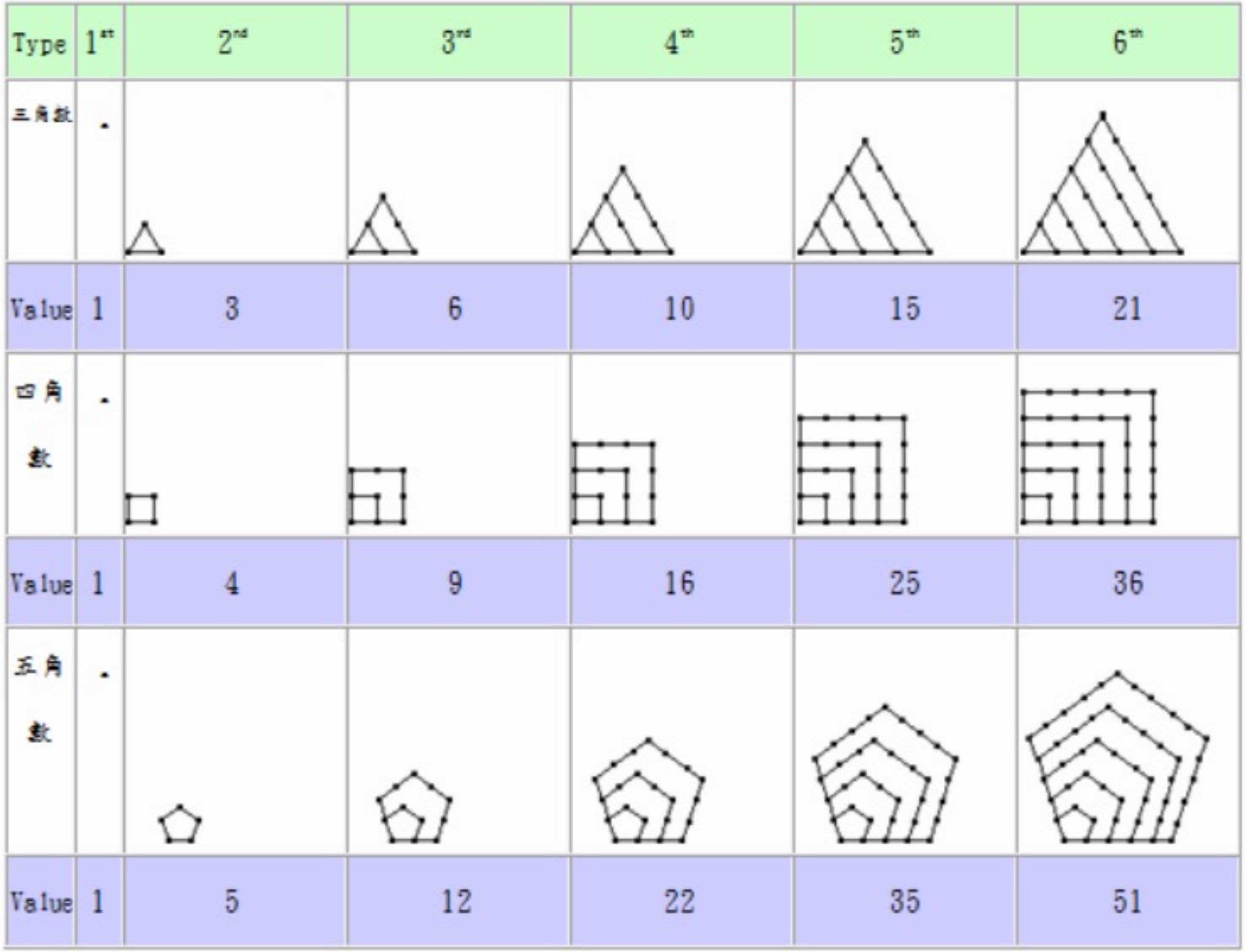
=1+k{1+2+3+・・・+(n−1)}

=1+$\frac{kn(n+1)}{2}$

參考資料

1. chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/http://www.mathsgreat.com/numbers/numbers_002.pdf
2. https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/%E5%A4%9A%E9%82%8A%E5%BD%A2%E6%95%B8
3. chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/http://www.mathsgreat.com/numbers/numbers_003.pdf

多角數



Type	1^{st}	2^{nd}	3^{rd}	4^{th}	5^{th}	6^{th}
三角數	·					
Value	1	3	6	10	15	21
四角數	·					
Value	1	4	9	16	25	36
五角數	·					
Value	1	5	12	22	35	51

1.定義：如上圖中，邊長為 n 的正 K 邊形陣列數我們稱之為第 n 個 K 角數。

2. 第 n 個三角數 $=1+2+3+.....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

3.第 n 個四角數(平方數) $=1+3+5+.....+(2n-1)=n^2$

4.第 n 個五角數＝ $1+4+7+...+(3n-2)=\dfrac{n(1+3n-2)}{2}=\dfrac{n(3n-1)}{2}$

韓信點兵
是三角數
又是四角數

三角四角數(三角平方數)的存在性和個數問題：

假設第 n 個三角數=第 m 個四角數（平方數），則 $\dfrac{n(n+1)}{2}=m^2$

$\Rightarrow (2n+1)^2-2(2m)^2=1$

令 $x=2n+1$，$y=2m$

則 $x^2-2y^2=1$ 為一佩爾方程必有無限多組正整數解，

又 $x^2=1+2y^2$ 必為奇數，所以 x 必為奇數，若 $x=2n+1$ 則

$2y^2=(x+1)(x-1)=2(n+1)\times 2n \Rightarrow y^2=2n(n+1)$ 為偶數，所以 y 必為偶數，所以(m,n)也有無限多組正整數解。因此**三角平方數存在，且有無限多個**。

佩爾方程 $x^2-dy^2=1$ 的正整數解的遞推式：

設 (x_n, y_n) 和 (x_{n+1}, y_{n+1}) 分別是佩爾方程 $x^2-dy^2=1$ 的第 n 和第 n+1 組正整數解

則 $x_n+y_n\sqrt{d}=\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)^n$ 且 $x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{d}=\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)^{n+1}$

所以 $x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{d}=\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)^{n+1}=\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)\left(x_n+y_n\sqrt{d}\right)$

$=(x_1x_n+dy_1y_n)+(y_1x_n+x_1y_n)\sqrt{d}$

因此得到遞推式：$x_{n+1}=x_1x_n+dy_1y_n$ （1）

且 $y_{n+1}=y_1x_n+x_1y_n$ (2)

即遞推式：$\begin{cases} x_{n+1}=x_1x_n+dy_1y_n \\ y_{n+1}=y_1x_n+x_1y_n \end{cases}$ （※※）

因為基本解(x_1, y_1)=(3,2) 又 d =2

所以**可得二元遞推式**$\begin{cases} x_{k+1} = 3x_k + 4y_k \\ y_{k+1} = 2x_k + 3y_k \end{cases}$ 此已足夠讓我快速算出其

