# 碎形

數學解題方法第二組：
411031116楊子毅　411031121戴士宬
411031117劉秉翰　411031125陳宣睿
411031118張銓敏　411031128蔣一豪

# 什麼是碎形?

- 又稱分形、殘形
- 定義為「一個粗糙或零碎的幾何形狀，可以分成數個部分，且每一部分都（至少近似地）是整體縮小後的形狀」，即具有自相似的性質。

(科赫雪花形成 QR)

# 碎形的發展史

- 17 世紀時，數學家兼哲學家萊布尼茨思考過遞迴的自相似，碎形的數學從那時開始漸漸地成形
- 1872年卡爾·魏爾斯特拉斯在皇家普魯士科學院給出碎形的第一個定義：碎形是一種具有處處連續，但又處處不可微等反直覺性質的函數圖形
- 1904 年，海里格·馮·科赫不滿意魏爾施特拉斯那抽象和基於分析的定義，它擴展了龐加萊的定義，給出了更加幾何化的定義並附上了一個類似函數的手繪圖形，今天稱之為科赫雪花

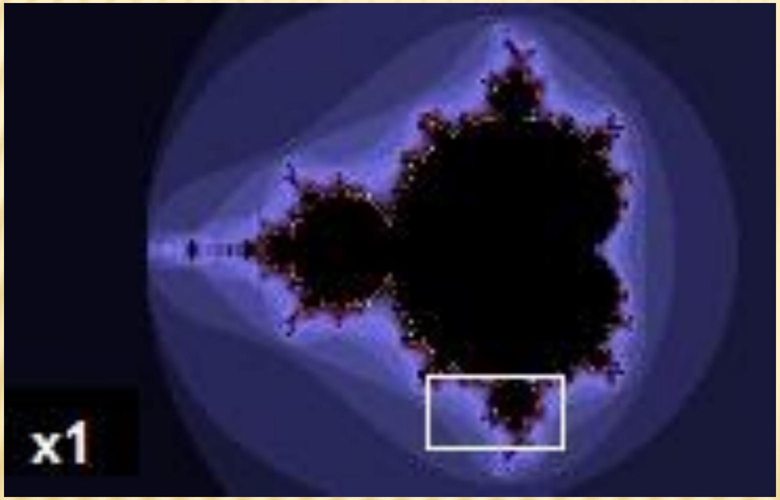
- 1905 年瓦茨瓦夫·謝爾賓斯基構造出了謝爾賓斯基三角形；隔年，又造出了謝爾賓斯基地毯
- 1918 年，兩名法國數學家皮埃爾·法圖和加斯東·茹利亞通過各自獨立的工作，基本上同時得出了描述複數映射以及函數迭代相關碎形行為的結果，並由此引出了之後關於奇異吸引子的想法
- 1975年本華·曼德博提出了「碎形」一詞，來標記一個郝斯多夫-貝西科維奇維數大於拓撲維數的物件

# 碎形的製作方法

- 逃逸時間碎形
- 迭代函數系統
- 隨機碎形
- 奇異吸引子

# 逃逸時間碎形

- 由空間（如複數平面）中每一點的遞迴關係式所定義，例如曼德博集合

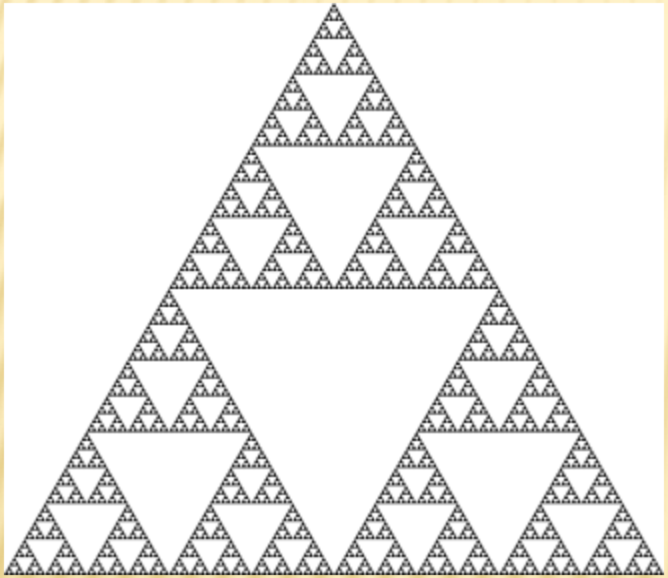


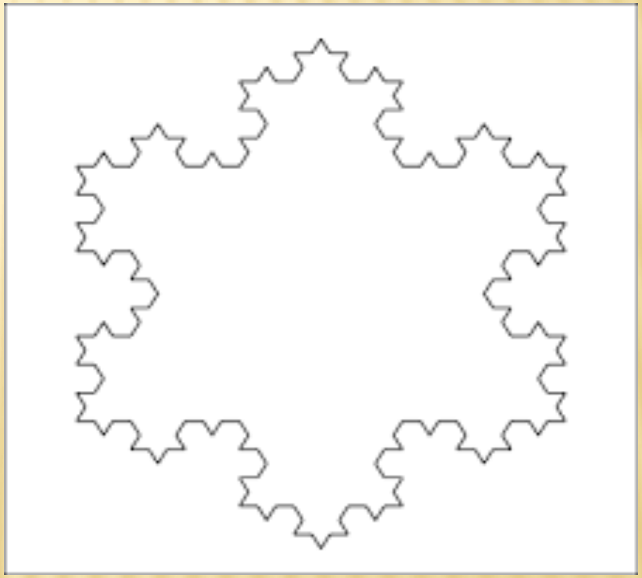


Youtube影片：https://www.youtube.com/watch?v=bjzPTgzOqLk

# 迭代函數系統

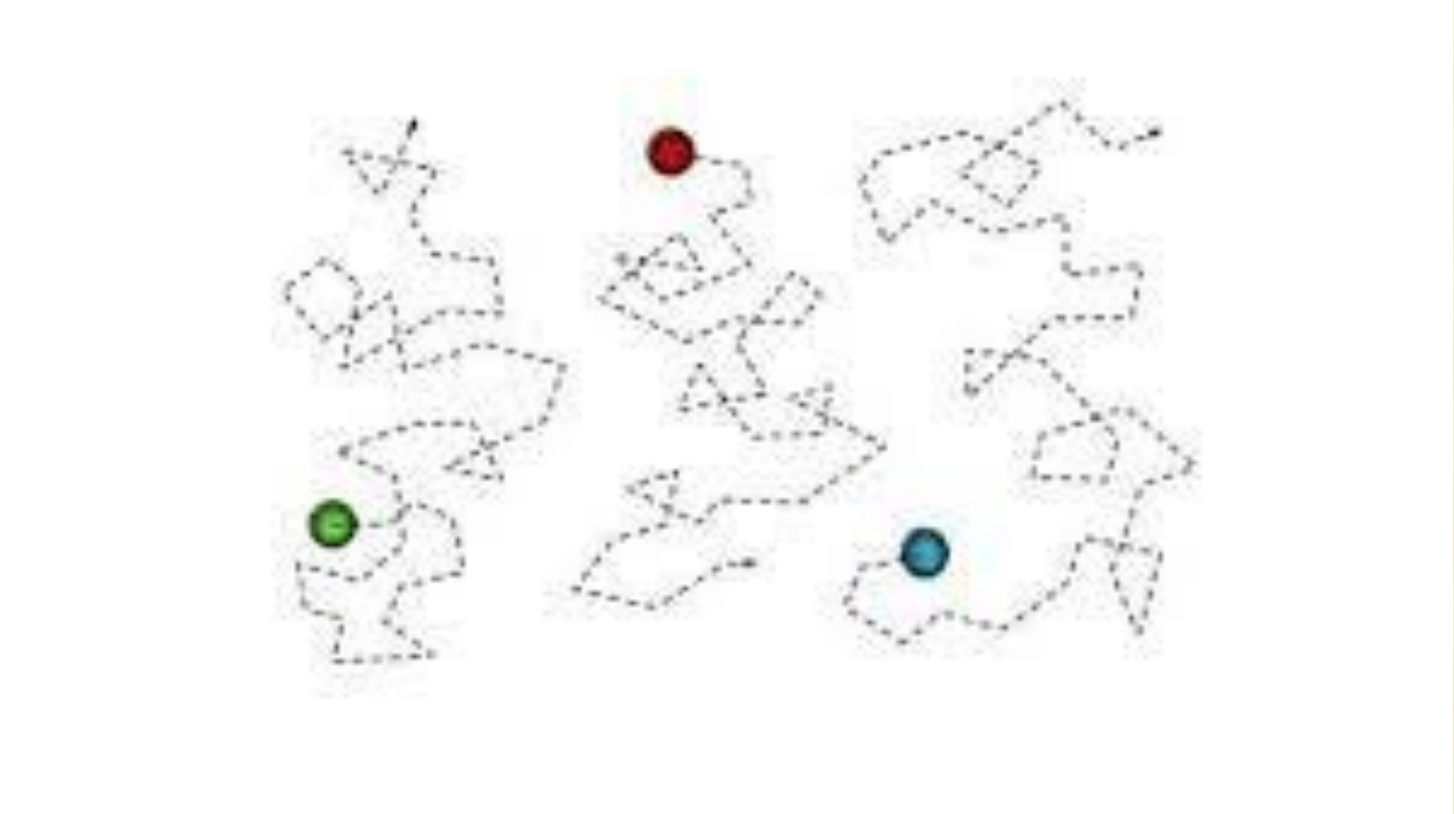
- 使用固定的幾何替代規則生成碎形，得到的結果可能是隨機的或確定的，如謝爾賓斯基三角形、科赫雪花





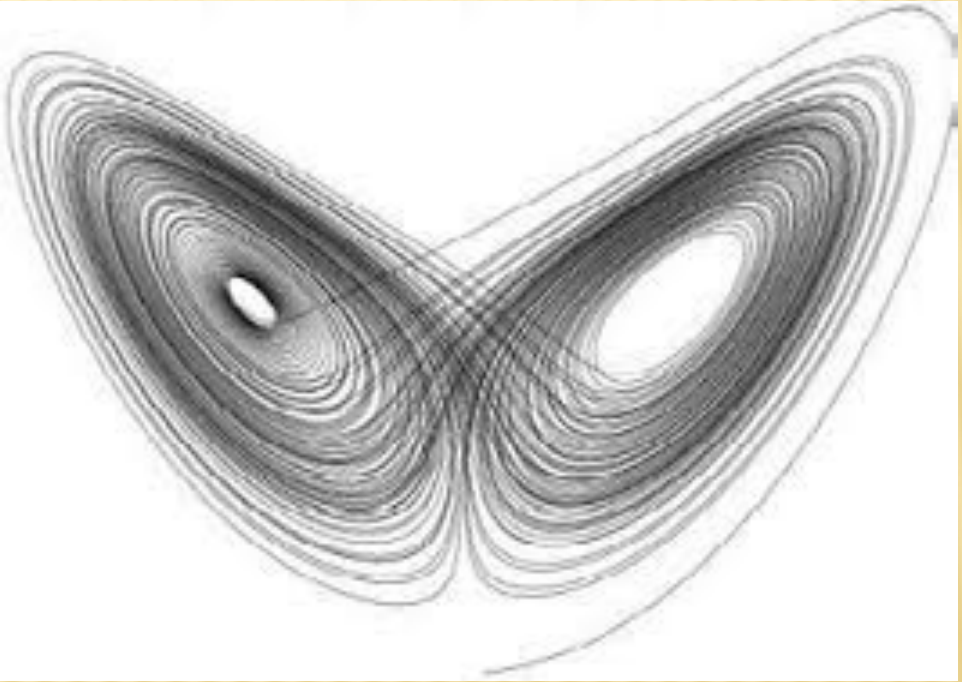
# 隨機碎形

- 由隨機而無確定過程產生，如布朗運動的軌跡



# 奇異吸引子

- 以一個映射的迭代或一套會顯出混沌的初值微分方程式所產生



Youtube影片：https://www.youtube.com/watch?v=oVfEztDDtQk(4:50~7:25)

# 碎形依據其自相似分類

- 精確自相似
- 半自相似
- 統計自相似

# 精確自相似

- 這是最強的一種自相似，碎形在任一尺度下都顯得一樣。由迭代函數系統定義出的碎形通常會展現出精確自相似來。

# 半自相似

- 這是一種較鬆的自相似，碎形在不同尺度下會顯得大略（但非精確）相同。半自相似碎形包含有整個碎形扭曲及退化形式的縮小尺寸。由遞迴關係式定義出的碎形通常會是半自相似，但不會是精確自相似。

# 統計自相似

- 這是最弱的一種自相似，這種碎形在不同尺度下都能保有固定的數值或統計測度。大多數對「碎形」合理的定義自然會導致某一類型的統計自相似（碎形維數本身即是個在不同尺度下都保持固定的數值測度）。隨機碎形是統計自相似，但非精確及半自相似的碎形的一個例子。

