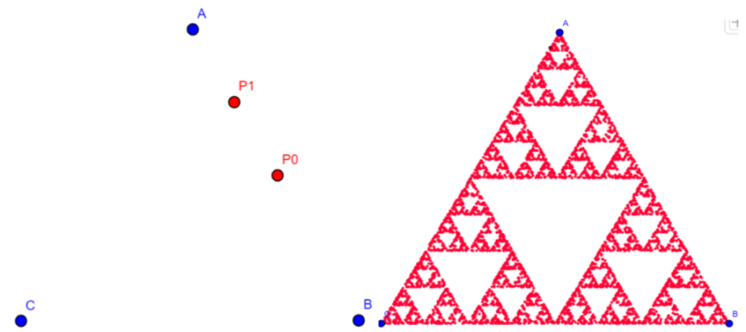
壹、前言

一、研究動機

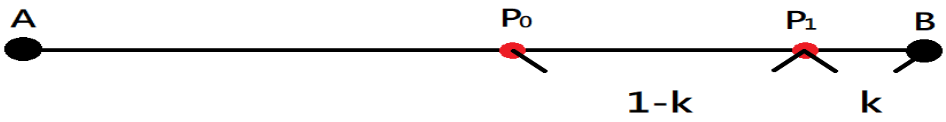
在近期上的微積分課堂中，上到了無限陣列的第 N 項及其和，之後寫老師派發的微分作業時，發現一個有趣的圖形，在我們查證後發現他就是謝爾賓斯基地毯，為了更加了解這種圖形，於是我們順藤摸瓜找到此類圖性的統一名稱——碎形，在碎形中比較常被討論的圖形就是謝爾賓斯基三角形，它的做法是先在一平面上找不共線的三個點 ，當作「端點」，接著，在此平面上任意取一點「起始點」P_0，將P_0跟A、B、C任意一點連線段取「中點」，此點設為P_1，將P_1跟A、B、C任意一點連線段取中點，繼續反覆進行以上步驟，得到無限 多個點P_0、P_1、$P_2 \ldots P_n$，最終，這些點$P_n(n \in N)$就會聚集在某些區域，稱為「最終點區」，就$\triangle ABC$而言，裡面多了四個全等的三角形，而其中一個三角形被其他三個三角形包圍、且內部空空如也，其他三個三角形則是內部也擁有四個全等三角形。(如圖一)



為了要探討這美麗圖形的規律，我們將圖一中的點區座標化，每一個點都有x、y兩個座標，當我們要描述動點$P_n(n \in N)$時，發現有複雜的數值要運算，於是，試想能不能只探討一個維度，如果能找到其中一個維度的規則，或許就能延伸應用在描述兩個維度的規則。因為只要探討一個維度，有了從線段上開始研究的想法，我們將端點從三點轉變為兩點，規則是先在一線段上找不共線的兩個點A、B當作「端點」，接著，在此線段上任意取一點「起始點」P_0，將P_0跟A、B中任意一點

連線段取$1-k:k(0<k<1,k\in Q)$的「分點」，此點設為P_1，即$\overline{P_0P_1}=k\overline{P_1A}$或

$\overline{P_0P_1}=k\overline{P_1B}$（如圖二），將$P_1$跟$A$、$B$任意一點連線段取$1-k:k(0<k<1,k\in Q)$的「分點」，繼續反覆進行以上步驟，得到無限多個點$P_0$、$P_1$、$P_2\ldots P_n$，發現竟然也可以找到線段上疑似碎形的圖案（如圖三）。