解，利用 excel 的遞推公式功能可得下表

x=2n+1	y=2m	n	m	3-4角數
3	2	1	1	1
17	12	8	6	36
99	70	49	35	1225
577	408	288	204	41616
3363	2378	1681	1189	1413721
19601	13860	9800	6930	48024900

費波納契數列

費波那契數，又譯為黃金分割數。所形成的數列稱為費波那契數列

在數學上，費波那契數是以遞迴的方法來定義：

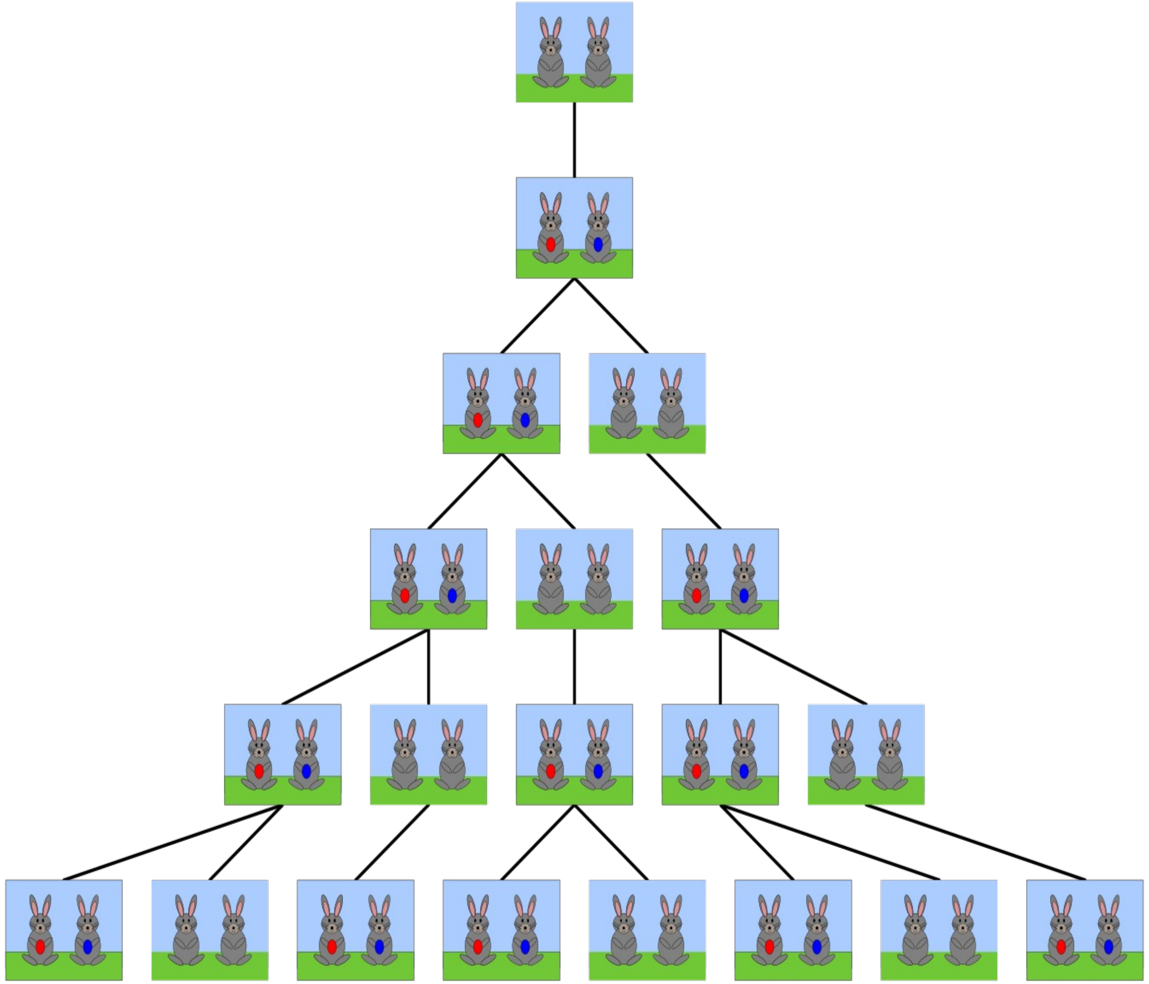
- $F_0 = 0$
- $F_1 = 1$
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$（n≧2）

用文字來說，就是費氏數列由0和1開始，之後的費波那契數就是由之前的兩數相加而得出。首幾個費波那契數是：

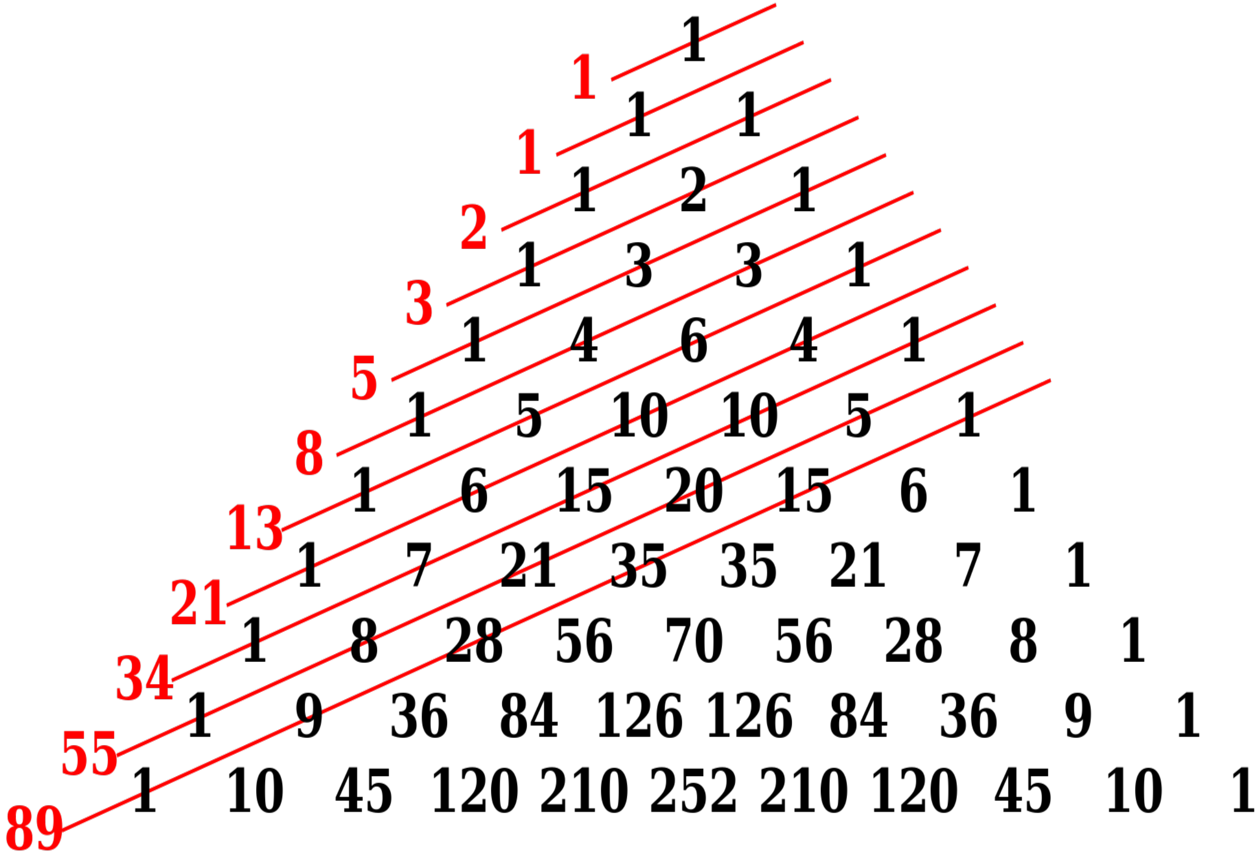
1、 1、 2、 3、 5、 8、 13、 21、 34、 55、 89、 144、 233、 377、 610、 987……特別指出：0不是第一項，而是第零項。

