自然常數 e（數面報告）

第三組（第九組報告）

411031104 廖英秀 411031109 羅允澤

411031124 高新雄 411031140 林咏勳

411031243 鄭蕙倪 410731144 柯彥廷

研究動機與報告內容簡介

到了大學才對自然對數的底 e 有著初步認識，但卻對這個自然常數 e(Natural Constant)的最初發明來源不太清楚。

此外，e 不僅僅在數學的微積分中扮演著重要的角色，在機率與統計(Probability and Statistics)有著相當多的應用，並時常能應用在冪(Exponentiation)的計算。

基於這些原因，故我們選擇此主題來研究並進行報告，而報告內容主要介紹 e 的歷史背景、由來、定義、相關問題和應用。

Part1 納皮爾簡介

1. 蘇格蘭數學家、物理學家兼天文學家，發明了對數(logarithm)，也是自然常數 e 最的研究者
2. 最早提到自然常數 e 的相關內容為納皮爾於 1618 年出版的「對數」，但他沒有記錄這個數，並只藉由一些估算得到 e 的近似值為 2.71828，以及以它為底去計算出一些值後，繪製自然對數表
3. 一直到尤拉來著手研究這個常數後才給出了正式的定義，即 $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
4. 另一方面，在數學上也定義了自然對數 $\ln x = \log_e x$

Part2 歐拉簡介

1. 瑞士數學家和物理學家，近代數學先驅之一
2. 在多個數學領域，包括微積分和代數都做出重大貢獻

3. 引進許多數學符號、寫法等，例如函數的記法 “$f(x)$”，以及在在微積分中與笛卡爾、高斯於不同時期經由研究複變函數而引進虛數的記號 “$i=\sqrt{-1}$”，以及定義了自然常數 e (Natural Constant)，亦稱為尤拉數(Euler's Number)

4. 在物理的力學、光學、天文學等領域都有突出的貢獻

Part3 高斯簡介

1. 德國數學家、物理學家、天文學家、大地測量學家，並享有「數學王子」的美譽

2. 國小時發現了等差級數公式，18 歲時發現了最小平方法

3. 在線性代數中發明線性方程組的矩陣寫法，並定義了秩(Rank)，簡化梯矩陣(RREF)等數學語言，以及發明矩陣的基本列運算，在數論中定義了”同餘”，在抽象代數與複變中使用複變搭配代數的方法證明了”代數基本定理”

4. 微積分中，用歐拉的自然常數 e 定義了高斯函數，並用之來定義常態分配的機率密度函數(Probability Density Function，簡稱 p.d.f)