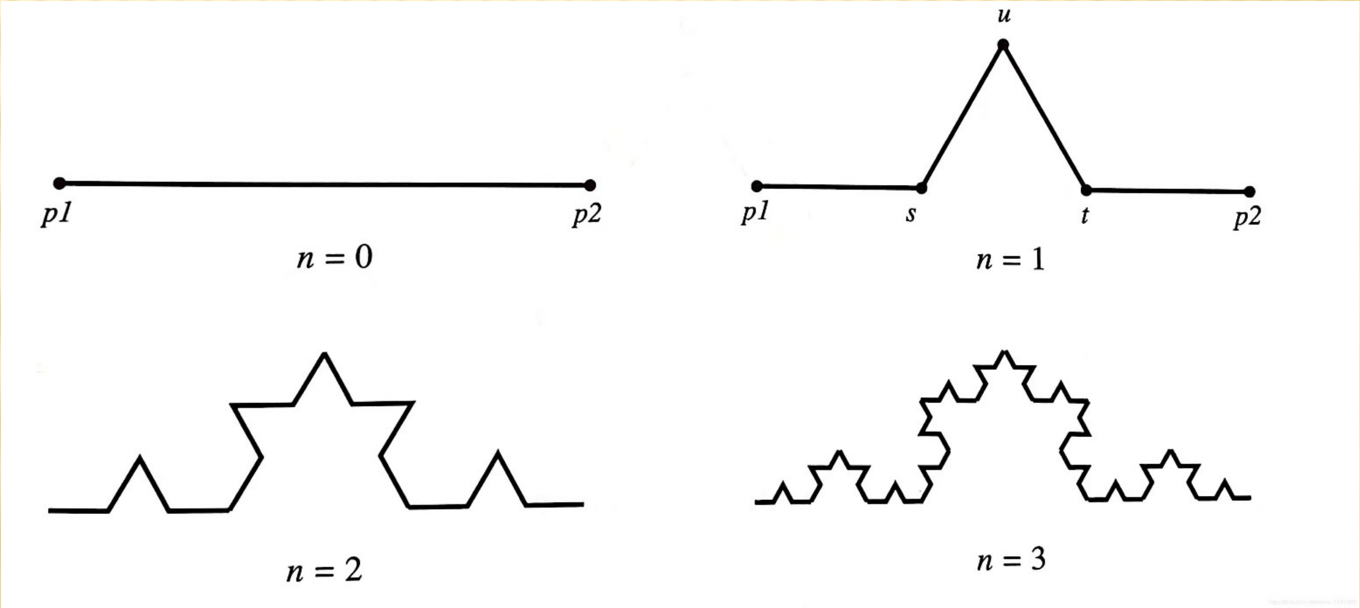
# 科赫曲線

# 科赫曲線

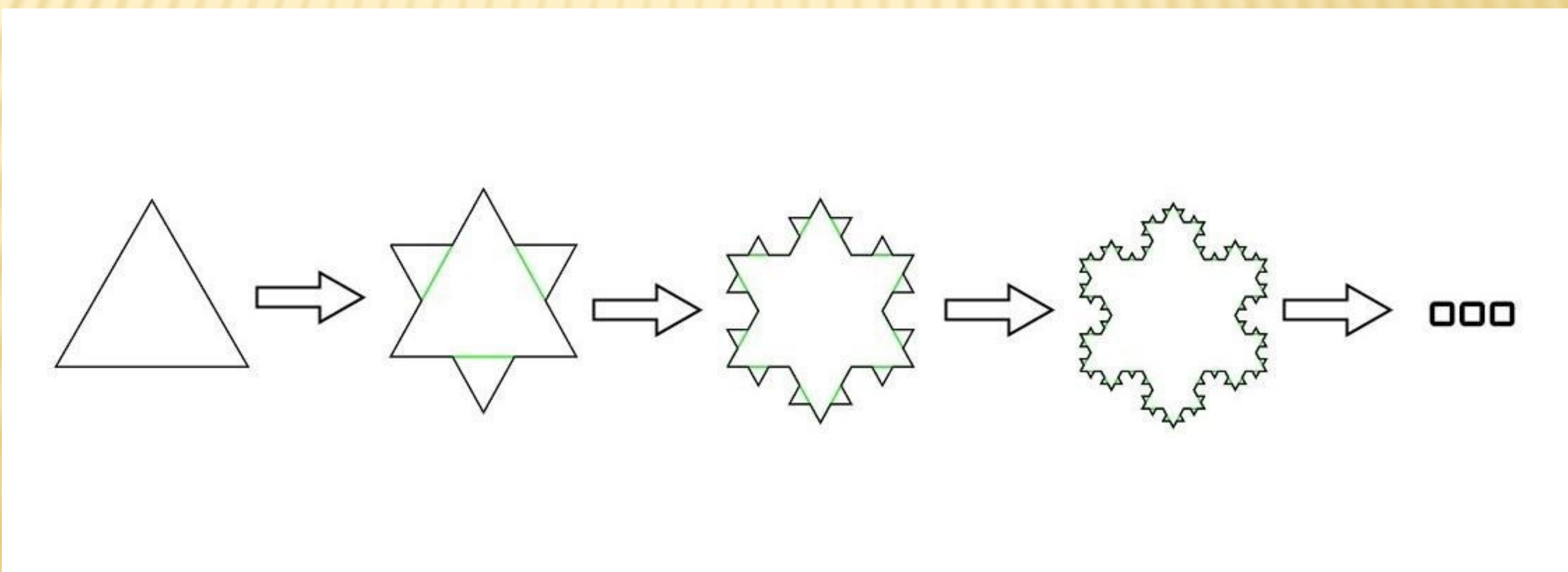
- 其形態似雪花，又稱科赫雪花、科赫星、科赫島、雪花曲線。
- 它最早出現在瑞典數學家海里格·馮·科赫的論文《關於一條連續而無切線，可由初等幾何構作的曲線》

# 科赫曲線製作方法

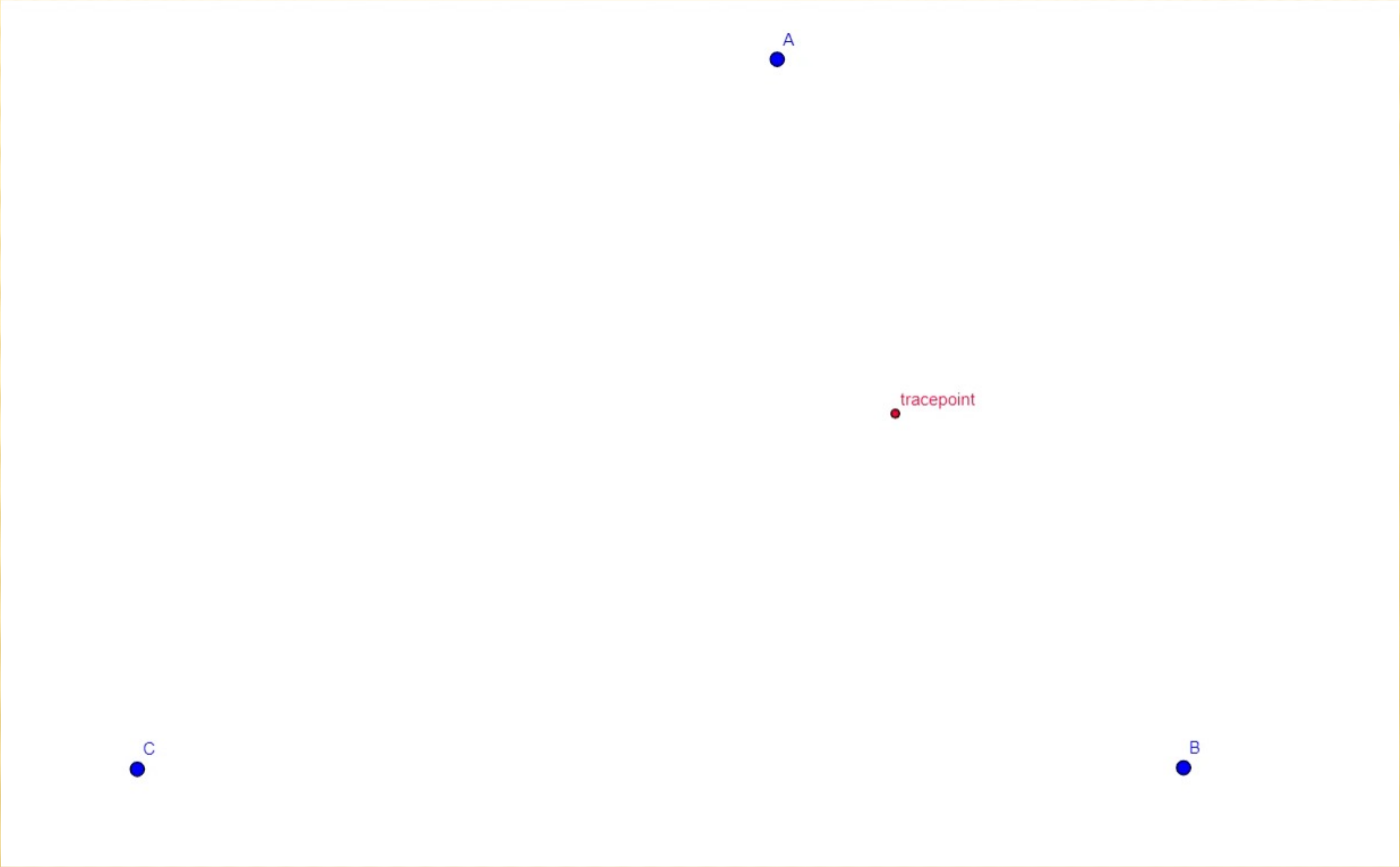
1. 給定線段$p_1p_2$將線段分成三等份（ $p_1s$、$st$、$tp_2$ ）
2. 以st為底，向外畫一個等邊三角形sut
3. 將線段st移去
4. 分別對$p_1s$、$su$、$ut$、$tp_2$重複1~3。



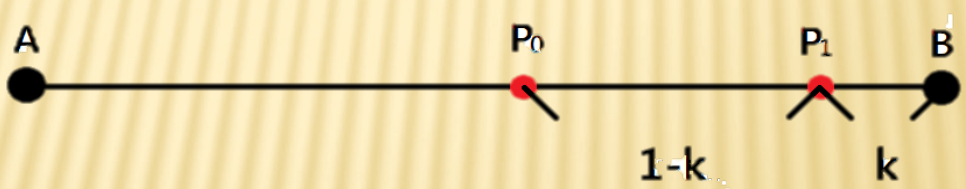
- 科赫雪花是以等邊三角形三邊生成的科赫曲線組成的。科赫雪花的面積是 $\frac{2\sqrt{3}(s)^2}{5}$，其中s是原來三角形的邊長。每條科赫曲線的長度是無限大，它是連續而無處可維的曲線。



# 謝爾賓斯基三角形


A
tracepoint
C
B

- 將$P_0$跟$A$、$B$中任意一點連線段取$1-k:k$的「分點」，此點設為$P_1$，即 $(1-k)\overline{P_0P_1}=k\overline{P_0A}$ 或 $(1-k)\overline{P_0P_1}=k\overline{P_0B}$，將$P_1$跟 任意一點連線段取$1-k:k$ 的「分點」。



1.一維直線

找尋適合的線段比例 $k$

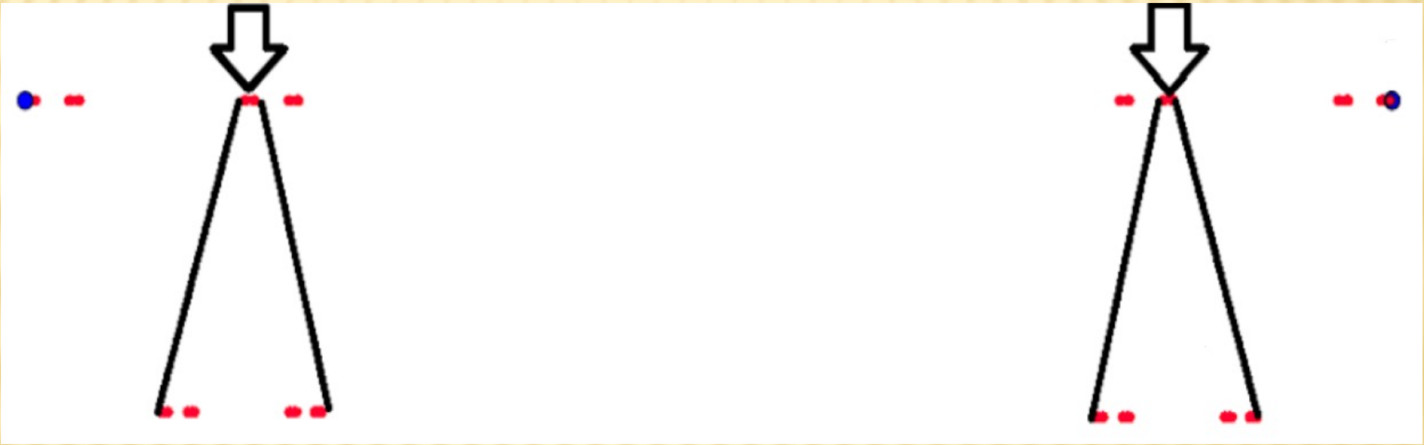
$1-k:k(0.5<k<1, k$為一定值$)$

結果為下圖

- 嘗試$1-k:k(0<k<0.5)$
  結果為下圖

- 把圖放大後，能發現有相似規律的其他點區，可推論一點區內還有其他等比例縮小的點區。

$1-k:k(0<k<0.5)$



- 代數的方法證明下一個點所在的點區範圍

我們將做了***n*** 次的點稱為 $P_n\left(a \le P_n \le b\right)$，下一點即為$P_{n+1}$

將 $P_n$ 向***A***或是***B*** 點做下一點

$$
\begin{aligned}
P_{n+1} &= a + k(P_n - a) \vee b - bk + kP_n \\
&= a - ak + kP_n \vee b - k(b + P_n) \cdots\cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

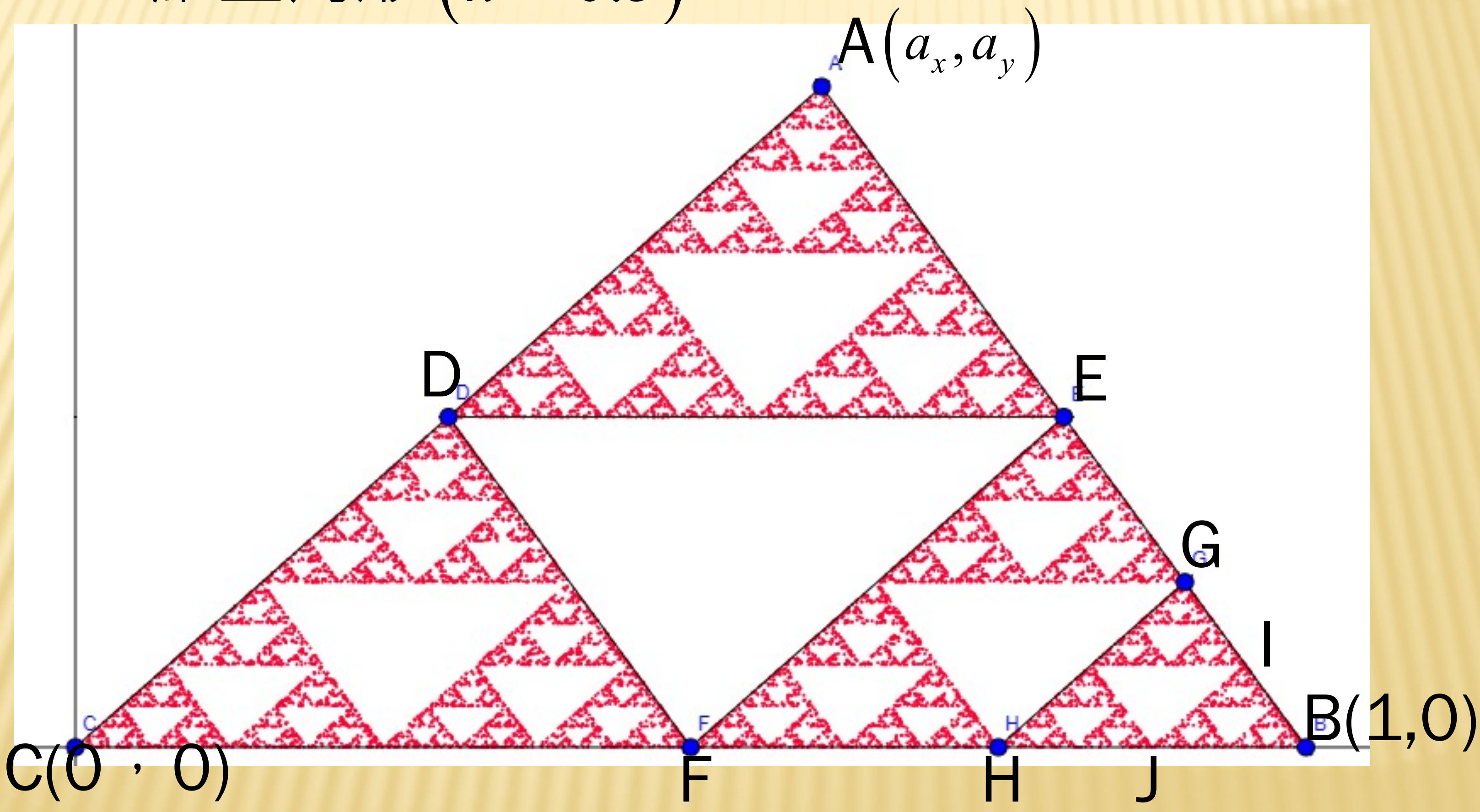
點 $P_n$ 所在的點區在 $[a,b]$ 則 $P_{n+1}$ 所在點區為