公元1150年印度數學家Gopala和金月在研究箱子包裝物件長寬剛好為1和2的可行方法數目時，首先描述這個數列。在西方，最先研究這個數列的人是費波那契，他描述兔子生長的數目時用上了這數列:

1. 第一個月初有一對剛誕生的兔子
2. 第二個月之後（第三個月初）牠們可以生育
3. 每月每對可生育的兔子會誕生下一對新兔子
4. 兔子永不死去



假設在n月有兔子總共a對，
n+1月總共有b對。在n+2月必定總共有a+b對：因為在n+2月的時候，前一月（n+1月）的b對兔子可以存留至第n+2月（在當月屬於新誕生的兔子尚不能生育）。而新生育出的兔子對數等於所有在n月就已存在的a對



費波納契數也是帕斯卡三角的每一條紅色對角線上數字的和

初等代數解法

已知

- $a_1 = 1$
- $a_2 = 1$
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$（n≥3）

首先構建等比數列

設$a_n + \alpha a_{n-1} = \beta(a_{n-1} + \alpha a_{n-2})$
化簡得
$a_n = (\beta - \alpha)a_{n-1} + \alpha\beta a_{n-2}$
比較係數可得：
$$\begin{cases} \beta - \alpha = 1 \\ \alpha\beta = 1 \end{cases}$$
不妨設$\beta > 0, \alpha > 0$
解得：

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \beta = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \end{cases}$$
又因為有$a_n + \alpha a_{n-1} = \beta(a_{n-1} + \alpha a_{n-2})$，即$\{a_n + \alpha a_{n-1}\}$為等比數列。

求出數列$\{a_n + \alpha a_{n-1}\}$

由以上可得：

$$\begin{aligned} a_{n+1}+\alpha a_n &= (a_2+\alpha a_1)\beta^{n-1} \\ &= (1+\alpha)\beta^{n-1} \\ &= \beta^n \end{aligned}$$

變形得：$\dfrac{a_{n+1}}{\beta^{n+1}}+\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{a_n}{\beta^n}=\dfrac{1}{\beta}$。令$b_n=\dfrac{a_n}{\beta^n}$

求數列$\{b_n\}$進而得到$\{a_n\}$

$$b_{n+1}+\frac{\alpha}{\beta}b_n=\frac{1}{\beta}$$

設$b_{n+1}+\lambda=-\dfrac{\alpha}{\beta}(b_n+\lambda)$，解得$\lambda=-\dfrac{1}{\alpha+\beta}$。故數列$\{b_n+\lambda\}$為等比數列

即$b_n+\lambda=\left(-\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}(b_1+\lambda)$。而$b_1=\dfrac{a_1}{\beta}=\dfrac{1}{\beta}$，故有$b_n+\lambda=\left(-\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{\beta}+\lambda\right)$

又有$\begin{cases}\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\\ \beta=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\end{cases}$ 和$b_n=\dfrac{a_n}{\beta^n}$

可得$a_n=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\cdot\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

得出a_n表達式

$$a_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

數論解法

實際上，如果將費氏數列的通項公式寫成$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$，即可利用解二階線性齊次遞迴關係式的方法，寫出其特徵多項式$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$（該式和表達費氏數列的矩陣的特徵多項式一致），然後解出$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$，$\lambda_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$，即有$a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$，其中$c_1, c_2$為常數。我們知道$a_0 = 0, a_1 = 1$，因此$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \frac{c_1(1+\sqrt{5})}{2} + \frac{c_2(1-\sqrt{5})}{2} = 1 \end{cases}$，解得$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$。

組合數解法

$F_n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-i}{i}$ [1]

$$F_{n-1} + F_n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-1-i}{i} + \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-i}{i} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \binom{n-i}{i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \binom{n-i}{i} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \binom{n+1-i}{i} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+1-i}{i} = F_{n+1}$$

黃金比例恆等式解法

設φ為黃金比例$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，則有恆等式$\varphi^n = F_{n-1} + F_n \times \varphi$與$(1-\varphi)^n = F_{n+1} - F_n \times \varphi$，其中$n$為任意整數[註 1]，則

$$\begin{aligned}\varphi^n - (1-\varphi)^n &= (F_{n-1} + \varphi F_n) - (F_{n+1} - \varphi F_n) \\ &= (F_{n-1} - F_{n+1}) + 2\varphi F_n \\ &= -F_n + 2\varphi F_n \\ &= F_n(2\varphi - 1) \\ &= F_n \times \sqrt{5}\end{aligned}$$