5. 幾何上，在 17 歲時以尺規作圖畫出 17 邊形、將歐拉引進的虛數搭配二維直角座標平面後創造了高斯複數平面、微分幾何上發明了許多曲面投影的相關理論

6. 高斯函數： $f(x)=e^{ax^2}$

Part4 傅立葉簡介

1. 法國數學家、物理學家，在數學界的貢獻中以傅立葉級數、轉換最著名

2. 並應用於物理的熱傳導、震動理論

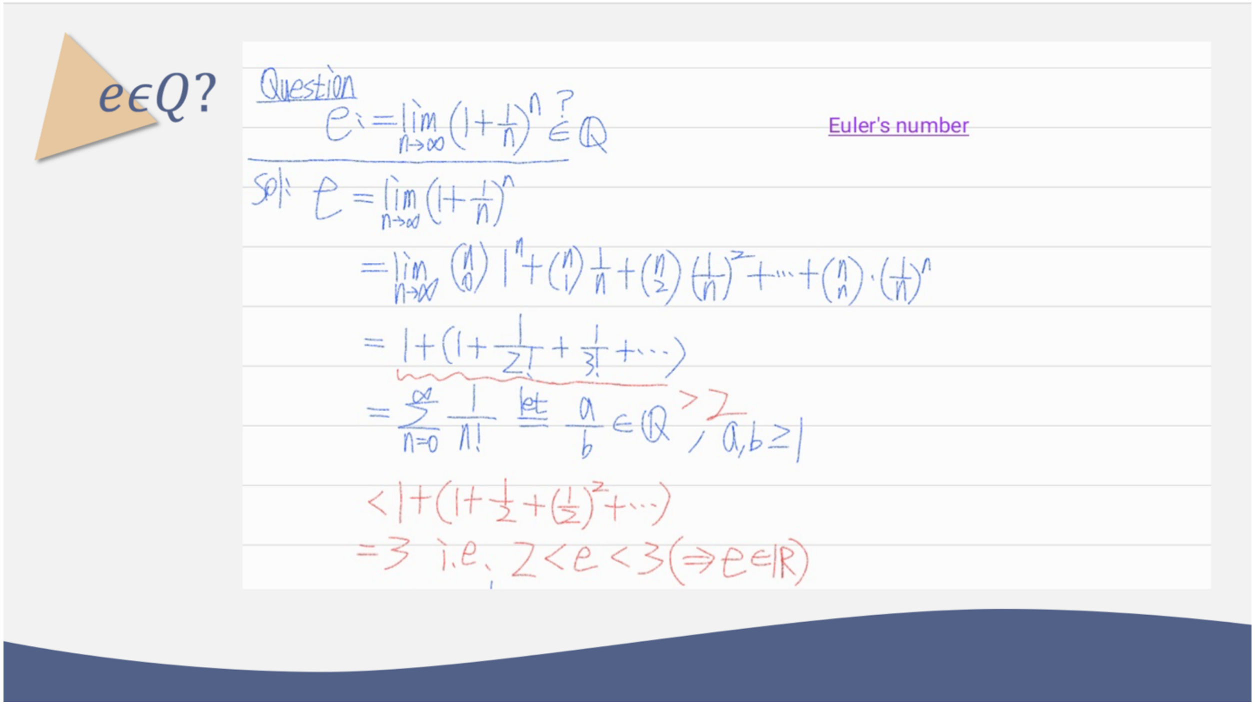
3. 亦發現了溫室效應

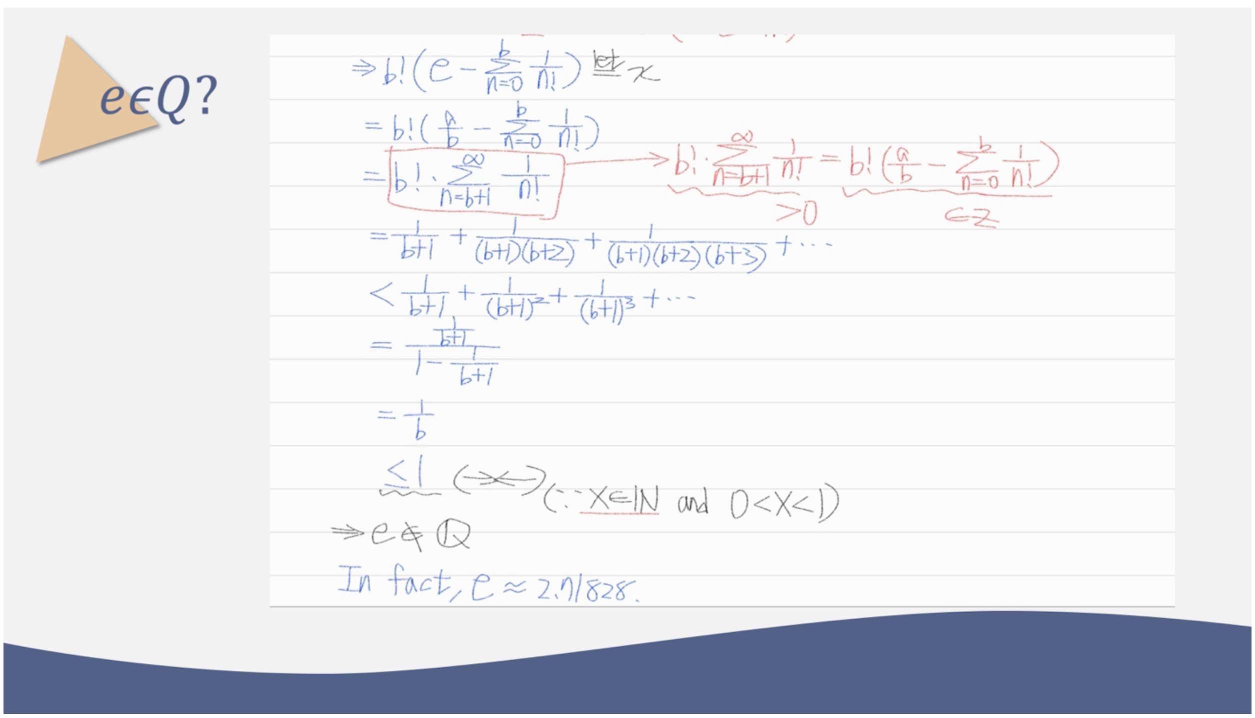
4. 另一方面，亦曾研究過 e 是否為有理數的問題

Part5 e 的數系

歐拉著手研究之前納皮爾曾研究的自然常數 e 後，並用極限的方式去進行定義。

於是 18 世紀的數學家紛紛開始去研究這個數，但皆未果並且也不清楚 e 的數系或使用方式。





主要參照傅立葉的做法，先判斷 e 是介於哪兩數，再假設 e 為有理數去進行推導後得到矛盾，最後得知 e 不是有理數，也就是說 e 是無理數

Part6 麥穗理論

蘇格拉底提出的問題：麥穗理論

- 兩千五百年前，三個學生問蘇格拉底一個問題：「怎樣才能找到理想的人生伴侶？」
- 蘇格拉底帶著學生來到一片麥田前，並對他們說：「請你們走進麥田，一直往前不要回頭，途中摘下一支最大的麥穗，只能摘一支。」
