自 然 常 數 e

Natural Constant

411031104 廖英秀
411031109 羅允澤
411031124 高新雄
411031140 林咏勳
411031243 鄭蕙倪
410731144 柯彥廷

研究動機與報告內容簡介

到了大學才對自然對數的底e有著初步認識，但卻對這個自然常數e(Natural Constant)的最初發明來源不太清楚。

此外，e不僅僅在數學的微積分中扮演著重要的角色，在機率與統計(Probability and Statistics)有著相當多的應用，並時常能應用在冪(Exponentiation)的計算。

基於這些原因，故我們選擇此主題來研究並進行報告，而報告內容主要介紹e的歷史背景、由來、定義、相關問題和應用。

目 錄

CONTENT

目 錄

CONTENT

PART.1

約翰·納皮爾

John Napier

1550年2月1日-1617年4月4日

約翰・納皮爾

John Napier

- 蘇格蘭數學家、物理學家兼天文學家，發明了對數(logarithm)，也是自然常數e最早的研究者
- 最早提到自然常數e的相關內容為納皮爾於1618年出版的「對數」，但他沒有記錄這個數，並只藉由一些估算得到e的近似值為2.71828，以及以它為底去計算出一些值後，繪製自然對數表
- 一直到尤拉來著手研究這個常數後才給出了正式的定義，即 $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- 另一方面，在數學上也定義了自然對數 $\ln x = \log_e x$

PART.2

萊昂哈德·保羅·歐拉

德語：Leonhard Paul Euler

1707年4月15日-1783年9月18日

萊昂哈德·保羅·歐拉

Leonhard Paul Euler

- 瑞士數學家和物理學家，近代數學先驅之一
- 在多個數學領域，包括微積分和代數都做出重大貢獻
- 引進許多數學符號、寫法等，例如函數的記法 “$f(x)$” ，以及在在微積分中與笛卡爾、高斯於不同時期經由研究複變函數而引進虛數的記號 “$i=\sqrt{-1}$” ，以及定義了自然常數e(Natural Constant)，亦稱為尤拉數(Euler's Number)
- 在物理的力學、光學、天文學等領域都有突出的貢獻

PART.3

約翰·卡爾·弗里德里希·高斯

Johann Carl Friedrich Gauss

1777年4月30日 - 1855年2月23日

約翰·卡爾·弗里德里希·高斯

Johann Carl Friedrich Gauss

- 德國數學家、物理學家、天文學家、大地測量學家，並享有「數學王子」的美譽
- 國小時發現了等差級數公式，18歲時發現了最小平方法
- 在線性代數中發明線性方程組的矩陣寫法，並定義了秩(Rank)、簡化梯矩陣(RREF)等數學語言，以及發明矩陣的基本列運算、在數論中定義了“同餘”、在抽象代數與複變中使用複變搭配代數的方法證明了“代數基本定理”

- 微積分中，用歐拉的自然常數e定義了高斯函數，並用之來定義常態分配的機率密度函數(Probability Density Function，簡稱p.d.f)
- 幾何上，在17歲時以尺規作圖畫出17邊形、將歐拉引進的虛數搭配二維直角座標平面後創造了高斯複數平面、微分幾何上發明了許多曲面投影的相關理論
- 高斯函數：$f(x) = e^{ax^2}$

PART.4

讓·巴蒂斯特·約瑟夫·傅立葉

Jean Baptiste Joseph Fourier

1768年3月21日-1830年5月16日

讓・巴蒂斯特・約瑟夫・傅立葉

Jean Baptiste Joseph Fourier

- 法國數學家、物理學家，在數學界的貢獻中以傅立葉級數、轉換最著名
- 並應用於物理的熱傳導、震動理論
- 亦發現了溫室效應
- 另一方面，亦曾研究過e是否為有理數的問題

PART.5

e 的數系

e 的 數 系

歐拉著手研究之前納皮爾曾研究的自然常數e後，並用極限的方式去進行定義。

於是18世紀的數學家紛紛開始去研究這個數，但皆未果並且也不清楚e的數系或使用方式。

$e \epsilon Q$?