（圖二）

（圖二資料來源：研究者繪製）

（圖三）

（圖三資料來源：研究者繪製）

本研究先透過探討「端點」為兩點的情況，分析出其中的規律，並將結果延伸到端點為三點的情況。

二、研究目的

（一）一維直線點區。

1.找到一點P_n與下一個點P_{n+1}的關係式。

2.找到P_n所在的點區與P_{n+1}所在的點區遞迴關係式。

（二）二維三角形點區

1.找出第 n 層的第一個點區

2.利用線性規劃和編號找出所有點區

3.將二維三角形推廣至其他多邊形

（三）推廣至三維正三角錐點區以及正 N 角錐 $(\mathrm{N} \in N)$

（四）做向外延伸的點區

貳、正文

一、專有名詞定義：

點區即為點所在的範圍。

最終點區即為點 P_0、P_1、$P_2 \ldots P_n (n \in N, n \to \infty)$所在的位置。

二、思考過程：

（一)、一維直線

如圖三上，將一維直線上兩個相異點 A、B 定為端點，假設一隨機點 P_0 （P_0 在直線上， 即 $A \le P_0 \le B$），讓 P_0 開始按照下列規則移動，規則是令 P_0 與 A和B 其中一點連線段取 $1-k:k(0.5<k<1, k$為一定值$)$的分點，得到一個點 P_1 ， P_1 再與和 B 其中一點連線段取比例 $1-k:k$ 的分點，得到下一個點 P_2 反覆進行 n 次 $(n \to \infty)$，觀察此圖形　（如圖四），

（圖四）

（圖四資料來源：研究者藉由 geogebra 繪製）

圖三下中的點 P_0到P_n所形成的圖形沒有甚麼規律，看似是一條紅色的線，所以這個比例我們不採用。改用$1-k:k(0<k<0.5,k\in Q)$的比例取分點，依上述規則跑圖，得到一圖形（如圖五）

（圖五）

發現開始有碎形的圖樣產生，於是我們討論圖形所使用的線段比例為

$1-k:k(0<k<0.5,k\in Q)$，當我們看到這張圖時，我們將圖放大（如圖六）

（圖六）

（圖六資料來源：研究者藉由 geogebra 繪製）

由圖可知，每一段的點區放大看都會有另外兩段的點區，那兩段的點放大看各還有另外兩段的點，一直放大就可以發現類似碎形的圖案，於是　　　我們猜測最終點區也是碎形圖案。我們將做了 n 次的點稱 $P_n(a\le P_n\le b)$，下一

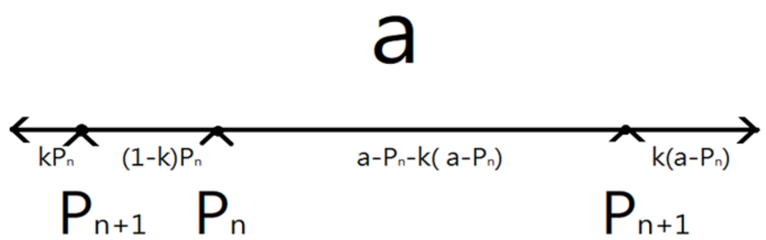
點即為 P_{n+1}，將 P_n 向 A或是B點做下一點（如圖七）

$$P_{n+1}=a+k(P_n-a)\vee b-bk+kP_n$$

將範圍寫出並將 P_n 換成 P_{n+1}

$$a\text{-}ak+ak\le P_{n+1}\le a-ak+bk\vee b-bk+ak\le P_{n+1}\le b-bk+bk\cdots\cdots\cdots ①，$$