因此得到F_n的一般式：

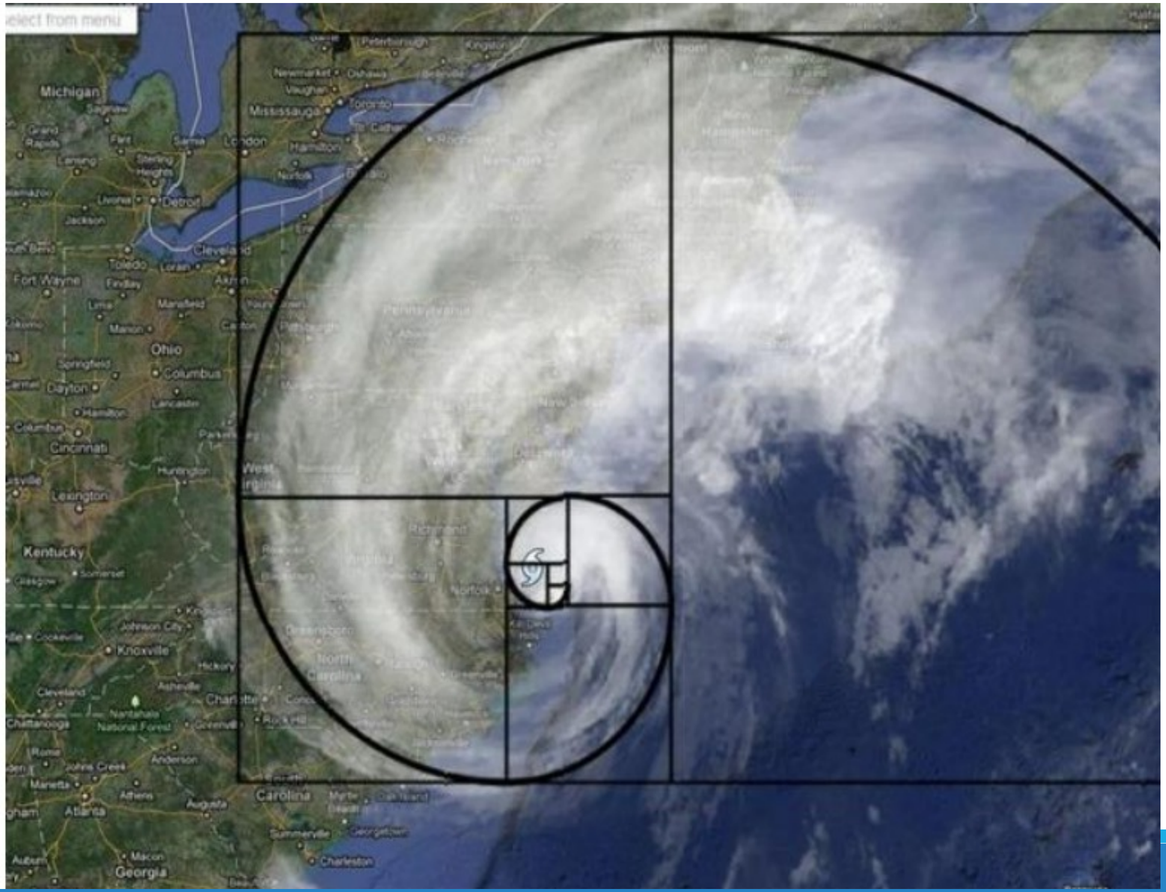
$$\begin{aligned}F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}[\varphi^n - (1-\varphi)^n] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right]\end{aligned}$$

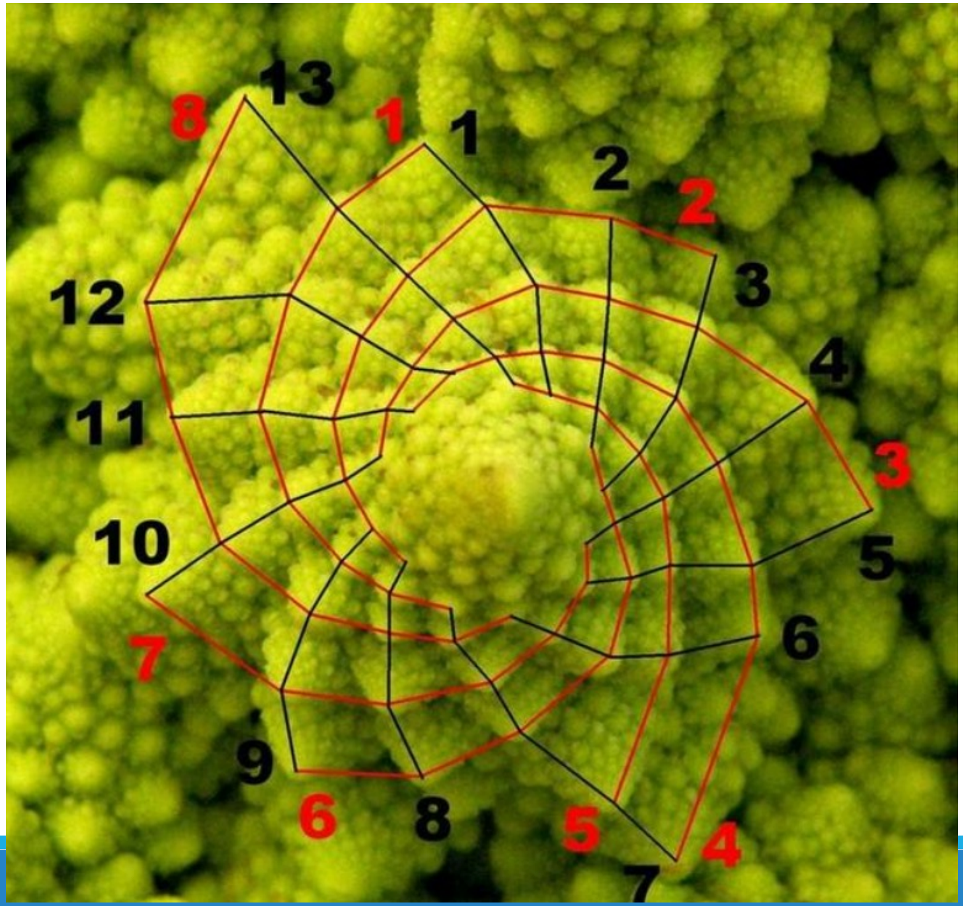
此一般式對任意整數n成立

與黃金分割關係：斐波那契數列：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,……。一個完全是自然數的數列，通項公式卻是用無理數來表達的。而且當n趨向於無窮大時，前一項與後一項的比值越來越逼近黃金分割0.618（或者說後一項與前一項的比值小數部分越來越逼近0.618）。

例如1÷1=1， 1÷2=0.5， 2÷3=0.666， 3÷5=0.6， 5÷8=0.625，……，55÷89=0.617977，……， 44÷233=0.61802575，……，

46368÷75025=0.61803399，……，越到後面這些比值越接近黃金比。





斐波那契數列的推廣

（1）斐波那契—盧卡斯數列

盧卡斯數列1、3、4、7、11、18…，也具有斐波那契數列同樣的性質。我們可稱之為斐波那契—盧卡斯遞推：從第3項開始，每一項都等於前兩項之和 $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$

盧卡斯數列的通項公式為： $f(n)=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

斐波那契—盧卡斯數列之間的廣泛聯繫：
①任意兩個或兩個以上斐波那契—盧卡斯數列之和或差仍然是斐波那契—盧卡斯數列。
②任何一個斐波那契—盧卡斯數列都可以由斐波那契數列的有限項之和獲得。
類似的數列還有無限多個，我們稱之為斐波那契—盧卡斯數列。這兩個數列有一種特殊的聯繫：
F(n)·L(n)=F(2n)及L(n)=F(n-1)+F(n+1)

如數列1，4，5，9，14，23…，因為1，4開頭，可記作F[1，4]，斐波那契數列就是F[1，1]，盧卡斯數列就是F[1，3]，斐波那契—盧卡斯數列就是F[a，b]。

斐波那契─盧卡斯數列的另一個共同性質：中間項的平方數與前後兩項之積的差的絕對值是一個恆值。

斐波那契數列：$|1\times1-1\times2|=|2\times2-1\times3|=|3\times3-2\times5|=|5\times5-3\times8|=\ldots=1$