Question

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{?}{\in} \mathbb{Q}$$

Euler's number

Sol: $$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{0} 1^n + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \binom{n}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right) > 2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \quad \text{let } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q},\ a,b \geq 1$$

$$< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots\right)$$

$$= 3 \quad \text{i.e. } 2 < e < 3 \ (\Rightarrow e \in \mathbb{R})$$

$e \epsilon Q$?

$$\Rightarrow b!\left(e-\sum_{n=0}^{b}\frac{1}{n!}\right)\overset{\text{let}}{=}x$$

$$=b!\left(\frac{a}{b}-\sum_{n=0}^{b}\frac{1}{n!}\right)$$

$$=\boxed{b!\cdot\sum_{n=b+1}^{\infty}\frac{1}{n!}} \rightarrow \underbrace{b!\cdot\sum_{n=b+1}^{\infty}\frac{1}{n!}}_{>0}=\underbrace{b!\left(\frac{a}{b}-\sum_{n=0}^{b}\frac{1}{n!}\right)}_{\in\mathbb{Z}}$$

$$=\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)(b+2)}+\frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)}+\cdots$$

$$<\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^3}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{b+1}}{1-\frac{1}{b+1}}$$

$$=\frac{1}{b}$$

$$\underbrace{\leq 1}\quad(\Rightarrow\Leftarrow)\quad(\because \underline{x\in\mathbb{N}} \text{ and } 0<x<1)$$

$$\Rightarrow e\notin\mathbb{Q}$$

In fact, $e\approx 2.71828$.

e為無理數

主要參照傅立葉的做法，先判斷e是介於哪兩數，再假設e為有理數去進行推導後得到矛盾，最後得知e不是有理數，也就是說e是無理數。

PART.6

麥穗理論

西元2500年前

麥 穗 理 論

2500年前，三個學生問蘇格拉底一個問題："怎樣才能找到理想的人生伴侶？"

蘇格拉底帶著學生來到一片麥田前，並對他們說："請你們走進麥田，一直往前不要回頭，並在途中摘下一支最大的麥穗。"

第一，訂下最基本的滿意標準
第二，考察現有的可選方案
第三，如果有可選方案滿足最基本的滿意標準，就不再尋找更優方案

蘇格拉底的意思是，愛情裡猶豫不決、優柔寡斷的人，什麼都得不到

PART.7

約翰內斯·克普勒

Johannes Kepler

1571年12月27日 - 1630年11月15日

約翰內斯・克普勒
Johannes Kepler

- 德國天文學家、數學家，十七世紀科學革命的關鍵人物
- 最為人知的成就為克普勒定律
- 從第谷浩如煙海的觀星資料中發現了行星運動的三大規律。一方面，間接打破了宗教的枷鎖；另一方面，啟發牛頓創立了萬有引力定律
- 1624年，首次將對數符號簡化為log的數學家，其中此符號沿用至今

克 普 勒 的 難 題

1611年，克普勒的妻子因病去世，為了照顧自己的孩子與緩解自己的悲痛，他決定再婚。

消息一出，就有很多姑娘登門拜訪。克普勒本著嚴謹、求實的學者脾氣，給這些姑娘一一編號、挨個兒面試。

結果第一位姑娘體味不佳、第二位姑娘生活奢侈、第三位姑娘已經訂婚了，直到第十一個，克普勒依然沒有辦法定奪並說：“是上帝的懲罰還是我的罪孽啊！”

克普勒爲此苦惱，但隨後有一位數學家解開了這個難題

PART.8

梅裏爾·弗勒德

Merrill Flood

西元1908年 - 1991年

梅裏爾・弗勒德
Merrill Flood

- 美國數學家，與梅爾文·德雷捨共同開發了“囚徒困境”的理論而聞名，並專攻於數學的博弈論(Game Theory)