我們可以利用代數的方法證明下一個點所在的點區範圍



（圖七）

（圖七資料來源：研究者繪製）

將第 n 層點區假設成 S_n，依上述①式可求得 S_1、S_2、$S_3\ldots S_n$，

$$S_1[0,a],S_2[0,ak]\cup[a-ak,a]\ldots$$

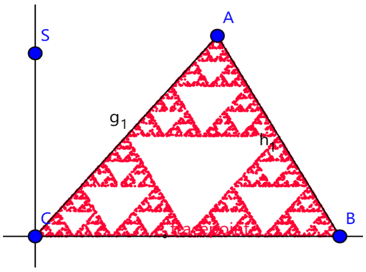
則三段距離的範圍比為

$$ak:a-ak-ak:ak=k:1-2k:k$$

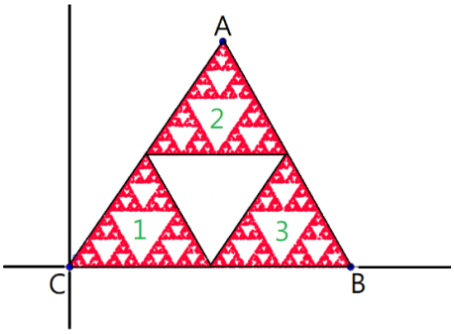
其中 $[x,y]$，x 為點區之最小值，y 為點區之最大值。

（二）、二維三角形

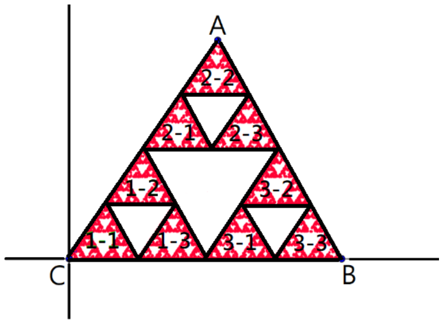
在一平面上找不共線的三個點 A、B、C，當作端點，接著，在此平面上任意取一點起始點 P_0，將 P_0 跟 A、B、C 任意一點連線段取中點，此點設為 P_1，將 P_1 跟 A、B、C 任意一點連線段取中點，繼續反覆進行以上步驟，得到無限多個點，



（圖八）



（圖九）



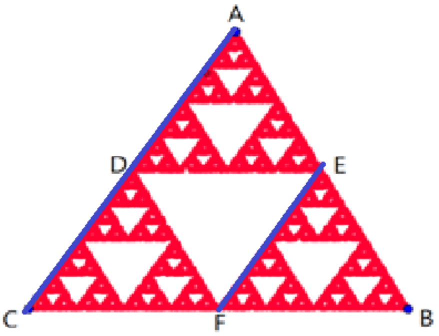
（圖十）

（圖八、圖九、圖十資料來源：研究者藉由 geogebra 繪製）

我們利用三條線以及編號來表示一個點區，第一層點區有三個三角形，第一個為 $\overline{AC}$ 中點及 $\overline{BC}$ 中點及 C 點，第二個為 $\overline{AC}$ 中點及 $\overline{AB}$ 中點及 A 點，第三個為 $\overline{AB}$ 中點及 $\overline{BC}$ 中點及 B 點所形成的三角形，以 1 表示第一個，以 2 表示第二個，以 3 表示第三個，第二層分為九個三角形，如 3-2 為例，3-2 的點區如（圖八），利用線性來描述點區，則 $\underbrace{1\text{-}1\text{-}1\cdots1\text{-}1}_{\text{共 n 個}}$ 的點區公式為

$$\begin{cases} y \le \dfrac{a_y}{a_x}x \\ y \le \dfrac{a_y}{a_x\text{-}1}x - \dfrac{1}{2^n} \times \dfrac{a_y}{a_x\text{-}1} \\ y \ge 0 \end{cases}$$

（a_x 為 A 點之 x 座標，a_y 為 A 點之 y 座標）



（圖十一）

（圖十一資料來源：研究者藉由小畫家繪製）

$\overline{AC}$與$\overline{EF}$斜率相同，所以改變方程式常數項即可表示下一層點區的範圍

已知$\overline{AC}$的斜率為$\dfrac{a_y}{a_x}$，

$$\overline{AC}: y=\frac{a_y}{a_x}x$$

$$\overline{EF}: y=\frac{a_y}{a_x}x+k(\text{令}k\text{為線段之}y\text{截距})$$

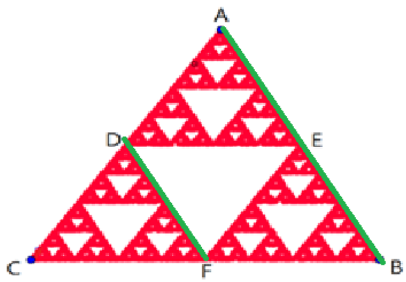
$$\overline{GH}: y=\frac{a_y}{a_x}x+(1+\frac{1}{2})k$$

$$\overline{\mathrm{IJ}}: y=\frac{a_y}{a_x}x+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})k$$

由此可知，我們可以推得其中一條方程式為:

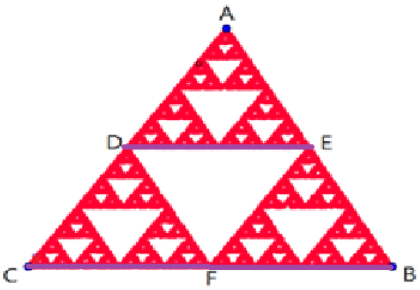
$$y=\frac{a_y}{a_x}x-\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^m\right]\frac{a_y}{a_x}$$ （m 表示移動次數，$m\in N\vee 0$）

同理可知另外兩條方程式為



（圖十二）

（圖十二資料來源：研究者藉由小畫家繪製）



（圖十三）

（圖十三資料來源：研究者藉由小畫家繪製）

$$\begin{cases} y=\dfrac{a_y}{a_x\text{-}1}\times x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m-1}\times\dfrac{a_y}{a_x\text{-}1} \\ y=\left(1\text{-}\dfrac{1}{2^m}\right)a_y \end{cases}$$ （m 表示移動次數，$m\in N\vee 0$）

上述式子僅能表示只移動 AB 的 1-1-1⋯1-1 的點區，為了能表示所有點區的位置，我們已遞迴關係式來描述所有點區

第0個點區為 $\begin{cases} y\geq 0 \\ y\leq\dfrac{a_y}{a_x}x \\ y\leq\dfrac{a_y}{a_x-1}x-\dfrac{a_y}{a_x-1} \end{cases}$

假設某個點區 K 為 $\begin{cases} y\geq(1-\dfrac{1}{2^n})a_y \\ y\leq\dfrac{a_y}{a_x}x-(1-\dfrac{1}{2^n})a_y \\ y\leq\dfrac{a_y}{a_x-1}x-(1-\dfrac{1}{2^n})\dfrac{a_y}{a_x-1} \end{cases}$

則下一層點區的分佈有三種情況:

1. 相對點區 K，只移動 AB 線段的點區 K-1為

$$\begin{cases} y \ge (1-\frac{1}{2^n})a_y \\ y \le \frac{a_y}{a_x}x-(1-\frac{1}{2^n})a_y \\ y \le \frac{a_y}{a_x-1}x-(1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}})\frac{a_y}{a_x-1} \end{cases}$$

2.相對點區 K，只移動 BC 線段的點區 K-2為

$$\begin{cases} y \ge (1-\frac{1}{2^n+2^{n+1}})a_y \\ y \le \frac{a_y}{a_x}x-(1-\frac{1}{2^n})a_y \\ y \le \frac{a_y}{a_x-1}x-(1-\frac{1}{2^n})\frac{a_y}{a_x-1} \end{cases}$$

3. 相對點區 K，只移動 AC 線段的點區 K-3為

$$\begin{cases} y \ge (1-\frac{1}{2^n})a_y \\ y \le \frac{a_y}{a_x}x-(1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}})a_y \\ y \le \frac{a_y}{a_x-1}x-(1-\frac{1}{2^n})\frac{a_y}{a_x-1} \end{cases}$$

參、結論

一、一維直線點區。

（一）找到一點 P_n 與下一個點 P_{n+1} 的關係式。

$$P_{n+1}=a-ak+kP_n \vee b-bk+kP_n$$

（二）找到 P_n 所在的點區與 P_{n+1} 所在的點區遞迴關係式。

$$a-ak+ak \le P_{n+1} \le a-ak+bk \vee b-bk+ak \le P_{n+1} \le b-bk+bk$$

二、二維三角形點區

利用線性規劃和編號找出所有點區

第0個點區為$\begin{cases} y \ge 0 \\ y \le \dfrac{a_y}{a_x}x \\ y \le \dfrac{a_y}{a_x-1}x - \dfrac{a_y}{a_x-1} \end{cases}$

設某個點區 K 為$\begin{cases} y \ge (1-\dfrac{1}{2^n})a_y \\ y \le \dfrac{a_y}{a_x}x-(1-\dfrac{1}{2^n})a_y \\ y \le \dfrac{a_y}{a_x-1}x-(1-\dfrac{1}{2^n})\dfrac{a_y}{a_x-1} \end{cases}$