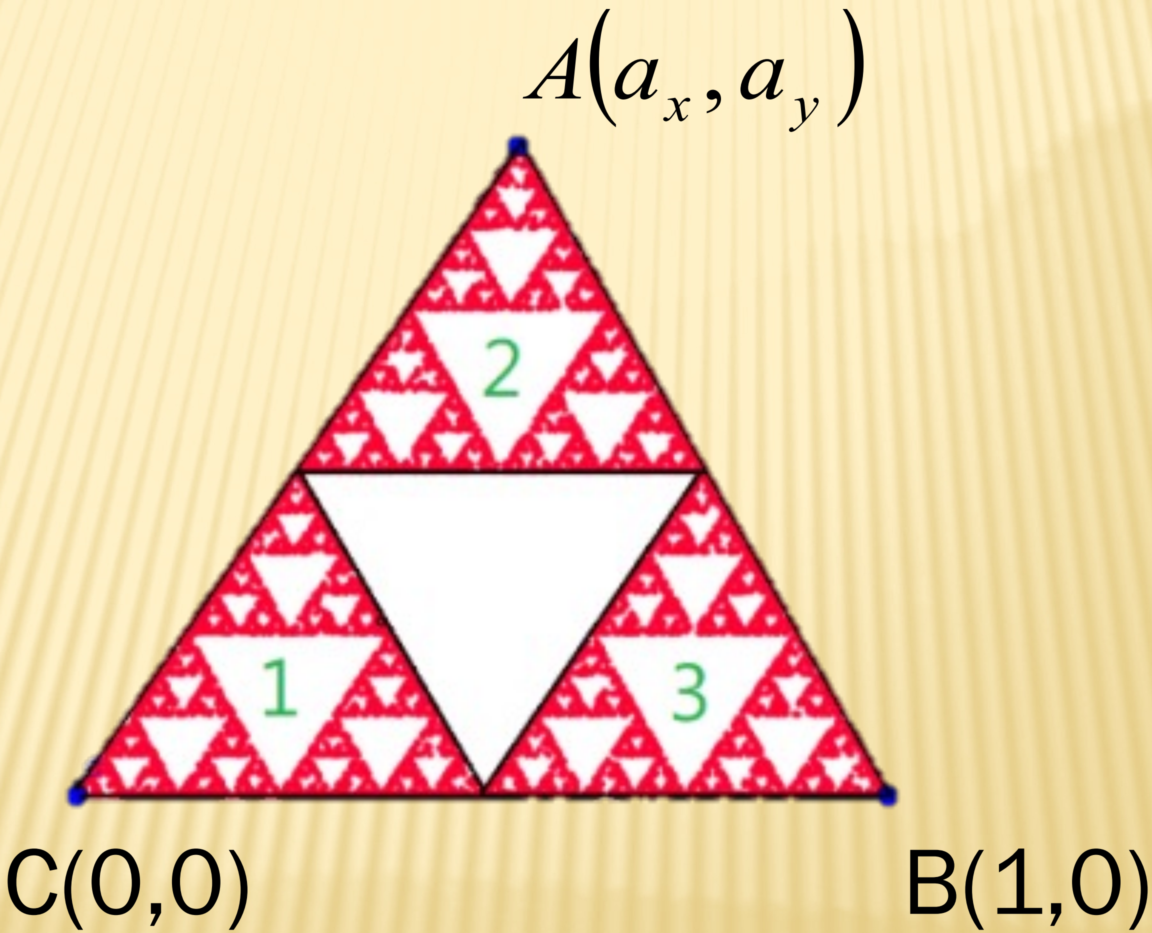
$$\left[a - ak + ak, a - ak + bk\right] \vee$$

$$\left[b - bk + ak, b - bk + bk\right] \cdots\cdots\cdots ②$$

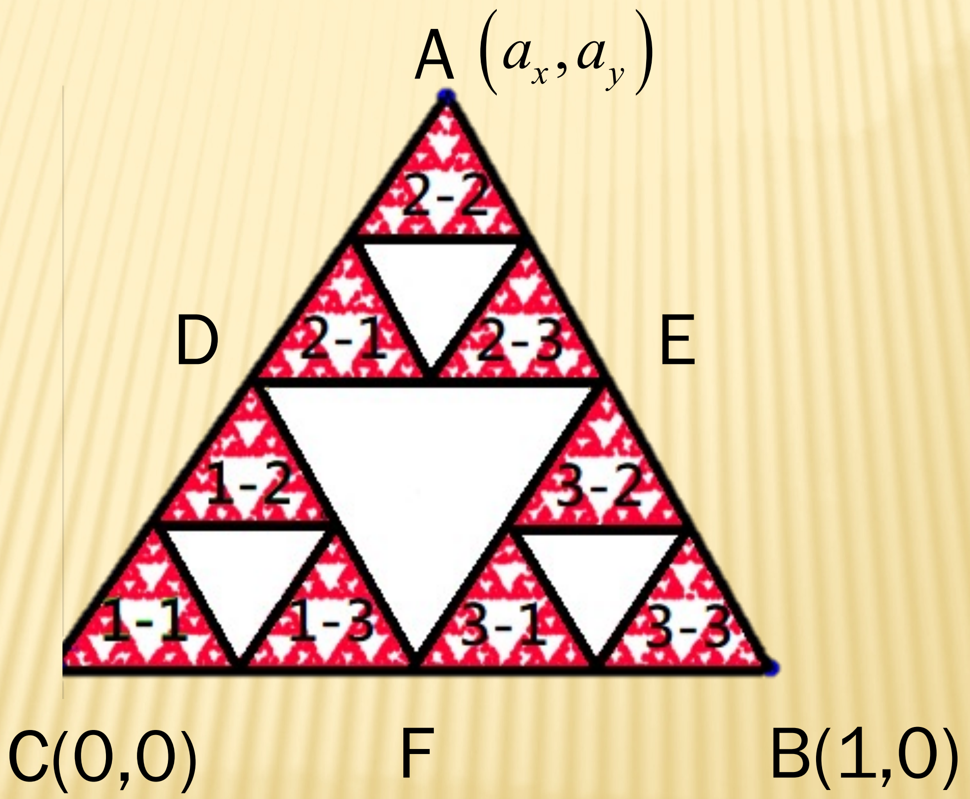
- 將第n層點區假設成$S_n$，依上述②式可得$S_1$、$S_2$、$S_3 \ldots S_n$
  $S_1[0,a], S_2[0,ak] \cup [a-ak, a] \ldots$
  則三段距離的範圍比為
  $ak : a-ak-ak : ak = k : 1-2k : k$
  其中$[x, y]$，$x$為點區之最小值，$y$為點區之最大值。

- 2.二維三角形 $(k=0.5)$





$A(a_x, a_y)$
2
1
3
C(0,0)
B(1,0)


A $\left(a_x, a_y\right)$
2-2
D
2-1
2-3
E
1-2
3-2
1-1
1-3
3-1
3-3
C(0,0)
F
B(1,0)

- 利用線性規劃描述點區，則第*n*層的第一點區為

$$\begin{cases} y \le \dfrac{a_y}{a_x} x \\ y \le \dfrac{a_y}{a_x - 1} x - \dfrac{1}{2^n} \times \dfrac{a_y}{a_x - 1} \\ y \ge 0 \end{cases}$$

($a_x$為A點之x座標，$a_y$為A點之y座標)

$\overline{AC}$與$\overline{EF}$斜率相同，所以改變方程式常數項即可表示下一層點區的範圍

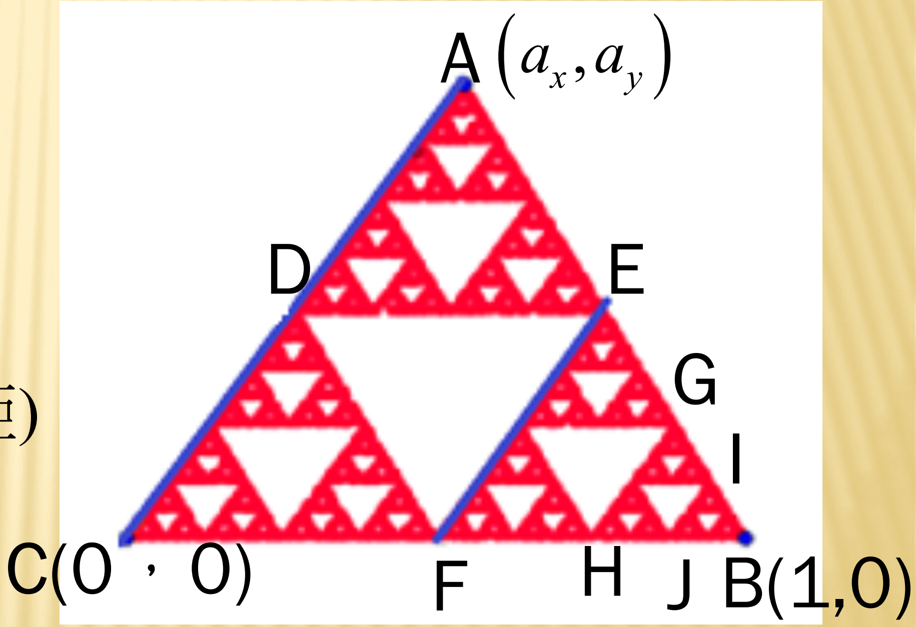
已知$\overline{AC}$的斜率為$\dfrac{a_y}{a_x}$,

$$\overline{AC}: y=\frac{a_y}{a_x}x$$

$$\overline{EF}: y=\frac{a_y}{a_x}x+k(\text{令}k\text{為線段之}y\text{截距})$$

$$\overline{GH}: y=\frac{a_y}{a_x}x+(1+\frac{1}{2})k$$

$$\overline{\mathrm{IJ}}: y=\frac{a_y}{a_x}x+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})k$$



- 以此類推，通式為

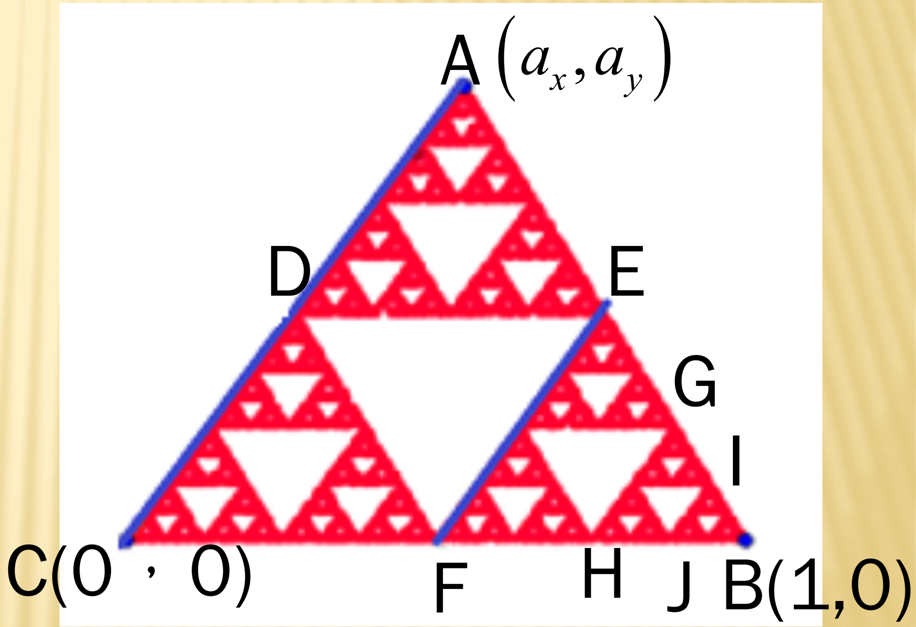
$$y=\frac{a_y}{a_x}\times x+\frac{1\times[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}\times k$$

$$\Rightarrow y=\frac{a_y}{a_x}\times x+2[1-(\frac{1}{2})^n]\times k$$

由$\left(\frac{1}{2},0\right)$代入$\overline{\mathrm{EF}}$可知

$$k=\frac{-a_y}{2a_x}$$

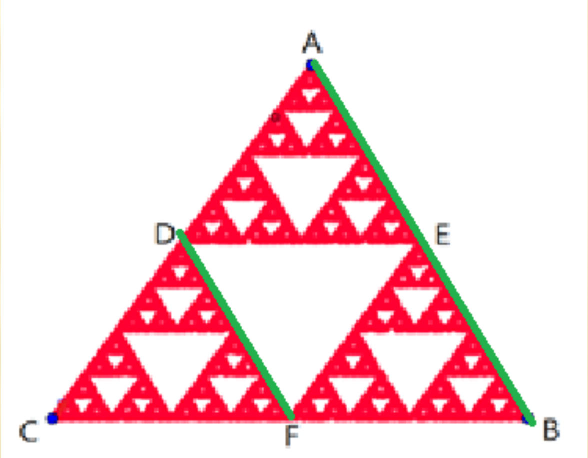
$$y=\frac{a_y}{a_x}x-(1-(\frac{1}{2})^n)\frac{a_y}{a_x}$$