- 梅裏爾的研究多數和選擇有關，例如以下要説的“未婚妻難題”

- 隨著二戰爆發，梅裏爾被美國戰爭部聘用，而戰爭總是面臨著各種決策，並時常需要從中找出最好的策略。而這種尋找最佳解的氛圍，使他對克普勒的難題產生了興趣，故最終在1949年他將蘇格拉底的麥穗理論、克普勒難題轉換成未婚妻難題，並將其解決

末婚妻難題(問題轉換)

首先，梅裏爾將之前的難題，轉換成一個數學遊戲：

假設有一些求婚者，分別記為1、2、3、4、5…i…N，而每次只能從這些有好有壞的求婚者中面試其中的一個，且每次都必須做出決定，要不“拒絕(reject) ”要不“接受(accept) ” 。

怎麼做才能以最大概率選中那個最好的呢?

末婚妻問題-拒絕前面37%的人

未婚妻難題(問題轉換)

1. 若第i個未婚妻最好，並從前面i-1人中拒絕編號S之前(1,2,...,s-1)的未婚妻，則選到最好的未婚妻的機率P(i:Sth)是多少？其中1<S≤i≤N

2. 承(1)，選到最好的未婚妻機率P為多少？

3. 藉由盲猜的選到最好的未婚妻機率 P_g 是多少？以及當N趨近於正無窮它會趨近多少?

4. 當N趨近於正無窮，則選到最好未婚妻機率P的最大值 P_M 是多少？

未婚妻難題（參考解法）

(1)

Assume that ①, ②, ⋯, Ⓝ : fiancess

$1 < s \le i \le N$ and the best fiancee is ⓘ

and is number s, say sth.

N: total of fiancees.

$$P(ⓘ : s\text{th}) = \underbrace{\frac{s-1}{i-1}}\cdot\underbrace{\frac{1}{N}}$$

$\underbrace{①②\cdots(i-1)}$, ⓘ, ⋯, N

reject $s-1$ fiancees

sth

$i-1$

$s-1$ (reject)

$(i-1)-(s-1)$ (not reject)

$\frac{1}{N}$ = the probability of fiancees ⓘ is selected from {①, ②, ⋯, Ⓝ}

未婚妻難題（參考解法）

(2)

$$P_i = \sum_i P(\text{i} : S\text{th})$$

$$= \sum_{i=S}^{N} \frac{S-1}{i-1} \cdot \frac{1}{N}$$

$$= \frac{S-1}{N} \sum_{i=S-1}^{N-1} \frac{1}{i}$$

$$= \frac{K}{N} \sum_{i=K}^{N-1} \frac{1}{i}$$

$$= \frac{K}{N}\left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K+1} + \frac{1}{K+2} + \cdots + \frac{1}{N-1}\right)$$

未婚妻難題（參考解法）

(3)

$P_g = \frac{1}{N} \to 0$ as $N \to \infty$

i.e. the probability of finding the best fiancés in {①, ②, …, Ⓝ}
approach 0 as $N \to \infty$

未婚妻難題（參考解法）

(4)

Find max. of P as $N \to \infty$ (say P_M)

Let $X = \lim_{N \to \infty} \frac{K}{N}$ and define $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ by $f(t) = t^{-1}$ $\forall t \in (0,1]$