- 第一個學生走進麥田。看見一支又大又漂亮的麥穗，很高興地摘下了這支麥穗。可是，他繼續往前走，發現有很多麥穗比他摘的那支大得多。他很後悔下手早了，只好遺憾地走完了全程。
- 第二個學生吸取了教訓。每當他想要摘麥穗時，總是提醒自己：後面還有更好的。不知不覺他走到了終點，卻一支麥穗都沒摘。他也很後悔，因為自己沒有把握住機會，總覺得後面會有更好的選擇，最後錯過了全世界。
- 第三個學生吸取了前兩者的教訓。他把麥田分為三段，走過第一段麥田時，只觀察不下手，並在心中把麥穗分為大、中、小三類； 走過第二段麥田時，他依然只觀察不下手，用來驗證第一段的判斷是否正確；走到第三段麥田，也就是最後三分之一時，他摘下了自己遇到的第一支屬於大類的麥穗。這可能不是最大的一支，但他心滿意足地走完了全程。
- 這就是著名的「麥穗理論」。
- 第一，訂下最基本的滿意標準；
  第二，考察現有的可選方案；
  第三，如果有可選方案滿足最基本的滿意標準，就不再尋找更優方案。
- 苏格拉底的意思是，爱情里犹豫不决，优柔寡断的人，什么都得不到

Part7 克普勒的难题

然後是克普勒的难题

前面會提到麥穗理論是因爲接下來我要講的克普勒難題與此非常相似。首先，在這裏介紹约翰内斯·克普勒

- 约翰内斯·克普勒（Johannes Kepler），恐怕是古今中外知名度最高的天文学家、數學家，十七世紀科學革命的關鍵人物。他从第谷浩如烟海的观星资料中，发现了行星运动的三大规律。一方面，间接打破了宗教的枷锁；另一方面，启发牛顿创立了万有引力定律。