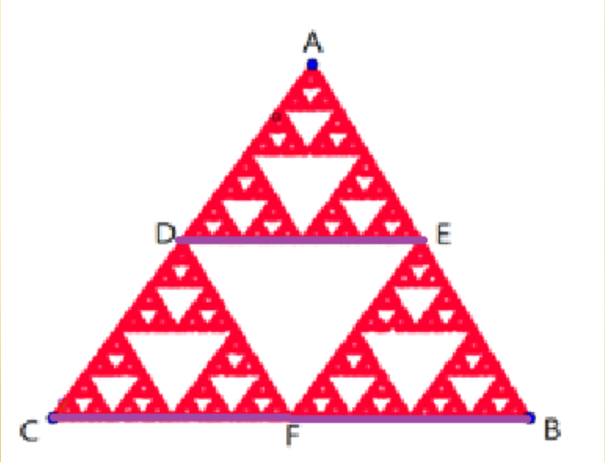


同理可知，另二條斜率的通式為

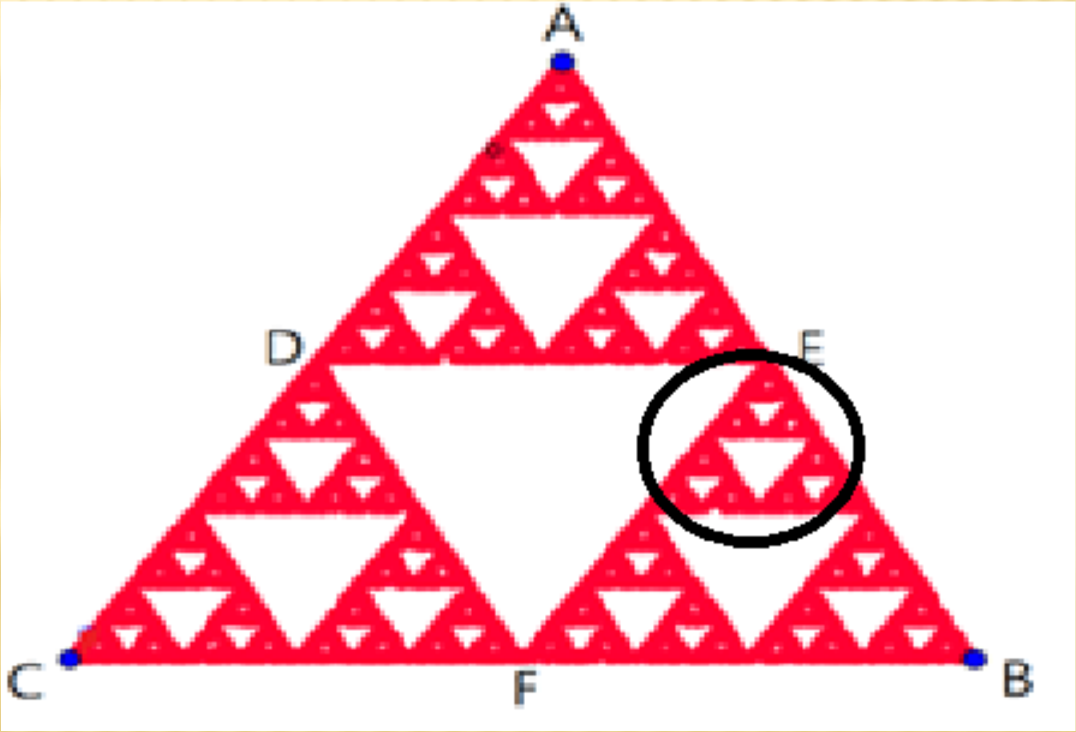
$$\begin{cases} y=\dfrac{a_y}{a_x\text{-}1}\times x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m-1}\times\dfrac{a_y}{a_x\text{-}1} \\ y=\left(1\text{-}\dfrac{1}{2^m}\right)a_y \end{cases}$$

(m表示移動次數，$m\in N\vee 0$)



- 利用線性規劃和編號找出所有點區
  利用改變常數項以及1、2、3的編號表示左下、上面、右下的點區，而圖中圓圈之點區為3-2。



第0個點區為$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq \dfrac{a_y}{a_x} x \\ y \leq \dfrac{a_y}{a_x - 1} x - \dfrac{a_y}{a_x - 1} \end{cases}$

假設某個點區K為$\begin{cases} y \geq (1 - \dfrac{1}{2^n}) a_y \\ y \leq \dfrac{a_y}{a_x} x - (1 - \dfrac{1}{2^n}) a_y \\ y \leq \dfrac{a_y}{a_x - 1} x - (1 - \dfrac{1}{2^n}) \dfrac{a_y}{a_x - 1} \end{cases}$

則下一層點區的分佈有三種情況:

1. 相對點區K，只移動AB線段的點區K-1為

$$\begin{cases} y \geq (1 - \dfrac{1}{2^n})a_y \\ y \leq \dfrac{a_y}{a_x}x - (1 - \dfrac{1}{2^n})a_y \\ y \leq \dfrac{a_y}{a_x - 1}x - (1 - \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^{n+1}})\dfrac{a_y}{a_x - 1} \end{cases}$$

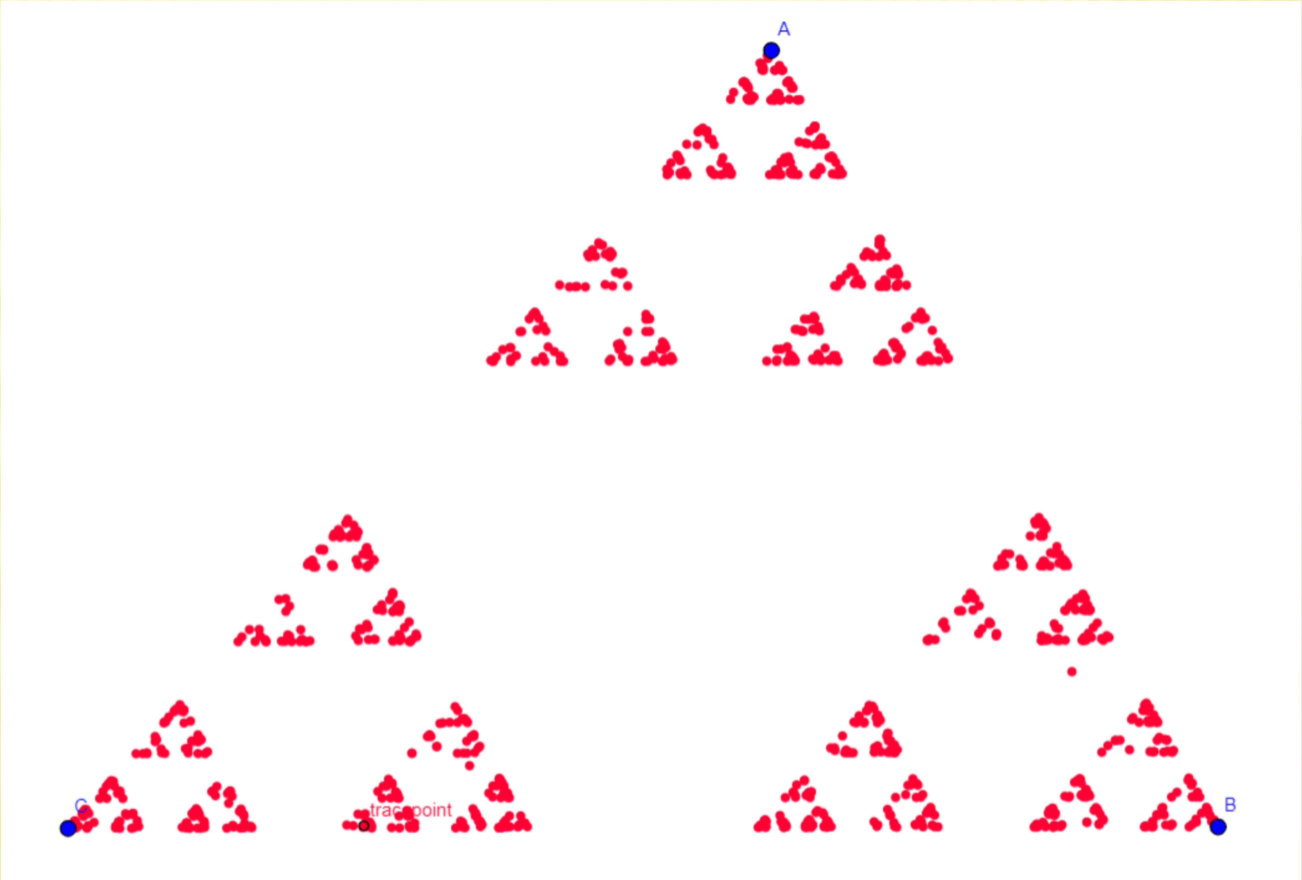
2.相對點區K，只移動BC線段的點區K-2為

$$\begin{cases} y \geq \left(1-\dfrac{1}{2^n+2^{n+1}}\right)a_y \\ y \leq \dfrac{a_y}{a_x}x-\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)a_y \\ y \leq \dfrac{a_y}{a_x-1}x-\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)\dfrac{a_y}{a_x-1} \end{cases}$$

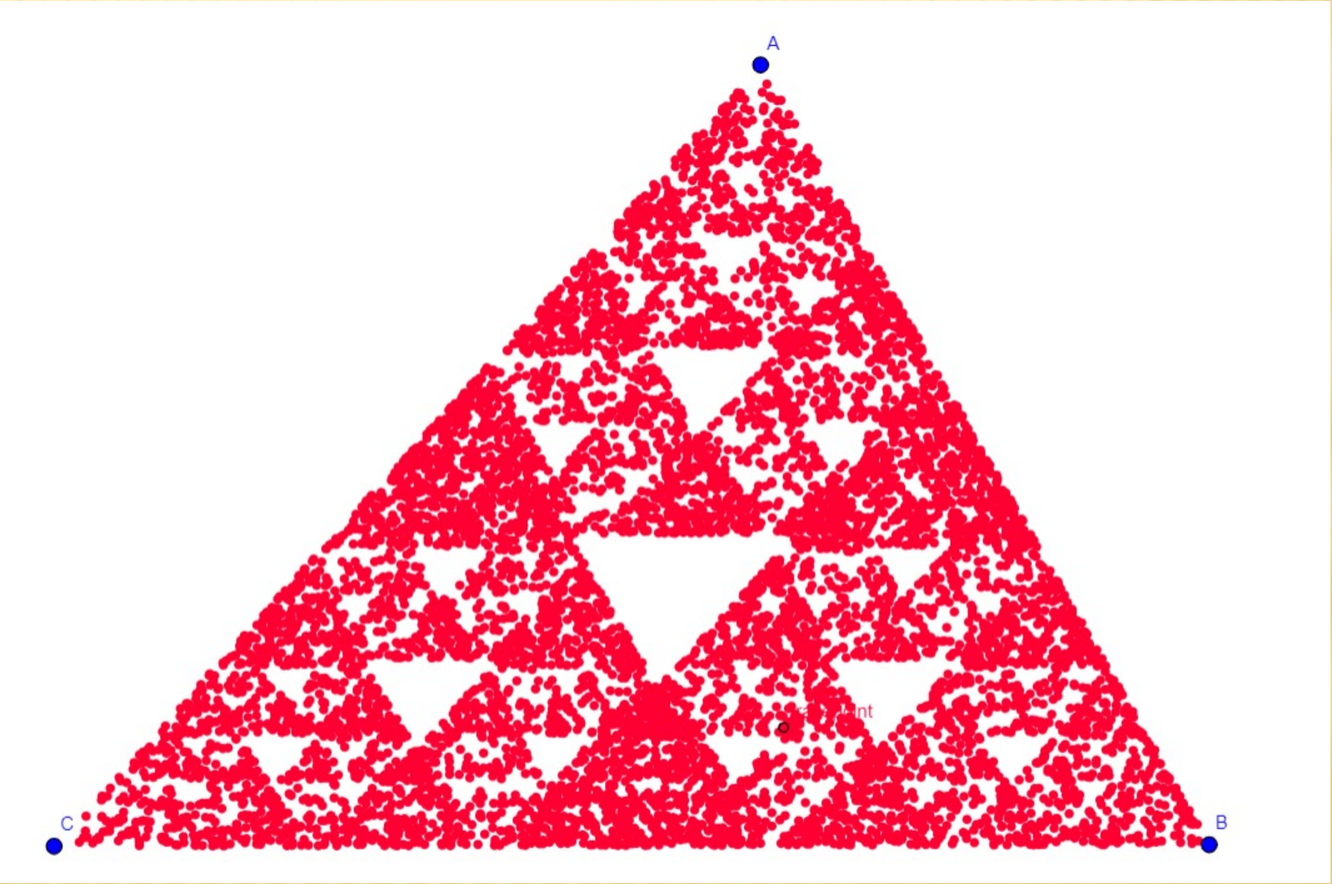
3. 相對點區K，只移動AC線段的點區K-3為

$$\begin{cases} y \geq (1-\dfrac{1}{2^n})a_y \\ y \leq \dfrac{a_y}{a_x}x-(1-\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{2^{n+1}})a_y \\ y \leq \dfrac{a_y}{a_x-1}x-(1-\dfrac{1}{2^n})\dfrac{a_y}{a_x-1} \end{cases}$$

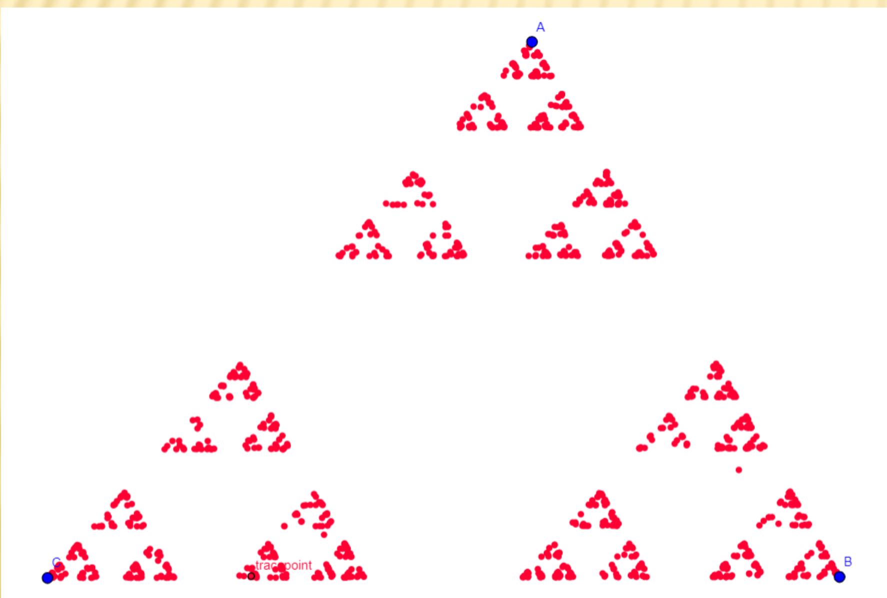
- 利用內分點在三角形跑圖的結果($k$=0.4)

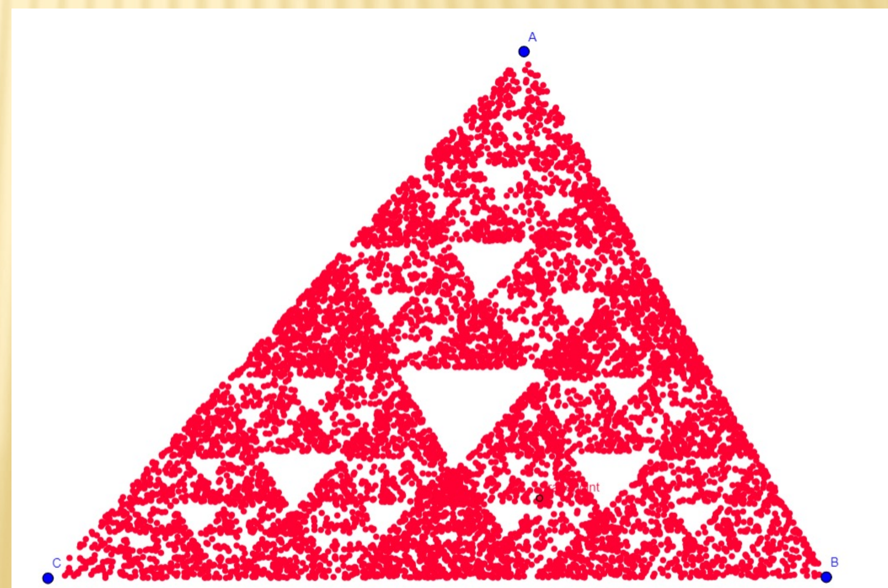


- 利用內分點在三角形跑圖的結果($k$=0.6)