$\Rightarrow f$ is conti. on $(0,1]$

未婚妻難題（參考解法）

$$\lim_{N\to\infty} P$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{K}{N}\left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K+1} + \cdots + \frac{1}{N-1}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{K}{N}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{K} + \frac{1}{K+1} + \cdots + \frac{1}{N-1}\right) - \frac{K}{N}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{K}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{K}{N}\left(\frac{1}{N} \cdot f\left(\frac{1}{N}\right) + \frac{1}{N} f\left(\frac{2}{N}\right) + \cdots + \frac{1}{N} \cdot f\left(\frac{N}{N}\right) - \frac{f\left(\frac{N}{N}\right)}{N} - \left(\frac{1}{K} \cdot f\left(\frac{1}{N}\right) + \frac{1}{K} f\left(\frac{2}{N}\right) + \cdots + \frac{1}{K} f\left(\frac{K}{N}\right)\right)\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{K}{N}\left(\int_{\frac{1}{N}}^{\frac{N}{N}} f(t)\,dt - \frac{f(1)}{N} - \int_{\frac{1}{N}}^{\frac{K}{N}} f(t)\,dt\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{K}{N}\left(\int_{\frac{K}{N}}^{\frac{N}{N}} f(t)\,dt - \frac{f(1)}{N}\right)$$

$$= x \cdot \left(\int_x^1 t^{-1}\,dt - 0\right)$$

$$= -x\ln x \quad , x \in (0,1]$$

$\underline{\text{let}}\ g(x)$

未 婚 妻 難 題（參 考 解 法）

$$\Rightarrow g'(x) = -\ln x - 1 \overset{\text{let}}{=} 0$$

$$\Rightarrow x = e^{-1}$$

$$\begin{array}{c|c|c}
+ & - & g' \\
\hline
\nearrow & e^{-1} \quad \searrow & g
\end{array}$$

$$\Rightarrow g \text{ is increasing on } (0, e^{-1})$$

$$\Rightarrow P_M = \max_{x\in(0,1]} g(x) = g(e^{-1}) = -e^{-1}\cdot\ln e^{-1} = e^{-1} \approx 0.37$$

Input

$\frac{1}{e}$

Decimal approximation

0.36787944117144232159552377016146086744

未婚妻難題(代入數值後觀察)

通過剛才的解法，我們現在可以進行一些計算。
當總數為N時，把拒絕編號S之前的未婚妻後，選到最好的未婚妻機率P與盲猜的機率 P_g 做比較：

N	S	P	P_g
3	2	50%	1/3
4	2	46%	1/4
5	3	43%	1/5
6	3	43%	1/6
7	3	41%	1/7
8	4	41%	1/8
9	4	41%	1/9
10	4	40%	1/10
100	38	37%	1/100
1000	369	37%	1/1000
极大	N/e	e^{-1}（≈37%）	极小（≈0）

上述參考了楊照崑的《摘麥穗問題》一書中的表格。而我們可以看出，隨著N變大，P和 P_g 也逐漸下降，最終近似於0.37。其中 P_g 恆小於P，也就是說藉由梅裏爾未婚妻難題中的數學遊戲的選取方式比盲猜的選取方式好。

PART.9

自然常數e的應用

應用1：冪(Exponentiation)的計算

Ex:

$$(1)\max_{x>0}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)=?$$

$$(2)\frac{d}{dx}(\ln x)=?\ \forall x>0$$

$$(3)\frac{d}{dx}\left(a^{x}\right)=?\ \ \forall a>0$$

$$(4)\frac{d}{dx}\left(x^{x}\right)=?$$

$$(5)\frac{d}{dx}\left(x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right)=?$$

應用1：冪(Exponentiation)的計算(參考算法)

(1) $\left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}\right)'$

$$= \left(e^{x^{-1}\ln x}\right)'$$

$$= e^{x^{-1}\ln x}\cdot x^{-2}(1-\ln x) \overset{\text{let}}{=} 0$$

$\Rightarrow x = e$

		e	
f'	$+$		$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

$\Rightarrow \max\limits_{x>0}\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = e^{\frac{1}{e}}$ if take $x=e$.