- 伟人也有伤心的时候，1611 年，开普勒的发妻芭芭拉因为疾病去世。为了照顾自己的孩子，也为了缓解自己的悲痛，开普勒斟酌再三，决定再婚。
- 消息一出，就有很多姑娘登门拜访。克普勒本着严谨、求实的学者脾气，给这些姑娘一一编号、挨个儿面试。
- 结果呢？第一位姑娘体味不佳、第二位姑娘生活奢侈，第三位姑娘已经订婚了……一直到第十一个，也就是最后一个，开普勒依然没有办法定夺。
- “是上帝的惩罚还是我的罪孽”，老头子悲愤至极，“使我不得不考虑这么多的可能？”

Part8 梅裏爾簡介、未婚妻難題

1. 數學家-梅里尔·弗勒德（Merrill Flood）解決开普勒的难题

- 克普勒的難題并非無法解開，以下要說的這位人物便是解開了此難題，而且結果與 e 相關。
- 梅里尔是美國數學家，他的研究多数和选择有关，與梅爾文德捨共同開發了“囚徒困境”理論而聞名，並專攻於數學的博弈論。
- 随着二战爆发，和很多学者一样，梅里尔被美国战争部聘用。打仗嘛，总是面临着各种各样的决策。大概这种寻找最优解的氛围，感染了梅里尔，使他对开普勒的难题产生了兴趣，最终在 1949 年，提出了“未婚妻难题”，解答千年难题
- 现在就让我们看看，如何才能找到心仪的爱人。
- 数学家解决问题的第一步，是抽象。梅里尔的未婚妻难题，就是把开普勒的难题，变成一个数学游戏。

- 假設有一些求婚者，分別記為 1、2、3、4、5…i…N，而每次只能從這些有好有壞的求婚者中面試其中的一個，且每次都必須做出決定，要不“拒絕(reject) ”要不“接受(accept) ”。
- 怎麼做才能以最大概率選中那個最好的呢?
- 把這個問題轉換為下
- 若第 i 個未婚妻最好，並從前面 i-1 人中拒絕編號 S 之前(1,2,...,s-1)的未婚妻，則選到最好的未婚妻的機率 P(i:Sth)是多少？其中 1<S≤i≤N

- 承(1)，選到最好的未婚妻機率 P 為多少？

- 藉由盲猜的選到最好的未婚妻機率 P_g 是多少？以及當 N 趨近於正無窮它會趨近多少?

- 當 N 趨近於正無窮，則選到最好未婚妻機率 P 的最大值 P_M 是多少？

未婚妻難題(參考解法)

(1)

Assume that ①,②,…,Ⓝ: fiancess

$1 < S \le i \le N$ and the best fiancee is ⓘ and is number S, say Sth.

N: total of fiancées.

$$P(ⓘ:Sth) = \underbrace{\frac{S-1}{i-1}}\cdot\underbrace{\frac{1}{N}}$$

①,②,…,(i-1), ⓘ, … N

i-1

(2)

$$P := \sum_i P(ⓘ:Sth)$$

$$= \sum_{i=S}^{N} \frac{S-1}{i-1}\cdot\frac{1}{N}$$

$$= \frac{S-1}{N}\sum_{i=S-1}^{N-1}\frac{1}{i}$$

$$= \frac{K}{N}\sum_{i=K}^{N-1}\frac{1}{i}$$

$$= \frac{K}{N}\left(\frac{1}{K}+\frac{1}{K+1}+\frac{1}{K+2}+\cdots+\frac{1}{N-1}\right)$$

(3)

$P_g = \frac{1}{N} \to 0$ as $N \to \infty$

i.e. the probability of finding the best fionces in {①, ②, ..., Ⓝ}
Approach 0 as $N \to \infty$