盧卡斯數列：$|3\times3-1\times4|=|4\times4-3\times7|=\ldots=5$

F[1，4]數列：$|4\times4-1\times5|=11$

F[2，5]數列：$|5\times5-2\times7|=11$

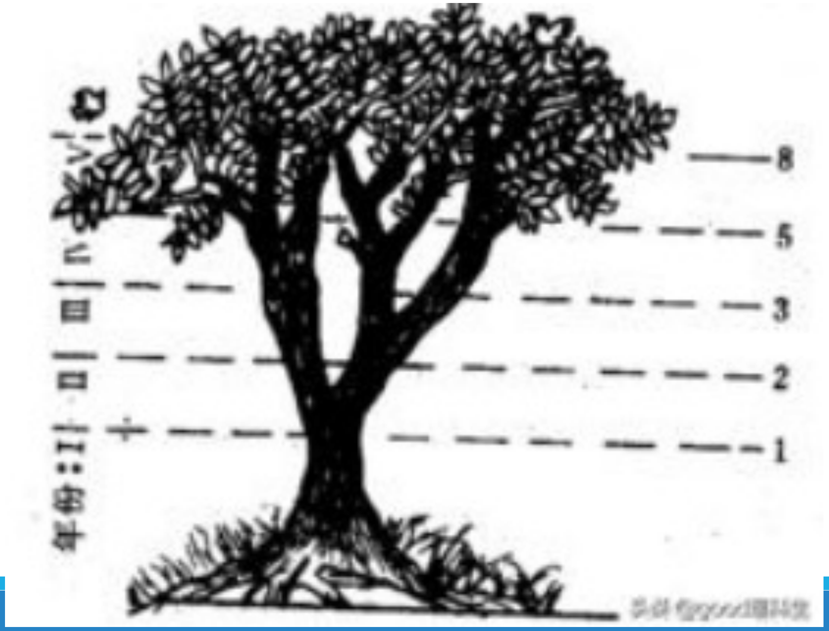
F[2，7]數列：$|7\times7-2\times9|=31$

斐波那契數列這個值是1最小，也就是前後項之比接近黃金比例最快，我們稱為黃金特徵，黃金特徵1的數列只有斐波那契數列，是獨生數列。盧卡斯數列的黃金特徵是5，也是獨生數列。前兩項互質的獨生數列只有斐波那契數列和盧卡斯數列這兩個數列。而F[1，4]與F[2，5]的黃金特徵都是11，是孿生數列。F[2，7]也有孿生數列：F[3，8]。其他前兩項互質的斐波那契─盧卡斯數列都是孿生數列，稱為孿生斐波那契─盧卡斯數列。

自然界中「巧合」

斐波那契數列中的斐波那契數會經常出現在我們的眼前——比如松果、鳳梨、樹葉的排列、某些花朵的花瓣數（典型的有向日葵花瓣），蜂巢，蜻蜓翅膀，超越數e（可以推出更多），黃金矩形、黃金分割、等角螺線，十二平均律等。斐波那契數列

在自然科學的其他分支，有許多應用。例如，樹木的生長，由於新生的枝條，往往需要一段「休息」時間，供自身生長，而後才能萌發新枝。所以，一株樹苗在一段間隔，例如一年，以後長出一條新枝；第二年新枝「休息」，老枝依舊萌發；此後，老枝與「休息」過一年的枝同時萌發，當年生的新枝則次年「休息」。這樣，一株樹木各個年份的枝椏數，便構成斐波那契數列。這個規律，就是生物學上著名的「魯德維格定律」。



斐波那契數還可以在植物的葉、枝、莖等排列中發現。例如，在樹木的枝幹上選一片葉子，記其為數0，然後依序點數葉子（假定沒有折損），直到到達與那些葉子正對的位置，則其間的葉子數多半是斐波那契數。葉子從一個位置到達下一個正對的位置稱為一個循回。葉子在一個循回中旋轉的圈數也是斐波那契數。在一個循回中葉子數與葉子旋轉圈數的比稱為葉序比。多數的葉序比呈現為斐波那契數的比。

另外，觀察延齡草、野玫瑰、南美血根草、大波斯菊、金鳳花、耬斗菜、百合花、蝴蝶花的花瓣，可以發現它們花瓣數目具有斐波那契數：3、5、8、13、21、……其中，百合花為3瓣，梅花5瓣，飛燕草8瓣，萬壽菊13瓣，向日葵21或34瓣，雛菊有34,55和89三個數目的花瓣。

這些植物是按照自然的規律才進化成這樣。這似乎是植物排列種子的「優化方式」，它能使所有種子具有差不多的大小卻又疏密得當，不至於在圓心處擠了太多的種子而在圓周處卻又稀稀拉拉。葉子的生長方式也是如此，對於許多植物來說，每片葉子從中軸附近生長出來，為了在生長的過程中一直都能最佳地利用空間（要考慮到葉子是一片一片逐漸地生長出來，而不是一下子同時出現的），每片葉子和前一片葉子之間的角度應該是222.5度，這個角度稱為「黃金角度」，因為它和整個圓周360度之比是黃金分割數0.61803398…的倒數，而這種生長方式就決定了斐波那契螺旋的產生。向日葵的種子排列形成的斐波那契螺旋有時能達到89，甚至144條。1992年，兩位法國科學家通過對花瓣形成過程的計算機仿真實驗，證實了在系統保持最低能量的狀態下，花朵會以斐波那契數列長出花瓣。

Catalan numbers

卡塔蘭數(Catalan numbers)是組合數學中一個常在各種計數問題中出現的數列。以比利時的數學家歐仁·查理·卡塔蘭（1814–1894）命名。

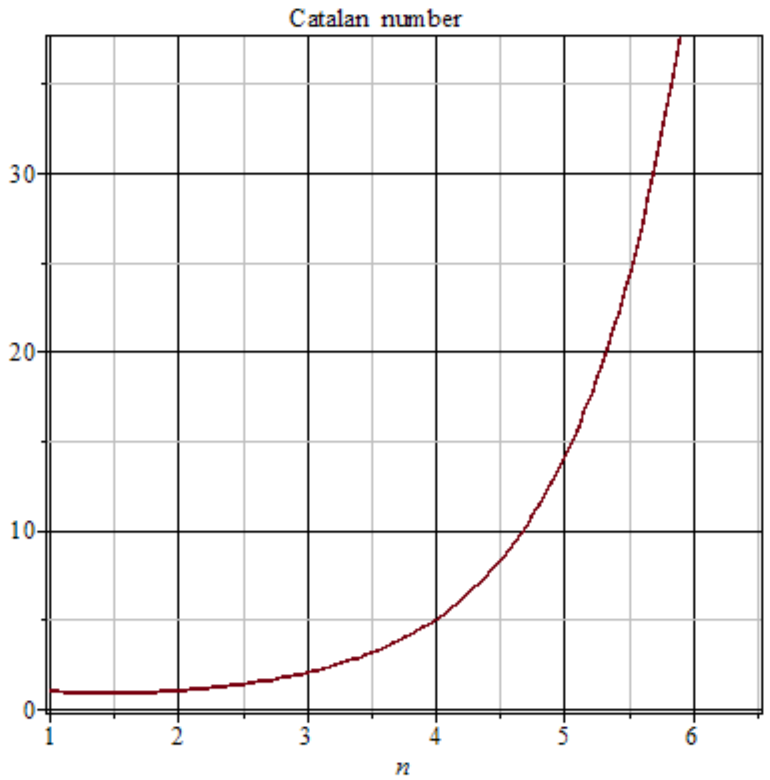
歷史上，清朝數學家明安圖（1692年－1763年）在其《割圜密率捷法》中最先發明這種計數方式，遠遠早於卡塔蘭。