藉由數值代入、軟體繪圖來觀察最大值所在的點

$$\sqrt[2]{2} \approx 1.414$$

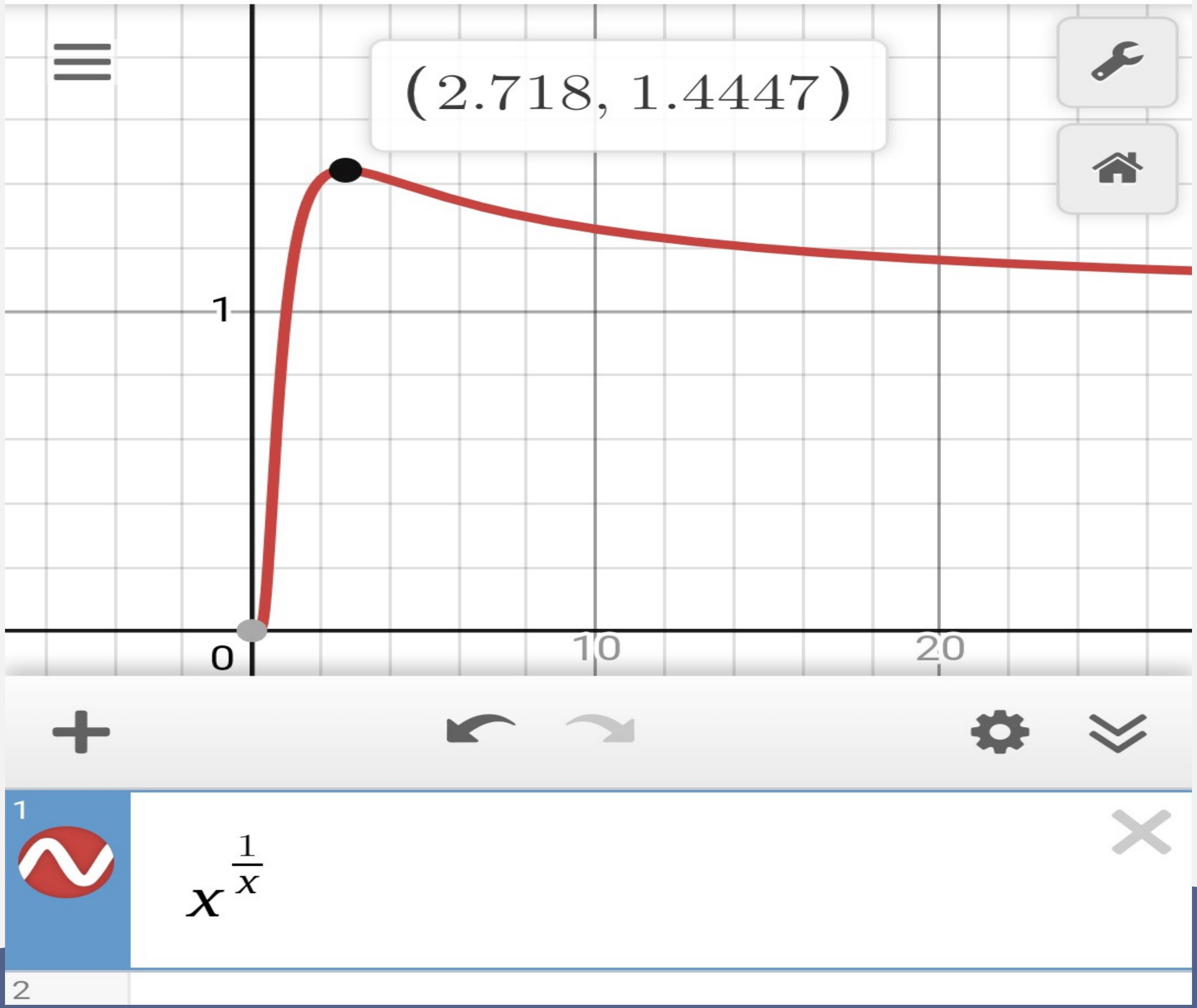
$$\sqrt[3]{3} \approx 1.442$$

.

.