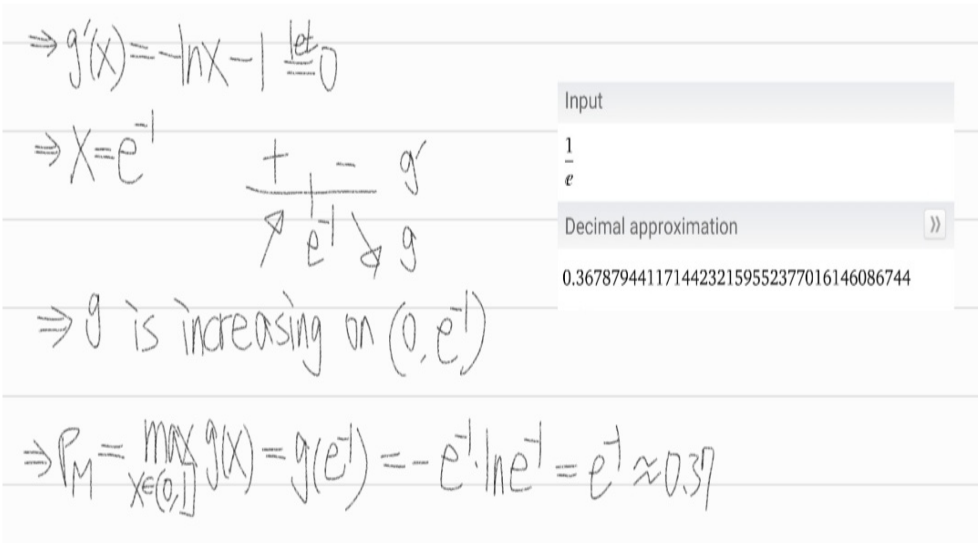
(4)

Find max. of P as $N \to \infty$ (say P_M)

Let $x = \lim_{N\to\infty} \frac{K}{N}$ and define $f:(0,1] \to \mathbb{R}$ by $f(t) = t^{-1}$ $\forall t \in (0,1]$

$\Rightarrow f$ is conti. on $(0,1]$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} P \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{K}{N}\left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K+1} + \cdots + \frac{1}{N-1}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{K}{N}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{K} + \frac{1}{K+1} + \cdots + \frac{1}{N-1}\right) - \frac{K}{N}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{K}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{K}{N}\left(\frac{1}{N}\cdot f\left(\frac{1}{N}\right) + \frac{1}{N} f\left(\frac{2}{N}\right) + \cdots + \frac{1}{N}\cdot f\left(\frac{N}{N}\right) - \frac{f\left(\frac{N}{N}\right)}{N} - \left(\frac{1}{K}\cdot f\left(\frac{1}{N}\right) + \frac{1}{K} f\left(\frac{2}{N}\right)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \cdots + \frac{1}{K} f\left(\frac{K}{N}\right)\right)\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{K}{N}\left(\int_{\frac{1}{N}}^{\frac{N}{N}} f(t)\,dt - \frac{f(1)}{N} - \int_{\frac{1}{N}}^{\frac{K}{N}} f(t)\,dt\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{K}{N}\left(\int_{\frac{K}{N}}^{\frac{N}{N}} f(t)\,dt - \frac{f(1)}{N}\right) \\
&= x\cdot\left(\int_x^1 t^{-1}\,dt - 0\right) \\
&= -x\ln x \quad , x \in (0,1] \\
&\overset{\text{let}}{=} g(x)
\end{aligned}
$$



➢ 通過剛才的解法，我們可以進行一系列的計算，當總數為 N 時，拒绝編號 S 之前的人，計算最優解的概率 P，同时跟瞎矇的概率 Pg 做比较：

N	S	P	P_g
3	2	50%	1/3
4	2	46%	1/4
5	3	43%	1/5
6	3	43%	1/6
7	3	41%	1/7
8	4	41%	1/8
9	4	41%	1/9
10	4	40%	1/10
100	38	37%	1/100
1000	369	37%	1/1000
极大	N/e	$\boxed{e^{-1}（\approx 37\%）}$	$\boxed{极小（\approx 0）}$