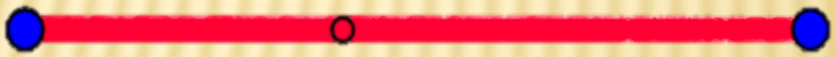


- 觀察兩圖形可以知道當內分點取的比例*k*越大時，中間所剩的空白會越少，相反也是。



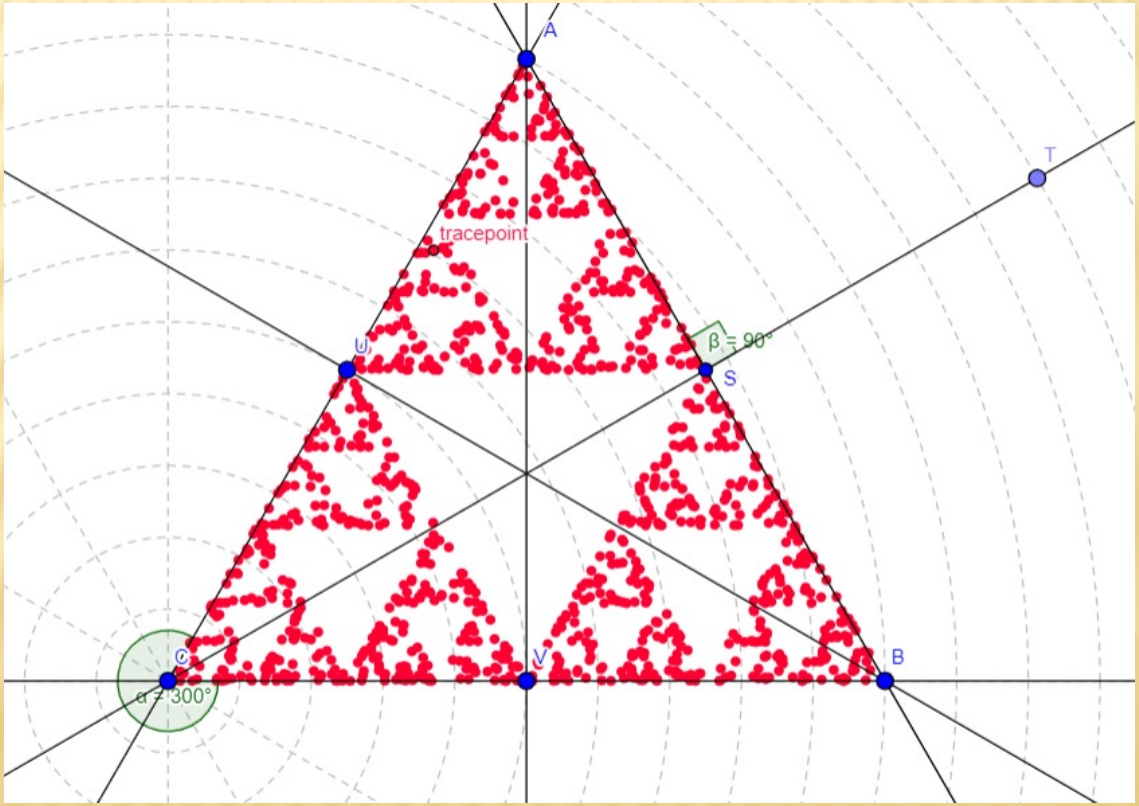



- 回想一開始在一維時$0.5 < k < 1$就會跑出一條直線，但是二維三角形卻沒有點滿整個圖形，推論下限不是0.5。

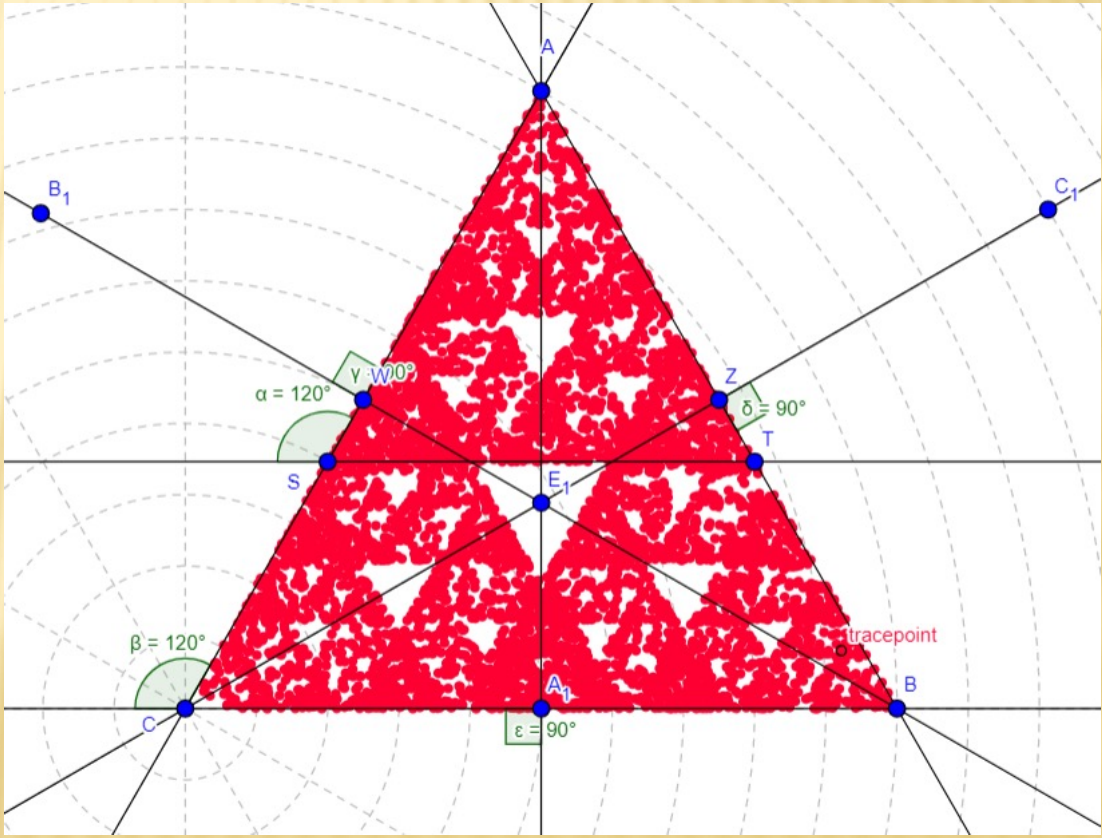


- 先用正三角形討論，透過改變*k*值可以改變中間空白部分大小，當*k*越大，每一層的三角形就會越大，反之亦然，只要第一層的三角形能夠填滿中間空白，接下來每一層都不會再有空白出現，而第一層最中間的空白為正三角形的三心，因此推論當設定一個k恰好能點到三心時，所有大於此k跑出來的圖皆能獲得跑滿整個三角形的圖。

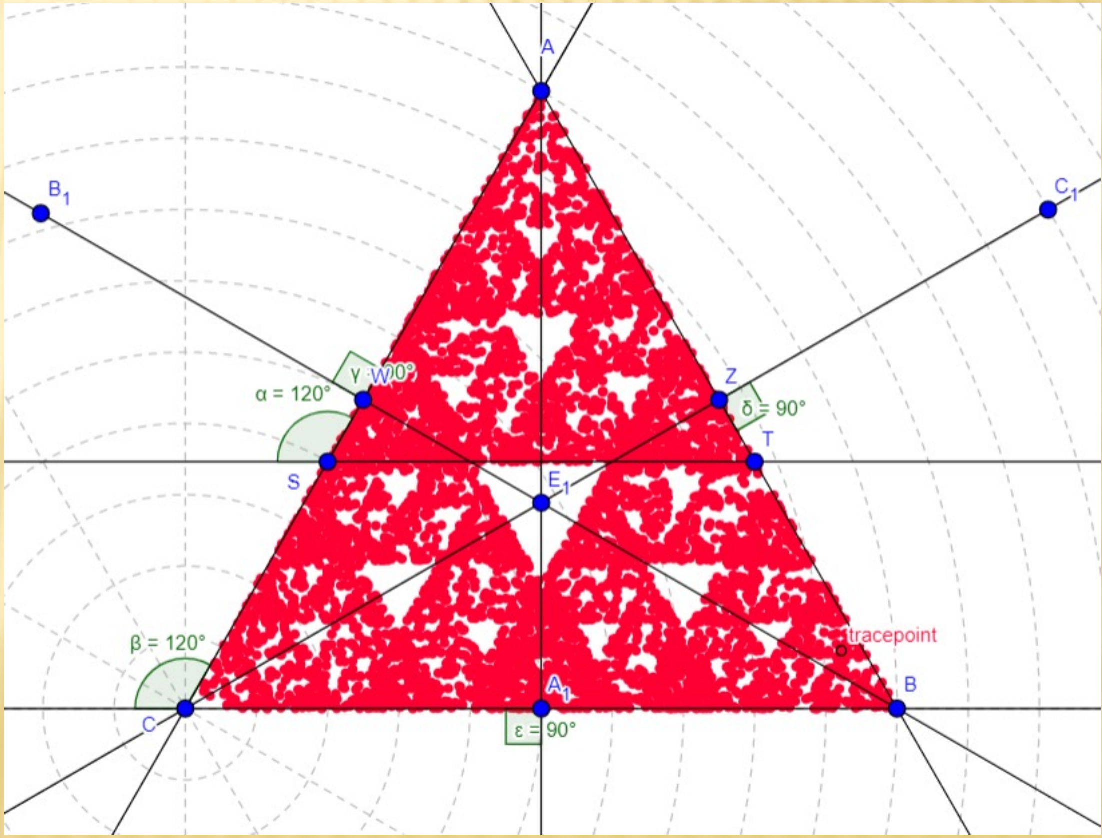
- 從最原始的謝爾賓斯基三角形可以得知，第一層三角形的邊長為$\overline{AS}=\frac{1}{2}\overline{AB}$



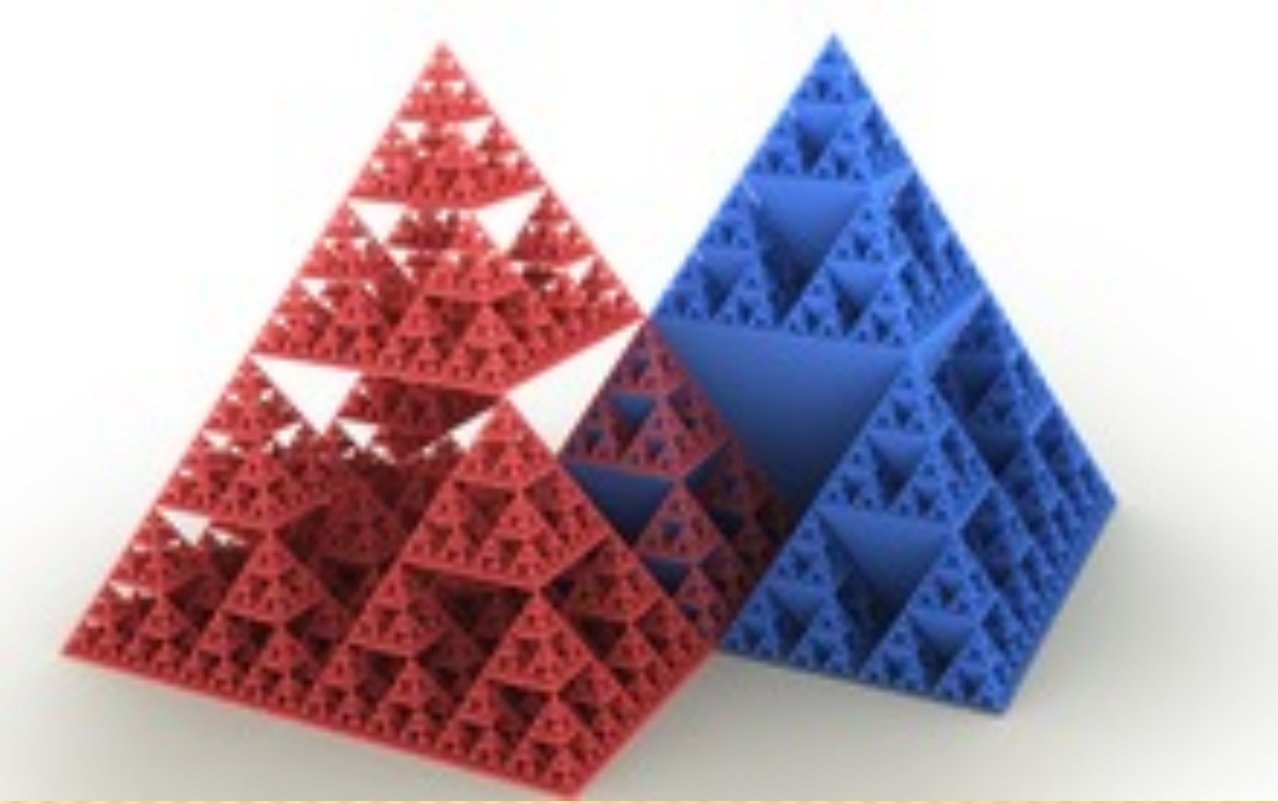
- $E_1$ 為正三角形中心， $\overline{ST}$ 為第二個三角形底邊，當$E_1$通過$\overline{ST}$時，表示此***k***恰好可以點滿整個圖形，(此圖***k***為0.6)



- $\overline{AE_1} = \frac{2}{3}\overline{AA_1}$
- 當$E_1$通過$\overline{ST}$時
- $\overline{AT} = \frac{2}{3}\overline{AB}$
- $\overline{AS} = \frac{2}{3}\overline{AC}$
- $k = \frac{2}{3}$