則下一層點區為

$$\begin{cases} y \ge (1-\dfrac{1}{2^n+2^{n+1}})a_y \\ y \le \dfrac{a_y}{a_x}x-(1-\dfrac{1}{2^n})a_y \\ y \le \dfrac{a_y}{a_x-1}x-(1-\dfrac{1}{2^n})\dfrac{a_y}{a_x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \ge (1-\dfrac{1}{2^n})a_y \\ y \le \dfrac{a_y}{a_x}x-(1-\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{2^{n+1}})a_y \\ y \le \dfrac{a_y}{a_x-1}x-(1-\dfrac{1}{2^n})\dfrac{a_y}{a_x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \ge (1-\dfrac{1}{2^n})a_y \\ y \le \dfrac{a_y}{a_x}x-(1-\dfrac{1}{2^n})a_y \\ y \le \dfrac{a_y}{a_x-1}x-(1-\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{2^{n+1}})\dfrac{a_y}{a_x-1} \end{cases}$$

三者之一。

三、其他衍伸

(一)碎形的發展史

17 世紀時，數學家兼哲學家萊布尼茨思考過遞迴的自相似，碎形的數學從那時開始漸漸地成形。1872年卡爾·魏爾斯特拉斯在皇家普魯士科學院給出碎形的第一個定義：碎形是一種具有處處連續，但又處處不可微等反直覺性質的函數圖形。1904 年，海里格·馮·科赫不滿意魏爾施特拉斯那抽象和基於分析的定義，它擴展了龐加萊的定義，給出了更加幾何化的定義並附上了一個類似函數的手繪圖形，今天稱之為科赫雪花。1905 年瓦茨瓦夫·謝爾賓斯基構造出了謝爾賓斯基三角形；隔年，又造出了謝爾賓斯基地毯。1918 年，兩名法國數學家皮埃爾·法圖和加斯東·茹利亞通過各自獨立的工作，基本上同時得出了描述複數映射以及函數迭代相關碎形行為的結果，並由此引出了之後關於奇異吸引子的想法。1975年本華·曼德博提出了「碎形」一詞，來標記一個郝斯多夫-貝西科維奇維數大於拓撲維數的物件。

（二）碎形的製作方法及分類

製作方法分為四種：

逃逸時間碎形

迭代函數系統

隨機碎形

奇異吸引子

碎形分類分為三種：

精確自相似

半自相似

統計自相似

（三）其他碎形例子

1. 科赫雪花
2. 巴恩斯利蕨葉
3. 謝爾賓斯基地毯

（四）探討碎形德維度

（五）尋找生活中的碎形

1. **黃金比例螺線**

2. **羅馬花椰菜**

3. **蒲公英**

4. **閃電**

5. **立希藤貝格圖**

6. **台南美術館2館**

肆、參考資料

- ✖ Chaos Game

https://www.youtube.com/watch?v=kbKtFN71Lfs

- ✖ 廖思善（２００６）。動手玩碎形。台灣：天下文化

- ✖ 謝爾賓斯基三角形（２０１７）２０１９年６月取自

https://blog.csdn.net/yanerhao/article/details/47069973

- ✖ 謝爾賓斯基三角形(維基百科)

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%AC%9D%E7%88%BE%E8%B3%93%E6%96%AF%E5%9F%BA%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2

- ✖ Cantor set （２０１７）２０１９年６月取自

https://www.math.hmc.edu/funfacts/ffiles/20004.3.shtml

- ✖ 謝爾賓斯基地毯(維基百科)

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E8%B0%A2%E5%B0%94%E5%AE%BE%E6%96%AF%E5%9F%BA%E5%9C%B0%E6%AF%AF

- ✖ 碎形(維基百科)

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%88%86%E5%BD%A2

- ✖ **〈時評〉碎形藝術與大自然、及碎形典故**

https://www.taiwannews.com.tw/ch/news/3495747

- ✖ 科赫曲線(維基百科)

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E7%A7%91%E8%B5%AB%E6%9B%B2%E7%B7%9A