➢ e 表示自然底數，表格參考了楊照崑老師的《摘麥穗問題》

➢ 而我們可以看出，隨著 N 變大，P 和 Pg 也逐漸下降，最終近似於 0.37。其中 Pg 恆小於 P，也就是說藉由梅裏爾未婚妻難題中的數學遊戲的選取

方式比盲猜的選取方式好。只需要一個小小的拒絕策略，就能增加成功的概率，這，正是數學的魔力。

- 其實，你還可以這麼做

- 實際上，梅里爾・弗勒德，不僅是愛情導師，而且是博弈論的奠基人，對冷戰時期的核戰略，提供了理論上的支持。這樣的人物，長期不為人所知，實在是頗為遺憾。

- 當然嘍，愛情是複雜的。從生理上講，它是多種激素的合力；从心理上讲，它可能是一种特殊的应激；要是人人都能看出“A 比 B 好”、“C 比 D 壞”，哪還會有那么多始亂終棄的故事呢？如果是對 A 一見鍾情，心動無比，那你对后面的 BCDEF 还有興趣比较吗？

Part9 自然常數 e 的應用

應用1：冪(Exponentiation)的計算

Ex:

$$(1)\max_{x>0}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)=?$$

$$(2)\frac{d}{dx}(\ln x)=?\ \forall x>0$$

$$(3)\frac{d}{dx}(a^{x})=?\ \ \forall a>0$$

$$(4)\frac{d}{dx}(x^{x})=?$$

$$(5)\frac{d}{dx}\left(x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right)=?$$

應用1：冪(Exponentiation)的計算(參考算法)

(1) $(x^{\frac{1}{x}})' = (e^{\ln x^{\frac{1}{x}}})'$

$= (e^{x^{-1}\ln x})'$

$= e^{x^{-1}\ln x} \cdot x^{-2}(1-\ln x) \overset{\text{let}}{=} 0$

$\Rightarrow x = e$

	+	−	f'
	$\nearrow$	e $\searrow$	f

$\Rightarrow \max\limits_{x>0}(x^{\frac{1}{x}}) = e^{\frac{1}{e}}$ if take $x=e$.

藉由數值代入、軟體繪圖來觀察最大值所在的點

$\sqrt[2]{2} \approx 1.414$

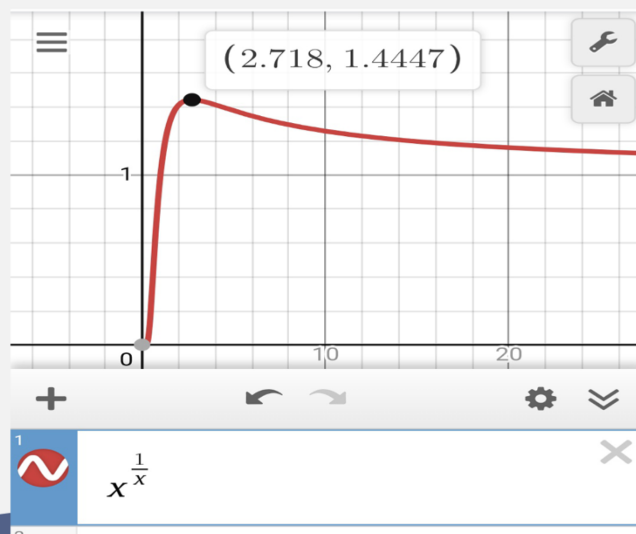
$\sqrt[3]{3} \approx 1.442$

.

.

.