第0項到第19項的卡塔蘭數為：1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190

Catalan numbers

卡塔蘭數的一般項公式為$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$

C_n的另一個表達形式為$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$ for n≥1，所以，C_n是一個自然數；這一點在先前的一般項公式中並不是顯而易見的。



Catalan numbers

遞迴關係 :

$$C_0 = 0 \; and \; C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} \; for \; n \geq 0$$

它也滿足 :

$$C_0 = 0 \; and \; C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$$

應用

卡塔蘭數有很多與幾何有關的應用：

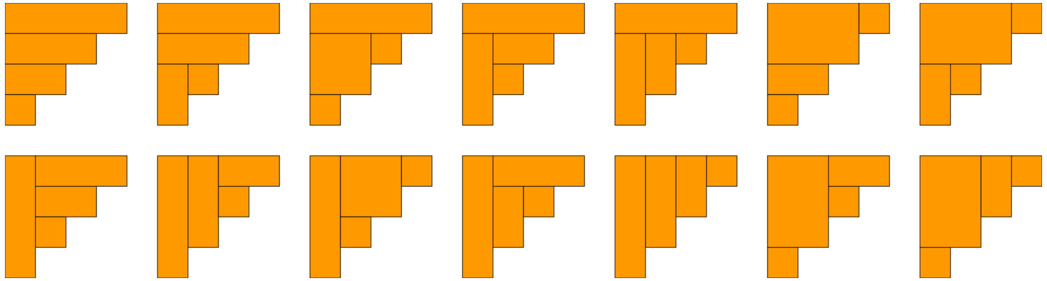
一. C_n表示用n個長方形填充一個高度為n的階梯狀圖形的方法個數。

二. C_n表示通過連結頂點而將$n+2$邊的凸多邊形分成三角形的方法個數。

三. C_n表示所有在$n \times n$格點中不越過對角線的**單調路徑**的個數。

應用一

C_n表示用n個長方形填充一個高度為n的階梯狀圖形的方法個數。圖為$n = 4$的情況：

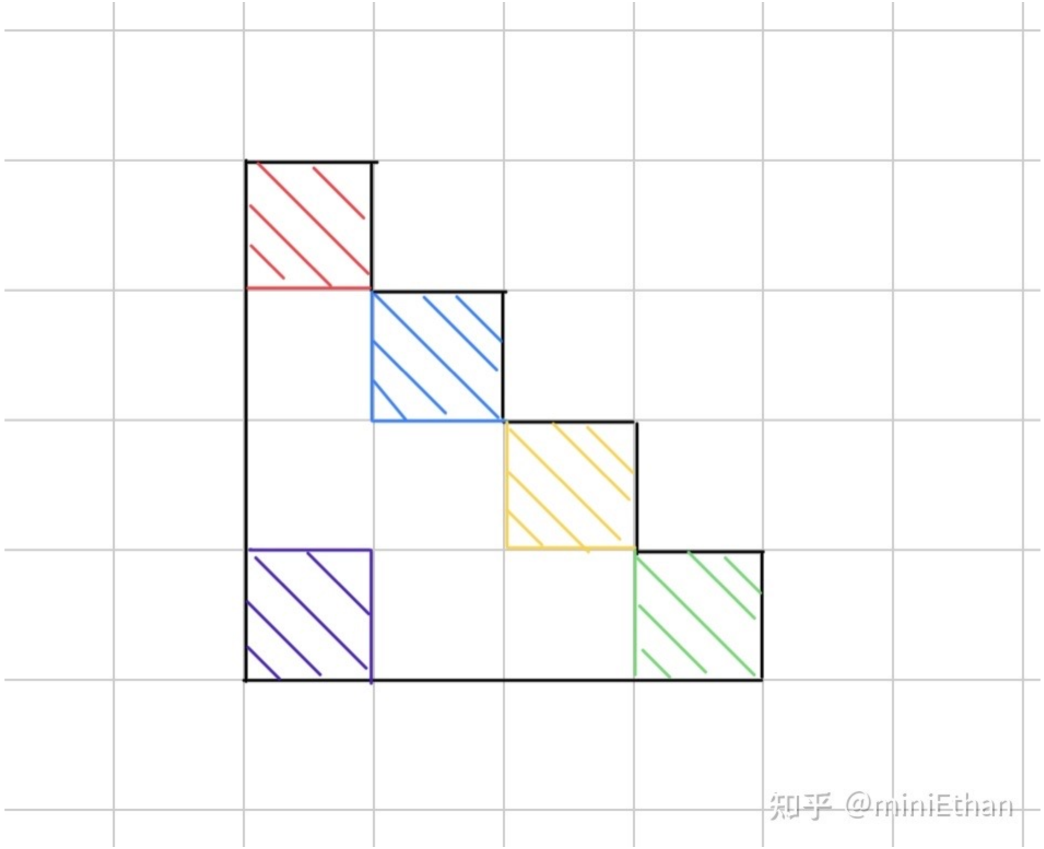


應用一

設f(n)是n階階梯可分成長方形方法數，f(0)=f(1)=1

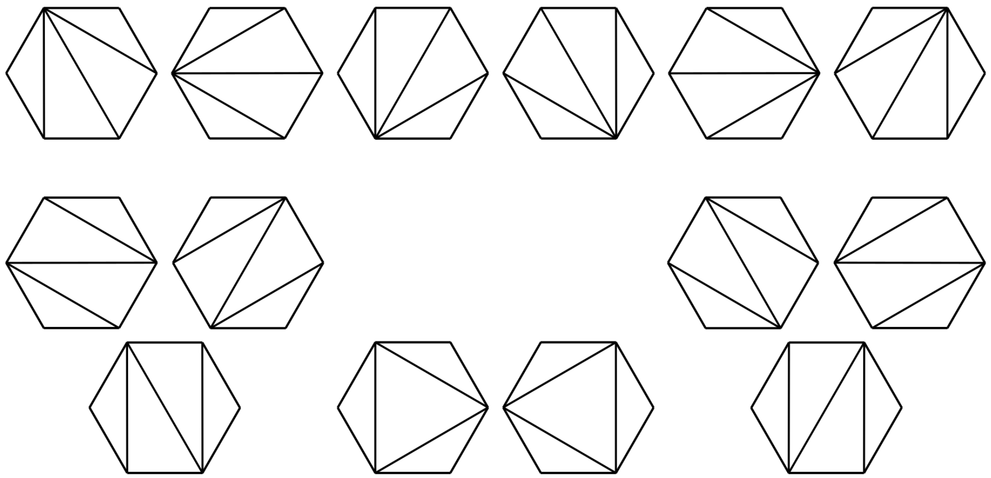
給階梯著色，紅藍黃綠的區塊必定在不同矩形，以紫色為基準，紅紫同矩形時，方法數為f(0)f(3)，紫藍則是f(1)f(2)，紫黃則是f(2)f(1)，紫綠是f(3)f(0)