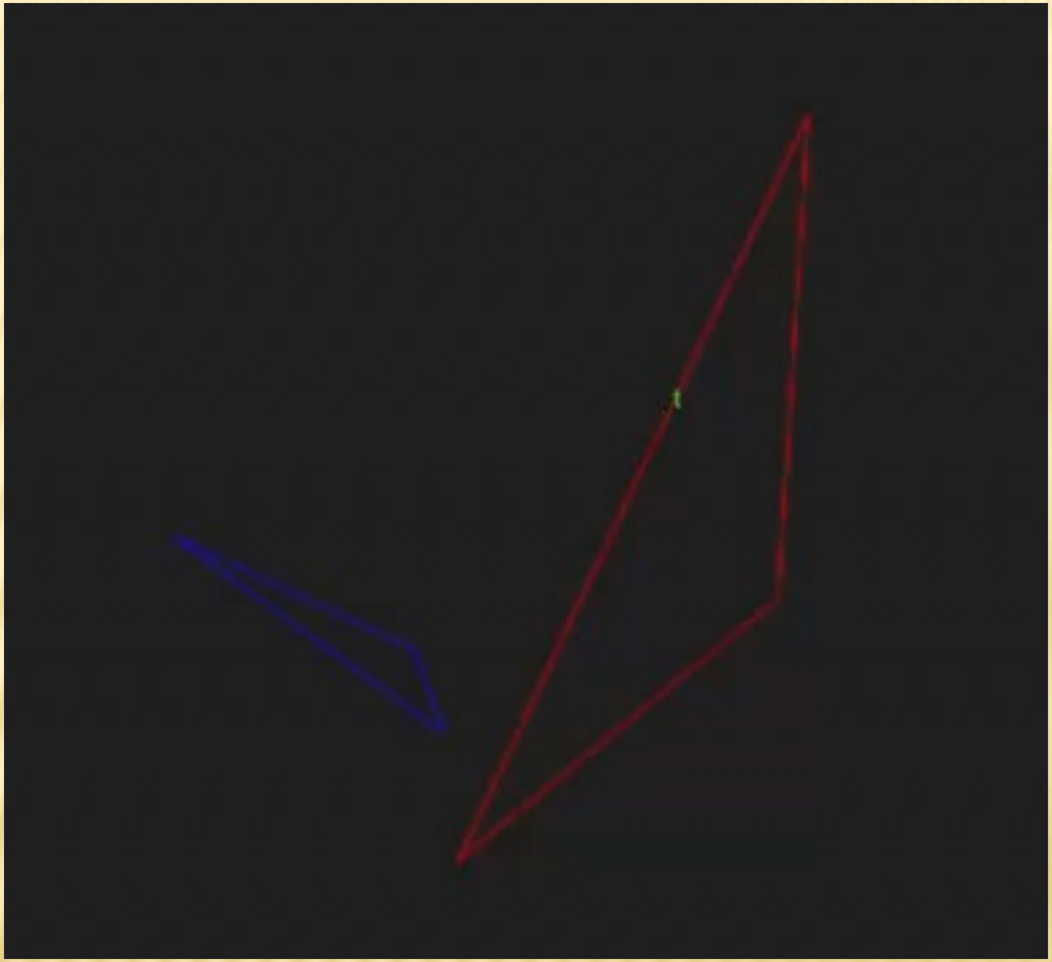


# 三維版本



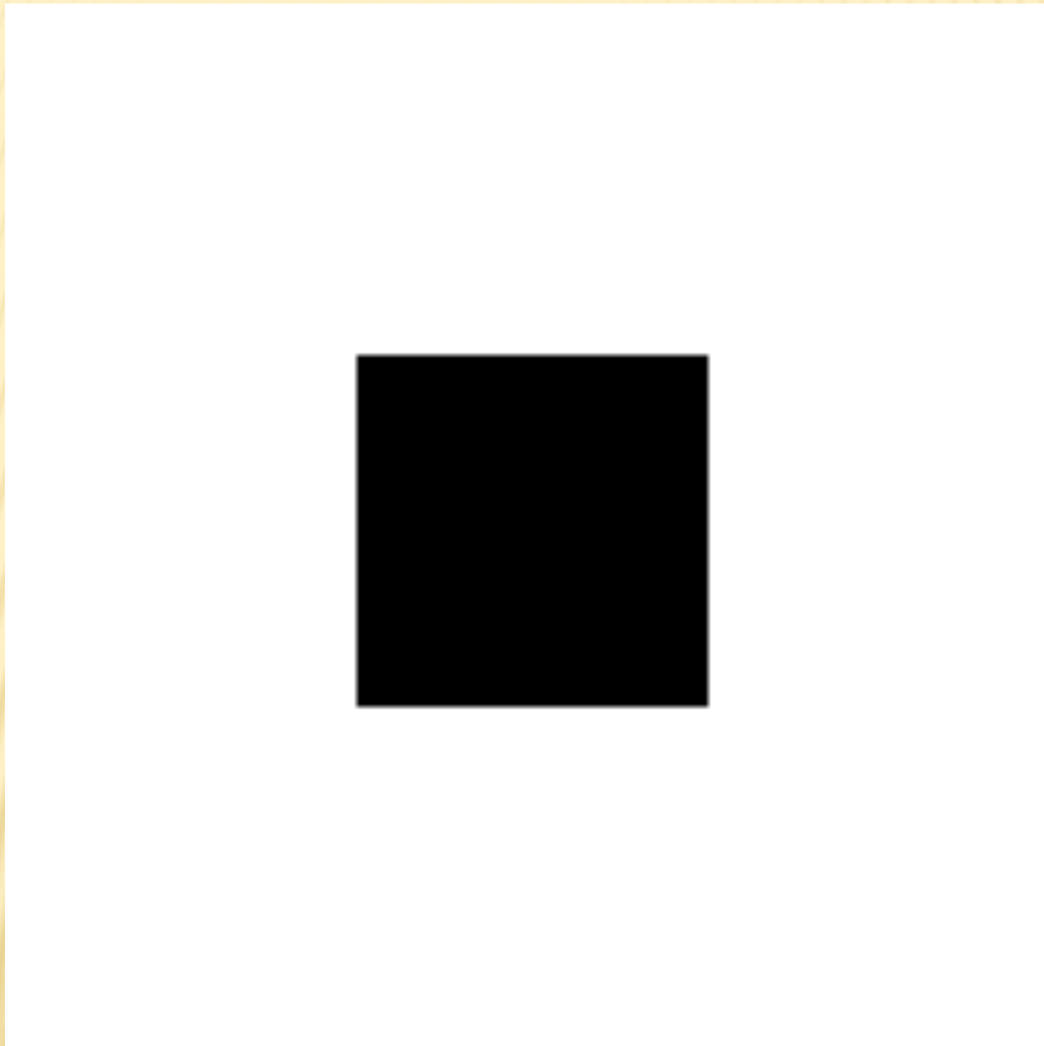
# 巴恩斯利蕨葉

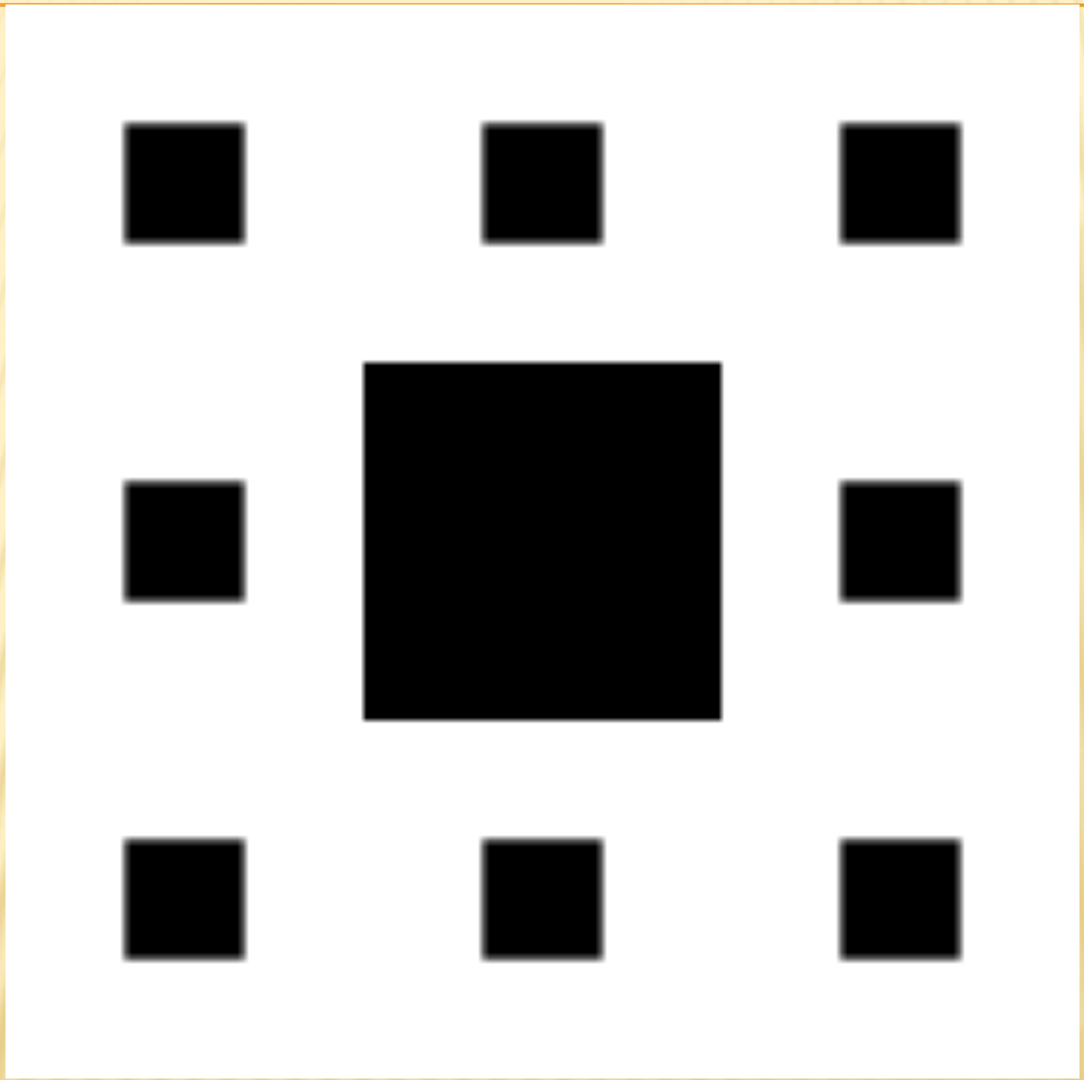
- 由兩個三角形組成，設定一個為紅色一個為藍色，進行方法為設定任意起點，有一定的機率前往紅色三角形的頂點，同時也有一個比較小的機率前往藍色三角形的頂點，透過比較複雜的規則來獲得。