$\sqrt[e]{e} \approx 1.445$ 為最大值！



應用1：冪(Exponentiation)的計算(參考算法)

(2) $\frac{d}{dx}(\ln x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$

$=\frac{1}{x}\quad \forall x>0$

$h\to 0^+$

$\lim\limits_{h\to 0^+}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$

$\underset{\text{Let } t=\frac{1}{h}}{=}\lim\limits_{t\to\infty}\ln\left(1+x^{-1}\cdot\frac{1}{t}\right)^t$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\ln e^{x^{-1}}$

$=\frac{1}{x}$

$e:=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

$\underset{\text{Let } w=\frac{n}{x}}{=}\left(\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{w}\right)^w\right)^x$

$=e^x$

$h\to 0^-$

$\lim\limits_{h\to 0^-}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$

$\underset{\text{Let } t=\frac{-1}{h}}{=}\lim\limits_{t\to\infty}\ln\left(1+(-x^{-1})\cdot\frac{1}{t}\right)^{t\cdot(-1)}$

$=-\lim\limits_{t\to\infty}\ln\left(1+(-x^{-1})\cdot\frac{1}{t}\right)^t$

$=-\ln e^{-x^{-1}}$

$=\frac{1}{x}$

應用1：冪(Exponentiation)的計算(參考算法)

(3) Let $y=f(x)=a^x$

$\Rightarrow \ln y=(\ln a)\cdot x$

$\overset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow}\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\ln a$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=y\cdot\ln a=a^x\ln a$ i.e. $\frac{d}{dx}a^x=a^x\ln a$, $a>0$

應用1：冪(Exponentiation)的計算(參考算法)

(4) $\frac{d}{dx}(x^x) = (e^{x\ln x})'$

$= e^{x\ln x}\cdot(1\cdot\ln x + 1)$

$= x^x(1+\ln x)$

應用1：冪(Exponentiation)的計算(參考算法)

(5) $y = f(x) = x^{x^{x^{\cdots}}}$

$\Rightarrow \ln y = \ln x^y = y\cdot\ln x$

$\overset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow} \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\cdot\ln x + \frac{y}{x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{y^{-1}-\ln x}$

$= \frac{y^2}{x(1-y\ln x)}$

$= \frac{\left(x^{x^{x^{\cdots}}}\right)^2}{x\left(1-\left(x^{x^{x^{\cdots}}}\right)\ln x\right)}$

機率論上的應用問題

01

If X~b(n,p), find moment generating function M(t) (動差生成函數),expected value E(X) (期望值),variance of X (變異數).

02

If X~N(μ,σ²), find probability density function, moment generating function M(t),expected value E(x),variance of X.

機率論上的應用問題(參考解法)

(1)

$$X \sim b(n,p) \iff f_X(x) = \binom{n}{x}(1-p)^{n-x}p^x,\ x=0,1,2,\cdots,n$$

$$M_X(t) := \sum_x e^{tx}\cdot f_X(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x}\cdot(1-p)^{n-x}p^x$$

$$= \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\, q^{n-x}(pe^t)^x,\ q=1-p$$

$$= (q+pe^t)^n,\ t\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow M_X'(t) = \sum_x e^{tx}\cdot x\cdot f_X(x)\Big|_{t=0} \qquad M_X''(t) = \sum_x e^{tx}\cdot x^2\cdot f_X(x)\Big|_{t=0}$$

$$= \sum_x x\cdot f_X(x) \qquad = \sum_x x^2\cdot f_X(x)$$

$$= E(X) := \mu \qquad = E(X^2)$$

機率論上的應用問題(參考解法)

$$\Rightarrow \sigma^2 = E\left((X-\mu)^2\right)$$
$$= \sum_x (X-\mu)^2 \cdot f_X(x)$$
$$= \sum_x (x^2 - 2x\mu + \mu^2) \cdot f_X(x)$$
$$= \sum_x x^2 \cdot f_X(x) - 2\mu \cdot \underbrace{\sum_x x \cdot f_X(x)}_{=E(X)=\mu} + \mu^2 \cdot \underbrace{\sum_x f_X(x)}_{=1\ (\because f \text{ is a p.d.f.})}$$
$$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$
$$= E(X^2) - \mu^2$$