f(4)=f(0)f(3)+ f(1)f(2) + f(2)f(1)+ f(3)f(0)，符合Cn的遞迴定義



應用二

Cn表示通過連結頂點而將n + 2邊的凸多邊形分成三角形的方法個數。圖為n = 4的情況：



應用二

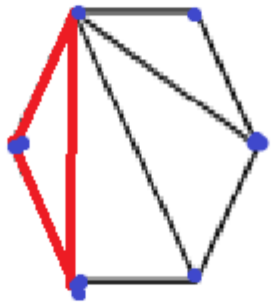
設f(n)是n+2邊形劃分數，f(0)=f(1)=1

先選定一邊，再從剩下的點選一點當三角形頂點，多邊形被分成兩塊

和前面概念類似，右圖的情況即是f(0)f(3)

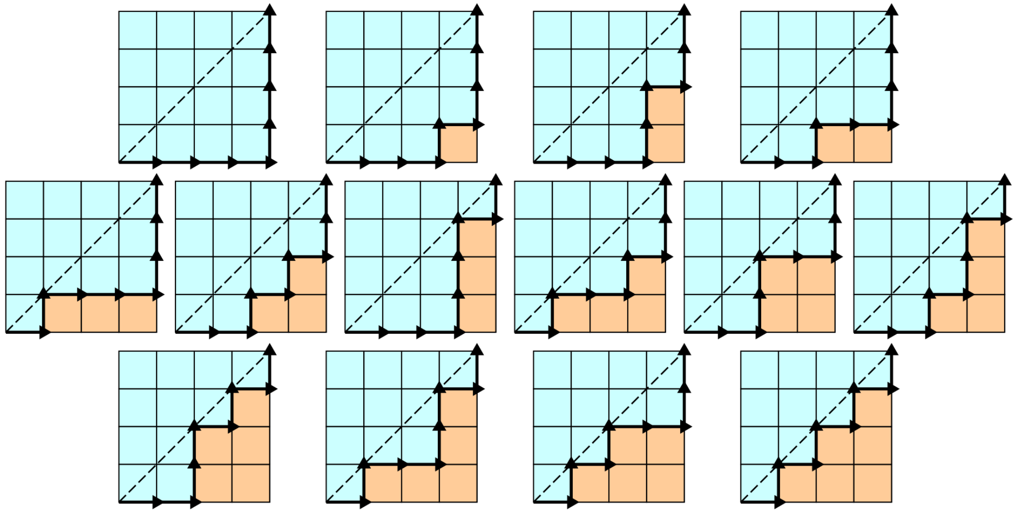
六邊形劃分數就是f(4)=f(0)f(3)+ f(1)f(2) + f(2)f(1)

+ f(3)f(0)，即C4



應用三

C_n表示所有在$n \times n$格點中不越過對角線的**單調路徑**的個數。一個單調路徑從格點左下角出發，在格點右上角結束，每一步均為向上或向右。計算這種路徑的個數等價於計算Dyck word的個數：X代表「向右」，Y代表「向上」。下圖為n = 4的情況：



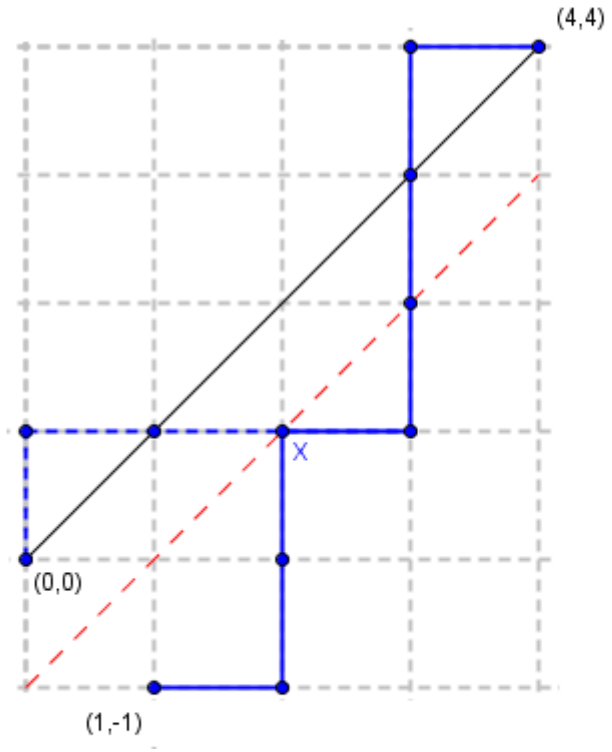
應用三

先設左下角為原點，右上角為(n,n)

總行走路徑方法為$\binom{2n}{n}$，即2n步中n步向右、向上的組合數

延伸圖形，做(0,-1)到(n,n-1)連線，可發現穿越對角線的路徑都能和(1,-1)到(n,n)對應(延紅線反射)

所以方法數為$\binom{2n}{n}$- $\binom{2n}{n-1} = C_n$



參考資料

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%8D%A1%E5%A1%94%E5%85%B0%E6%95%B0

https://johnmayhk.wordpress.com/2014/02/03/cn/

https://zhuanlan.zhihu.com/p/26066363

https://zhuanlan.zhihu.com/p/385994583

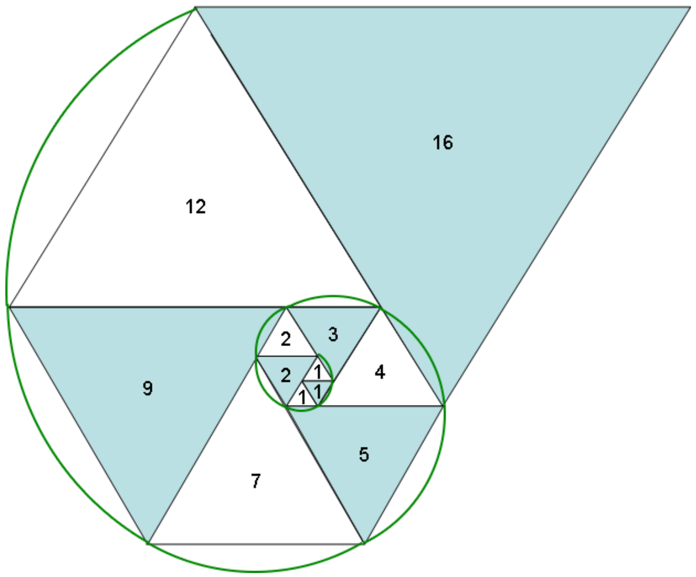
巴都萬數列Padovan Sequence

介紹

巴都萬數列（Padovan Sequence）是一個整數數列，其起始數值跟遞迴關係定義為：

$$P(0) = P(1) = P(2) = 1$$
$$P(n) = P(n-2) + P(n-3)$$

$P(n)$ 的前幾個值是：
1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151, 200, 265,