.

$$\sqrt[e]{e} \approx 1.445$$ 為最大值！



應用1：冪(Exponentiation)的計算(參考算法)

(2) $\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$

$= \frac{1}{x} \quad \forall x>0$

$\underline{h\to 0^+}$

$\lim_{h\to 0^+} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$

$\underset{\text{Let } t=\frac{1}{h}}{=\!=}$ $\lim_{t\to\infty} \ln\left(1+x^{-1}\cdot\frac{1}{t}\right)^{t}$

$= \lim_{t\to\infty} \ln e^{x^{-1}}$

$= \frac{1}{x}$

$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

$\underset{\text{Let } w=\frac{n}{x}}{=\!=}$ $\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{w}\right)^{w}\right)^{x}$

$= e^x$

$\underline{h\to 0^-}$

$\lim_{h\to 0^-} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$

$\underset{\text{Let } t=\frac{-1}{h}}{=\!=}$ $\lim_{t\to\infty} \ln\left(1+(-x^{-1})\cdot\frac{1}{t}\right)^{t\cdot(-1)}$

$= -\lim_{t\to\infty} \ln\left(1+(-x^{-1})\cdot\frac{1}{t}\right)^{t}$

$= -\ln e^{-x^{-1}}$

$= \frac{1}{x}$

應用1：冪(Exponentiation)的計算(參考算法)

(3) Let $y = f(x) = a^x$

$\Rightarrow \ln y = (\ln a) \cdot x$

$\overset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow} \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \ln a$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \cdot \ln a = a^x \ln a$ i.e. $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$, $a > 0$

應用1：冪(Exponentiation)的計算(參考算法)

$$(4)\ \frac{d}{dx}(x^x) = (e^{x\ln x})'$$

$$= e^{x\ln x}\cdot(1\cdot\ln x + 1)$$

$$= x^x(1+\ln x)$$

應用1：冪(Exponentiation)的計算(參考算法)

(5) $y = f(x) = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$

$$\Rightarrow \ln y = \ln x^{y} = y \cdot \ln x$$

$$\overset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow} \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \ln x + \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{y^{-1} - \ln x}$$

$$= \frac{y^{2}}{x(1 - y\ln x)}$$

$$= \frac{\left(x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right)^{2}}{x\left(1 - \left(x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right)\ln x\right)}$$

機率論上的應用問題

01

If X~b(n,p), find moment generating function M(t) (動差生成函數),expected value E(X) (期望值),variance of X (變異數).

02

If $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, find probability density function, moment generating function M(t),expected value E(x),variance of X.

機率論上的應用問題(參考解法)

(1)

$X \sim b(n,p) \iff f_X(x) = \binom{n}{x}(1-p)^{n-x}p^x, \; x=0,1,2,\cdots,n$

$M_X(t) := \sum_x e^{tx} \cdot f_X(x)$

$= \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x}\cdot(1-p)^{n-x}p^x$

$= \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x} q^{n-x}(pe^t)^x, \; q=1-p$

$= (q+pe^t)^n, \; t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow M_X'(t) = \sum_x e^{tx}\cdot x \cdot f_X(x)\Big|_{t=0}$

$= \sum_x x \cdot f_X(x)$

$= E(X) := \mu$

$M_X''(t) = \sum_x e^{tx}\cdot x^2 \cdot f_X(x)\Big|_{t=0}$

$= \sum_x x^2 \cdot f_X(x)$

$= E(X^2)$

機率論上的應用問題(參考解法)

$$\Rightarrow \sigma^2 = E((X-\mu)^2)$$

$$= \sum_x (X-\mu)^2 \cdot f_X(X)$$

$$= \sum_x (X^2 - 2X\mu + \mu^2) \cdot f_X(X)$$

$$= \sum_x X^2 \cdot f_X(X) - 2\mu \cdot \underbrace{\sum_x X \cdot f_X(X)}_{=E(X)=\mu} + \mu^2 \cdot \underbrace{\sum_x f_X(X)}_{=1\ (\because f \text{ is a p.d.f.})}$$