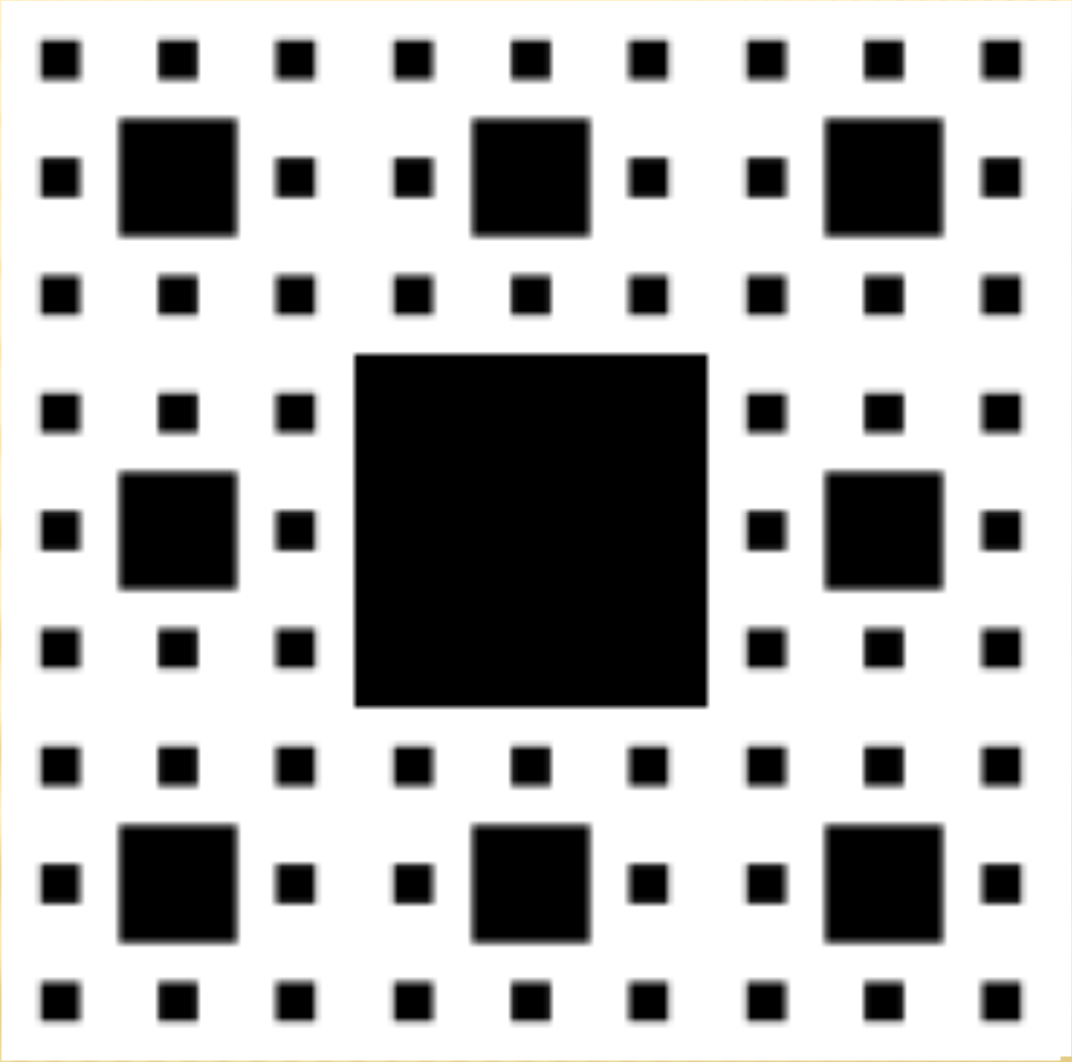


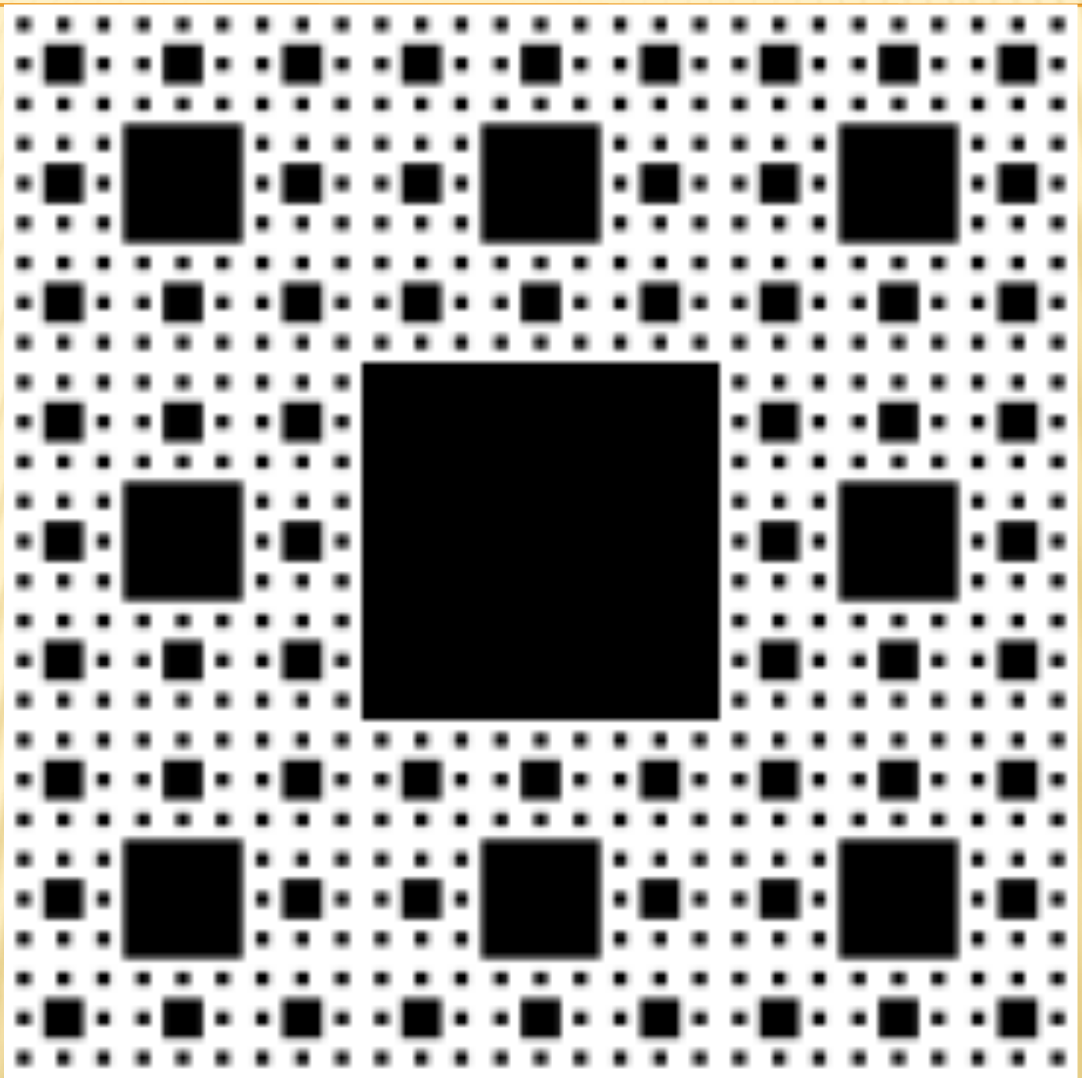
# 謝爾賓斯基地毯

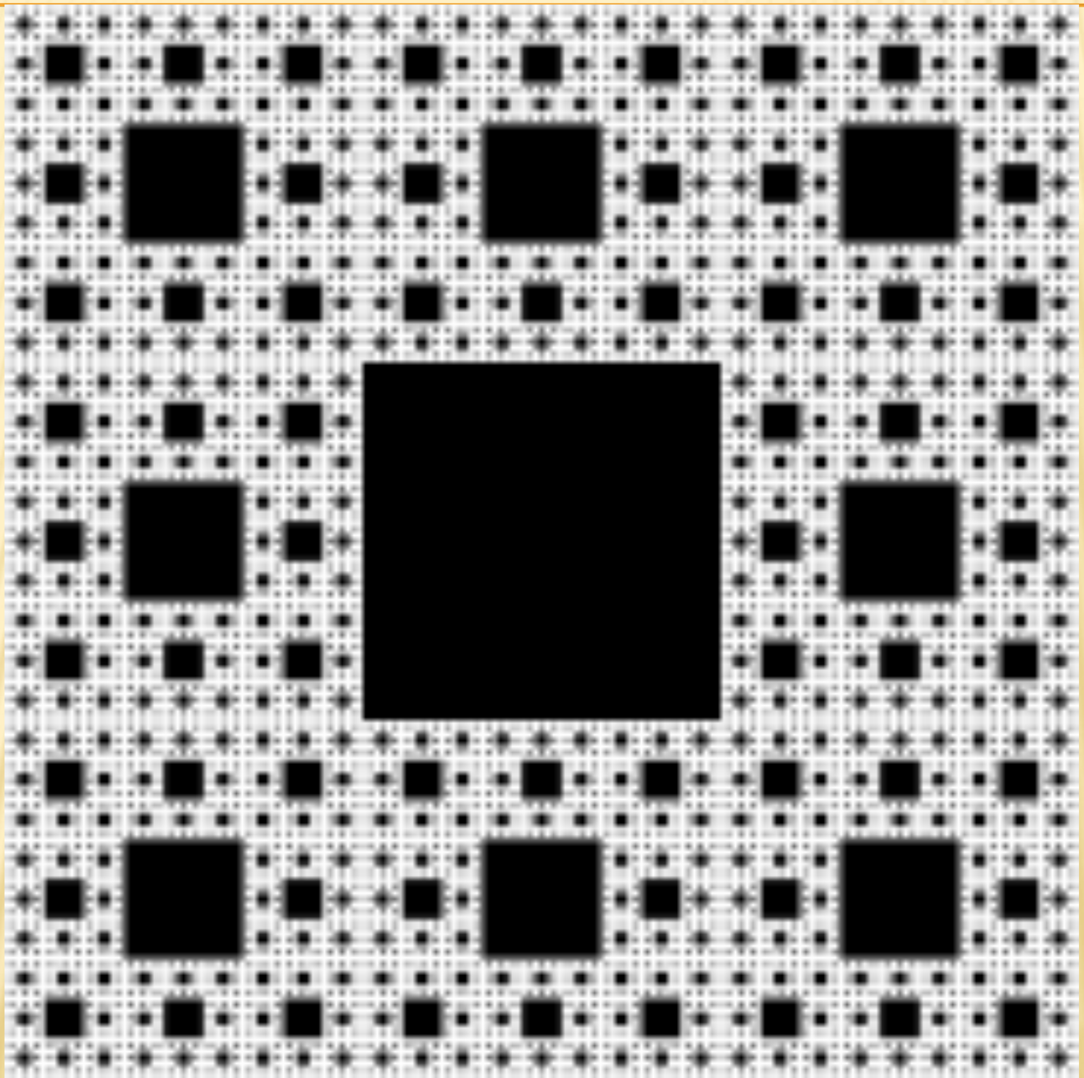
- 謝爾賓斯基地毯的構造與謝爾賓斯基三角形相似，區別僅在於謝爾賓斯基地毯是以正方形而非等邊三角形為基礎的。將一個實心正方形劃分為3的9個小正方形，去掉中間的小正方形，再對餘下的小正方形重複這一操作便能得到謝爾賓斯基地毯。



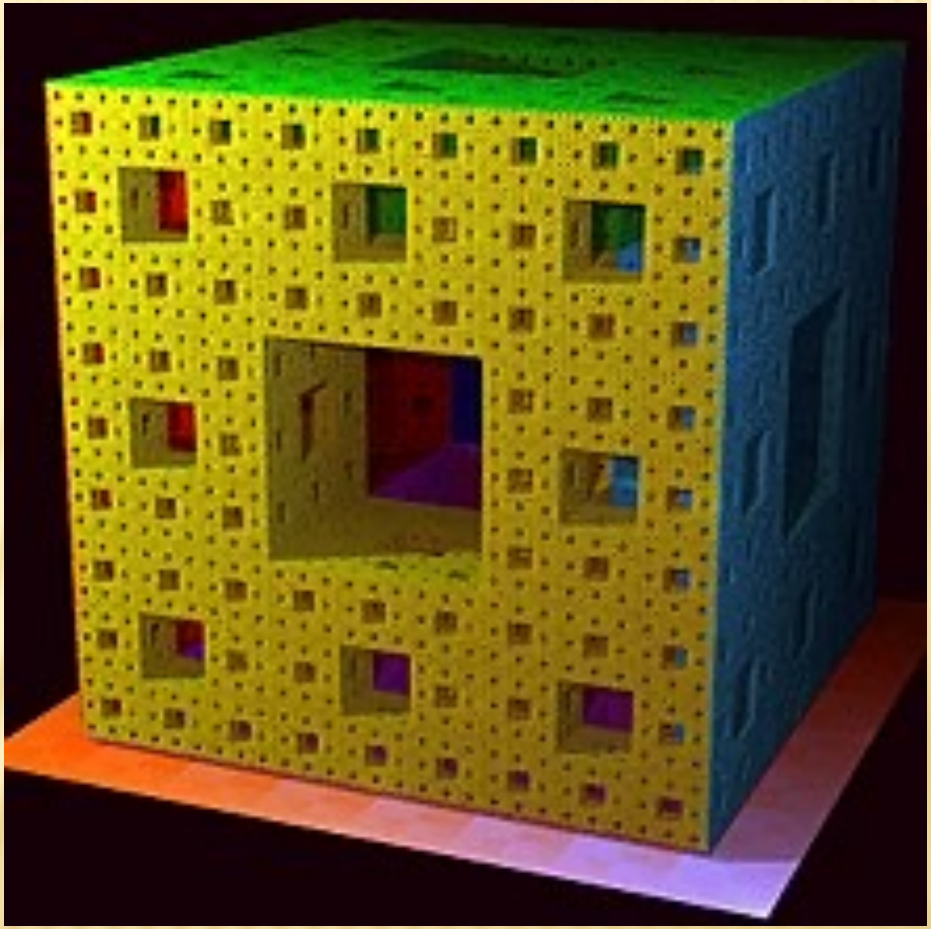








# 三維版本(門格海綿)



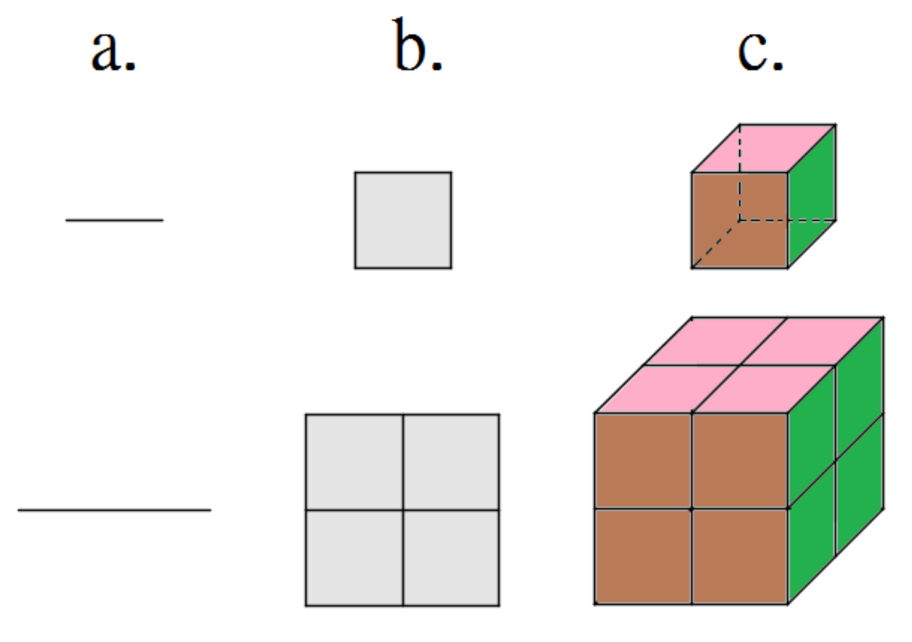
# 維度

# 碎形的維度

- 我們都知道人類是活在三度空間中，而三度空間是什麼？我們都聽過點、線、面、空間，其實這就是幾度的概念。
- 而碎形有趣的地方是它的維度不一定是整數，甚至每一個碎形的維度都不相同。而非整數維度的概念是德國數學家**豪斯多夫**所提出。碎形維度有兩個重要概念，豪斯多夫測度和豪斯多夫維度但前述二種概念都太抽象，故利用數學家史都華的說明來幫助大家理解。

# 史都華討論維度的方法

- 在1維度，繩子要變成2倍邊長，要取2條相等的繩子兩端對齊。
- 在2維度，正方形要變成2倍邊長，要取4個相等的正方形。
- 在3維度，正方體要變成2倍邊長，要取8個相等的正方體。



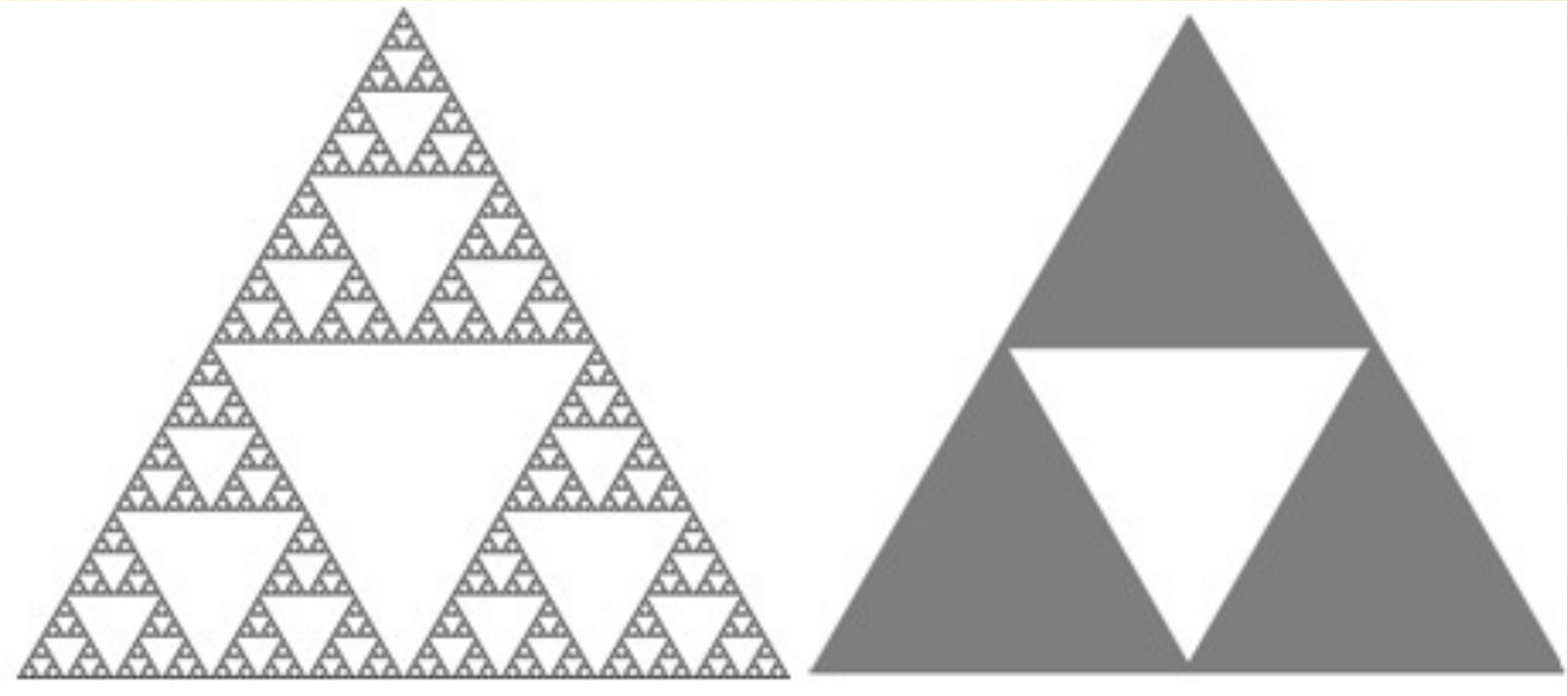
- 所以對於邊長加倍，各維度有著以下內容及推論。

| 維度 | 1維 | 2維 | 3維 | 推論4維 | 推論k維 |
|---|---|---|---|---|---|
| 需要的同等物 | 2 | 4 | 8 | 16 | 視圖案而定 |
| 發現的指數關係 | $2^1$ | $2^2$ | $2^3$ | $2^4$ | $2^k$ |

- **同等物的數量=放大倍數$^{\text{維度}}$**
- 但要如何得到一個不是整數的維度k。如果有一個物體，是用3個相等物抽象的拼在一起，邊長變2倍，則按照推導的數學式，得到$3=2^k$，$\log_2 3=k$，得到k= 1.585...，就得到一個非整數的維度，以上是傑出數學家史都華在他的數學科普著作《數學的問題》中的說明。