由來

此數列以建築師理察·巴都萬（英語：Richard Padovan）命名，理察·巴都萬把此數列的發現歸功於荷蘭建築師漢斯·范·德·蘭（英語：Hans van der Laan）在1994年發表的論文《Dom. Hans van der Laan : Modern Primitive》[2]。1996年6月，艾恩·史都華在《科學美國人》雜誌提到這個數列

遞迴關係

- $P_n = P_{n-1} + P_{n-5}$（此關係可從圖中見得）
- $P_n = P_{n-2} + P_{n-4} + P_{n-8}$
- $P_n = P_{n-3} + P_{n-4} + P_{n-5}$
- $P_n = P_{n-4} + P_{n-5} + P_{n-6} + P_{n-7} + P_{n-8}$

佩蘭數列滿足相同的遞迴關係。它亦可從巴都萬數列定義： $Perrin_n = P_{n+1} + P_{n-10}$

反巴都萬數列

使用遞迴關係$P_{-n} = P_{-n+3} - P_{-n+1}$可將巴都萬數列推廣到負數項。這樣的定義跟將斐波那契數推廣到反費氏數列相似。另一方面，反費氏數列取絕對值便和費氏數列相等，但反巴都萬數列卻不：

... -7, 4, 0, -3, 4, -3, 1, 1, -2, 2, -1, 0, 1, -1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1 ...

項的和

首n項（包括第0項）之和比P_{n+5}少2：

$$\sum_{m=0}^{n} P_m = P_{n+5} - 2.$$

下面是每隔數項的和：

$$\sum_{m=0}^{n} P_{2m} = P_{2n+3} - 1$$
$$\sum_{m=0}^{n} P_{2m+1} = P_{2n+4} - 1$$
$$\sum_{m=0}^{n} P_{3m} = P_{3n+2}$$
$$\sum_{m=0}^{n} P_{3m+1} = P_{3n+3} - 1$$
$$\sum_{m=0}^{n} P_{3m+2} = P_{3n+4} - 1$$
$$\sum_{m=0}^{n} P_{5m} = P_{5n+1}.$$

下面的恆等式跟項與項的乘積之和有關：

$$\sum_{m=0}^{n} P_m^2 = P_{n+2}^2 - P_{n-1}^2 - P_{n-3}^2$$
$$\sum_{m=0}^{n} P_m^2 P_{m+1} = P_n P_{n+1} P_{n+2}$$
$$\sum_{m=0}^{n} P_m P_{m+2} = P_{n+2} P_{n+3} - 1.$$

其他恆等式

$$P_n^2 - P_{n+1}P_{n-1} = P_{-n-7}.$$

巴都萬數列跟二項式係數之和有關：

$$\sum_{2m+n=k} \binom{m}{n} = P_{k-2}.$$

估計值

$x^3 - x - 1 = 0$有三個根：唯一的實數根p（即銀數）和兩個複數根q和r。

$$P_n = \frac{p^n}{(3p^2-1)} + \frac{q^n}{(3q^2-1)} + \frac{r^n}{(3r^2-1)}.$$

因為q和r的絕對值都少於1，當n趨近無限，其冪會趨近0。因此，對於很大的n，可以以下面的公式估計：

$$P_n \approx \frac{p^n}{(3p^2-1)} = \frac{p^n}{4.264632...}.$$

從上面的公式亦知$\frac{P_{n+1}}{P_n}$的值趨近銀數。

整數分拆上的意義

P_n可以用不同的整數分拆來定義。

- P_n是將$n+2$寫成一個有序、每項是2或3的和式的方法的數目。例如$P_6=4$，有4種方法將8寫成這類和式：
  2+2+2+2 ; 2+3+3 ; 3+2+3 ; 3+3+2
- P_{2n-2}是將n寫成一個有序且式中沒有項為2的和式的方法的數目。例如$P_{5\times 2-2}=P_8=7$，有7種方法將5寫成這類和式：
  1+1+1+1+1 ; 1+1+3 ; 1+3+1 ; 3+1+1 ; 4+1 ; 1+4 ; 5
- P_n是將n寫成一個有序且「回文型」且式中沒有項為2的和式的方法的數目。例如$P_9=9$，有9種方法將9寫成這類和式：
  9 ; 1+7+1 ; 1+1+5+1+1 ; 1+1+1+3+1+1+1 ; 1+1+1+1+1+1+1+1+1; 3+3+3 ; 4+1+4 ; 3+1+1+1+3; 1+3+1+3+1
- 若上述情況改為$P_8=8$，則數列如下：
  1+1+1+1+1+1+1+1: 4+4; 3+1+1+3; 1+3+3+1; 1+1+4+1+1; 1+6+1; 8
- P_n是將$n+4$寫成一個有序的、每項除以3都餘2的和式的方法的數目。例如$P_7=5$，有5種方法將11寫成這類和式：
  11 ; 2+2+2+5 ; 2+2+5+2 ; 2+5+2+2 ; 5+2+2+2

多項式　　　　　　　　　　生成函數

巴都萬數列可以一般化成一個多項式的集。

$$P_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 0 \\ x, & \text{if } n = 1 \\ x^2, & \text{if } n = 2 \\ xP_{n-2}(x) + P_{n-3}(x), & \text{if } n \geq 3 \end{cases}$$

首七個巴都萬多項式為：

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = x^2$$
$$P_3(x) = x^2 + 1$$
$$P_4(x) = x^3 + x$$
$$P_5(x) = x^3 + x^2 + x$$
$$P_6(x) = x^4 + 2x^2 + 1$$
$$P_7(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + x$$

巴都萬數列的生成函數為

$$G(P_n; x) = \frac{1+x}{1-x^2-x^3}.$$

它可以用於證明巴都萬數跟幾何級數的項的積的等式，例如：

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{P_n}{2^n} = \frac{12}{5}.$$

其他特質

- 奇偶性：按「奇奇奇偶偶奇偶」的組合重覆出現。
- 數列中的質數：$P_{3,4} = 2; P_5 = 3; P_7 = 5; P_8 = 7; P_{14} = 37; P_{19} = 151; P_{30} = 3329; P_{37} = 23833; \ldots$
- 數列中的平方數：$P_{0,1,2} = 1; P_6 = 2^2; P_9 = 3^2; P_{11} = 4^2; P_{15} = 7^2$

參考文獻

Richard Padovan. *Dom Hans van der Laan: modern primitive*: Architectura & Natura Press, ISBN 9789071570407.

Natura Press, ISBN 9789071570407.