$$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= E(X^2) - \mu^2$$

Indeed, $\sum_x f_X(X)$

$$= \binom{n}{x}(1-p)^{n-x}p^x$$

$$= ((1-p)+p)^n = 1$$

$$= E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= M_X''(0) - (M_X'(0))^2$$

$$= n(n-1)(q+pe^t)^{n-2} \cdot (pe^t)^2 + n(q+pe^t)^{n-1} \cdot pe^t - (n(q+pe^t)^{n-1} \cdot pe^t)^2 \Big|_{t=0}$$

$$= n(n-1) \cdot p^2 + np - (np)^2 \Rightarrow \mu = E(X) = np$$

$$= np(1-p)$$

$$= npq$$

機率論上的應用問題(參考解法)

(2) Let $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ where e^{at^2} is called Gauss' function

In this case, $a = -\frac{1}{2}$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$$

$$\overset{\text{by } *_1}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot |J(r,\theta)| \cdot dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\lim_{k \to \infty} -e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^k \right) d\theta$$

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

機率論上的應用問題(參考解法)

$$= \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta$$

$$= 2\pi$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \Rightarrow 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$\underset{\text{by } ※_2}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}} dx$$

$$= f_X(x) \Leftrightarrow X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

※1: Let $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in (0, \infty)$

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\cos\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r > 0$$

※2: Let $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ $\left(y \in (-\infty, \infty) \Rightarrow x \in (-\infty, \infty)\right)$

$$\Rightarrow dy = \frac{1}{\sigma} dx$$

機率論上的應用問題(參考解法)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R}$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Let $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$dy = \frac{1}{\sigma} dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\mu+\sigma y)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2}(\sigma t)^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\sigma t)^2}{2}}}_{= f_Y(y) \Leftrightarrow Y \sim N(\sigma t, 1)} dy$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2}(\sigma t)^2} \cdot 1$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2}(\sigma t)^2}$$

機率論上的應用問題(參考解法)

$$M_X''(t) = \left(e^{\mu t+\frac{1}{2}(\sigma t)^2}\cdot(\mu+\sigma^2 t)\right)' \Rightarrow M_X'(0)=\mu$$

$$= e^{\mu t+\frac{1}{2}(\sigma t)^2}\cdot(\mu+\sigma^2 t)^2 + e^{\mu t+\frac{1}{2}(\sigma t)^2}\cdot\sigma^2 \Big|_{t=0}$$

$$= \mu^2+\sigma^2$$

$$\Rightarrow Var(X) = E(X^2)-(E(X))^2$$

$$= M_X''(0)-(M_X'(0))^2$$

$$= (\mu^2+\sigma^2)-\mu^2$$

$$= \sigma^2$$

$$Exp(X) = E(X)$$

$$= M_X'(0)$$

$$= \mu$$

結 語

藉由做這次的報告讓我們了解到數學知識的寬廣與數學家的偉大，一個常數居然可以有許多的應用。

例如：在簡化計算層面上解決冪的計算上的問題。在機率論上，可以協助我們求得機率密度函數、動差生成函數、期望值、變異數等一些我們在學機率與統計時需要的一些資訊。

此外在數學史中，也讓我們知道數學家們在發現後去研究自然常數時非一蹴而成的，而是數學家長期切磋積累的成果，並藉由這些成果的發展、應用來撼動這個世界。

參 考 資 料

University Calculus Early Transcendentals 2nd ed. by Thomas
線上資源： https://bit.ly/3tdPUzT

Probability and Statistical Inference 9th edition by Robert Hogg & Elliot Tanis
線上資源： https://bit.ly/3tdPUzT

維基百科
https://wikipedia.com

毛爾的《毛起來說e》

感 謝 觀 看

THANK FOR WHATCHING

411031104 廖英秀
411031109 羅允澤
411031124 高新雄
411031140 林咏勳
411031243 鄭蕙倪
410731144 柯彥廷