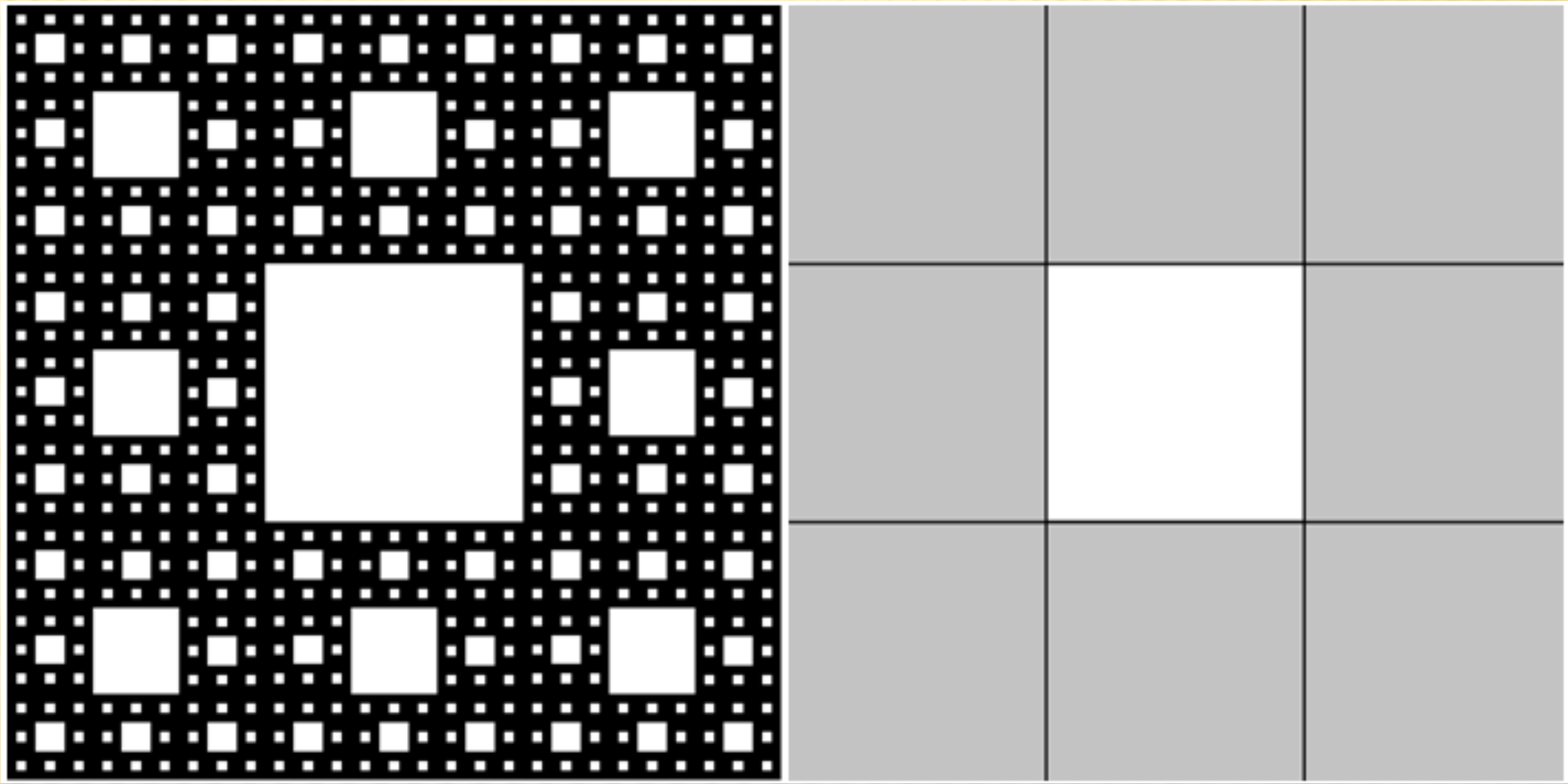
# 謝爾賓斯基三角形

- 3個相等物抽象的拼在一起，邊長變2倍， $3=2^k$，$\log_2 3=k$ ， $k= 1.585$。



# 謝爾賓斯基地毯

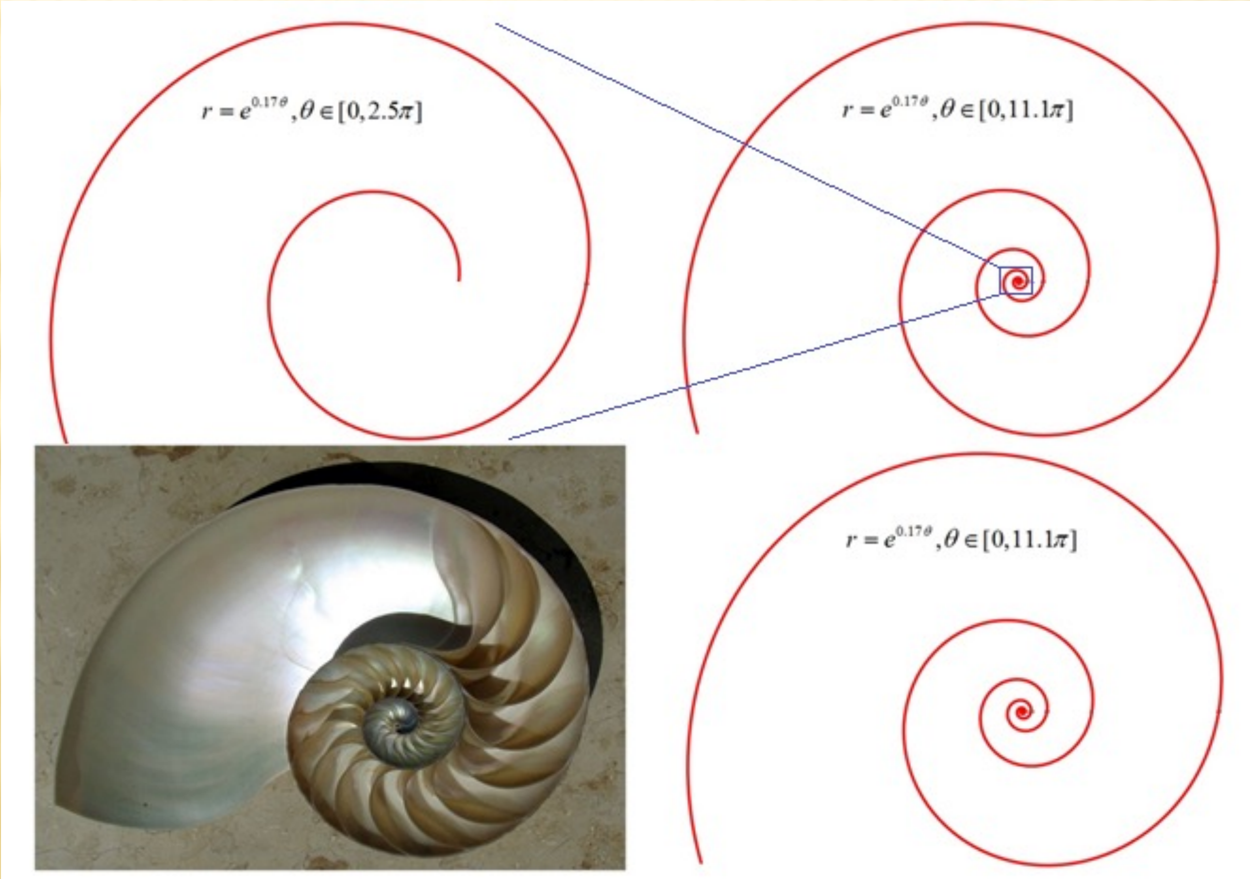
- 8個相等物抽象的拼在一起，邊長變3倍， $8=3^k$，$\log_3 8=k$ ， $k= 1.89$。



# 發現與應用

# 黃金比例螺線

- 我們可從黃金比例的螺線中發現自我相似的情形，如果我們將螺線放大就可以看到自我相似的情形。



# 羅馬花椰菜

- 羅馬花椰菜整體與局部具有自我相似

# 蒲公英

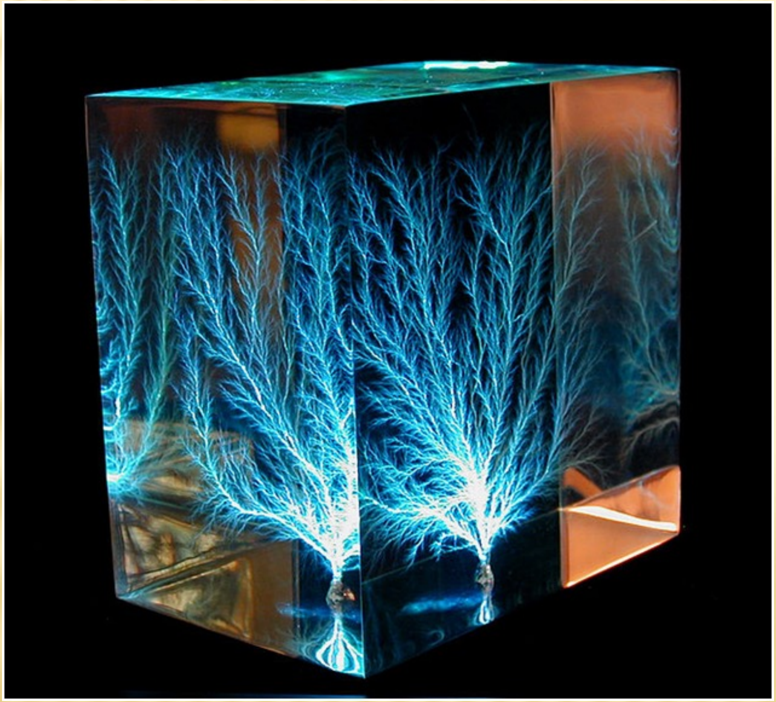
- 蒲公英就是最真實的碎形結構

# 閃電

- 閃電會不斷的開叉，每個局部與整體相似

# 立希藤貝格圖

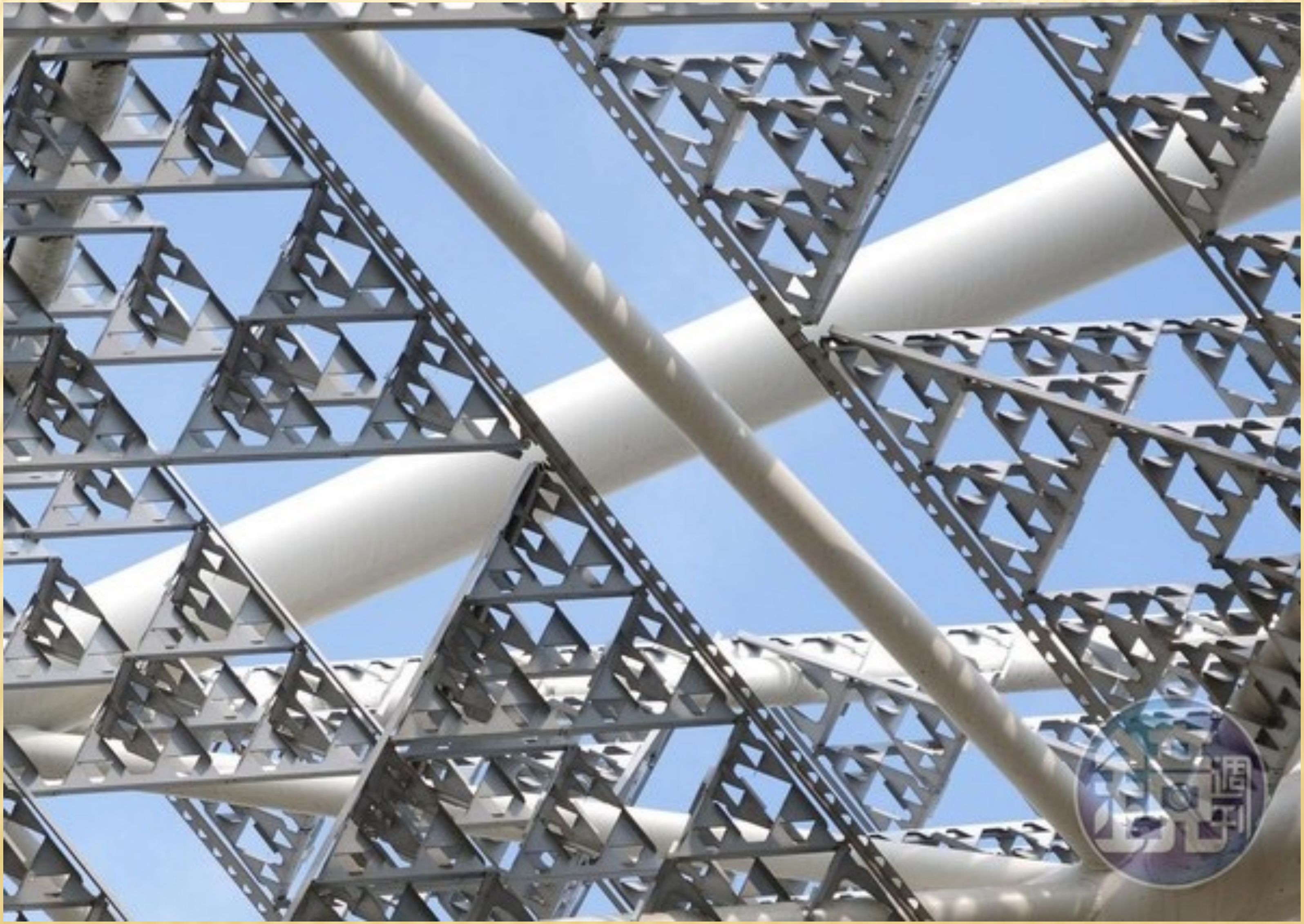
- 1777年利希藤貝格電擊透明玻璃，而玻璃在電擊後產生樹的紋路，感覺如同電在玻璃中流動的軌跡。



# 台南美術館2館

- 由日本建築大師坂茂操刀設計，崇尚自然極簡的風格表露無遺。

# 五角碎形屋頂



# 參考資料


- Chaos Game

https://www.youtube.com/watch?v=kbKtFN71Lfs

- 廖思善（２００６）。動手玩碎形。台灣：天下文化
- 謝爾賓斯基三角形（２０１７）２０１９年６月取自

**https://blog.csdn.net/yanerhao/article/details/47069973**

- 謝爾賓斯基三角形(維基百科)

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%AC%9D%E7%88%BE%E8%B3%93%E6%96%AF%E5%9F%BA%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2

- Cantor set （２０１７）２０１９年６月取自

https://www.math.hmc.edu/funfacts/ffiles/20004.3.shtml

- 謝爾賓斯基地毯(維基百科)

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E8%B0%A2%E5%B0%94%E5%AE%BE%E6%96%AF%E5%9F%BA%E5%9C%B0%E6%AF%AF

- 碎形(維基百科)

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%88%86%E5%BD%A2

- 〈時評〉碎形藝術與大自然、及碎形典故

https://www.taiwannews.com.tw/ch/news/3495747

- 科赫曲線(維基百科)

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E7%A7%91%E8%B5%AB%E6%9B%B2%E7%B7%9A

# 謝謝聆聽