Indeed, $\sum_x f_X(x) = \binom{n}{x}(1-p)^{n-x}p^x = ((1-p)+p)^n = 1$

$$= E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= M_X''(0) - (M_X'(0))^2$$
$$= n(n-1)(q+pe^t)^{n-2} \cdot (pe^t)^2 + n(q+pe^t)^{n-1} \cdot pe^t - \left(n(q+pe^t)^{n-1} \cdot pe^t\right)^2 \Big|_{t=0}$$
$$= n(n-1) \cdot p^2 + np - (np)^2 \Rightarrow \mu = E(X) = np$$
$$= np(1-p)$$
$$= npq$$

[無標題]

機率論上的應用問題(參考解法)

(2) Let $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ where e^{at^2} is called Gauss' function

In this case, $a = -\frac{1}{2}$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy$$
$$\overset{\text{by } *_1}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot |J(r,\theta)| \cdot dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\lim_{k\to\infty} -e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^k\right)d\theta$$

$y = \frac{x-\mu}{\sigma}$

機率論上的應用問題(參考解法)

$$= \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta$$

$$= 2\pi$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \Rightarrow 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$\overset{\text{by } *_2}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}}_{= f_X(x) \Leftrightarrow X \sim N(\mu, \sigma^2)} dx$$

$*_1$: Let $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in (0, \infty)$

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\cos\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r > 0$$

$*_2$: Let $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ $(y \in (-\infty, \infty) \Rightarrow x \in (-\infty, \infty))$

$$\Rightarrow dy = \frac{1}{\sigma} dx$$

機率論上的應用問題(參考解法)

$$X \sim N(X, \sigma^2) \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R}$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f_X(x) \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Let $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $dy = \frac{1}{\sigma} dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\mu + \sigma y)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2}(\sigma t)^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\sigma t)^2}{2}}}_{= f_Y(y) \Leftrightarrow Y \sim N(\sigma t, 1)} dy$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2}(\sigma t)^2} \cdot 1$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2}(\sigma t)^2}$$

機率論上的應用問題(參考解法)

$$M_X''(t) = \left(e^{\mu t+\frac{1}{2}(\sigma t)^2} \cdot (\mu+\sigma^2 t)\right)' \Rightarrow M_X'(0)=\mu$$

$$= e^{\mu t+\frac{1}{2}(\sigma t)^2} \cdot (\mu+\sigma^2 t)^2 + e^{\mu t+\frac{1}{2}(\sigma t)^2} \cdot \sigma^2 \Big|_{t=0}$$

$$= \mu^2+\sigma^2$$

$$\Rightarrow Var(X) = E(X^2)-(E(X))^2$$

$$= M_X''(0)-(M_X'(0))^2$$

$$= (\mu^2+\sigma^2)-\mu^2$$

$$= \sigma^2$$

$$Exp(X) = E(X)$$

$$= M_X'(0)$$

$$= \mu$$

結論

結 語

藉由做這次的報告讓我們了解到數學知識的寬廣與數學家的偉大，一個常數居然可以有許多的應用。

例如：在簡化計算層面上解決冪的計算上的問題。在機率論上，可以協助我們求得機率密度函數、動差生成函數、期望值、變異數等一些我們在學機率與統計時需要的一些資訊。

此外在數學史中，也讓我們知道數學家們在發現後去研究自然常數時非一蹴而成的，而是數學家長期切磋積累的成果，並藉由這些成果的發展、應用來撼動這個世界。

參考網址

University Calculus Early Transcendentals 2nd ed. by Thomas

線上資源： https://bit.ly/3tdPUzT

Probability and Statistical Inference 9th edition by Robert Hogg & Elliot Tanis

線上資源： https://bit.ly/3tdPUzT

維基百科

https://wikipedia.com

毛爾的《毛起來說 e》

~END~