第四組

柯西不等式延伸與推廣

組員: 賴龍斌 柯哲恩 蔡沁倫 溫俊智 何義勤 曾柏儒

主題：

一、柯西不等式

二、Hölder 不等式

三、Minkowski 不等式

一、柯西不等式

◆向量表示法：$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$，等號成立時，$\vec{a}\ /\!/\ \vec{b}$ 。

◆設 a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，b_3 $\in R$，則 $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2)^2$ ，

等號成立時，$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$。

◆同理可推廣至空間向量，亦即 $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$ ，

等號成立時，$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$。

柯西不等式的問題

題目：

a b c 為正整數，且 a+b+c=1，求

(a+1/a)^2 + (b+1/b)^2 + (c+1/c)^2 之最小值

sol: $\left[(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2+(c+\frac{1}{c})^2\right]\left[1^2+1^2+1^2\right]\ge\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}\right)^2$ —①

$=\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\ge(1+1+1)^2=9$ —②

by ① ② $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2+(c+\frac{1}{c})^2\ge\frac{1}{3}(1+9)^2=\frac{100}{3}$ #

柯西不等式問題的額外討論

討論①,②之間連接.

在①的等號成立時 $a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}=c+\frac{1}{c}$

在②的等號成立 $\frac{\frac{1}{a}}{a}=\frac{\frac{1}{b}}{b}=\frac{\frac{1}{c}}{c} \Rightarrow a=b=c$

$\Rightarrow$ 表示 等號成立 #

二、hölder 不等式

設 $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ $i=1,2,\cdots,n$

則 $(|x_1|^p+|x_2|^p+\cdots+|x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \times (|y_1|^q+|y_2|^q+\cdots+|y_n|^q)^{\frac{1}{q}}$

$\geq |x_1y_1|+\cdots+|x_ny_n|$

$\Rightarrow \left((\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \times (\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \right)$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $p,q>1$

Young’ s inquality(證明需要)

設 a、b、p、q 正實數，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

則 $ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$

等號成立 $\Leftrightarrow a^p = b^q$

$(\because$ 此時, $ab = a(b^q)^{\frac{1}{q}} = a \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^p = \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q})$

hölder 不等式的證明

By Young's inequality for

$$a = \frac{|x_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \qquad b = \frac{|y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$\Rightarrow \frac{|x_i y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)} + \frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)} + \frac{1}{q}\frac{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q}{\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

hölder 不等式的其他寫法

已知 $f, g \in C_1[a,b]$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 且 $p, q \geq 1$

則 $\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$

or

$f_1 \cdots, f_n \in C_1[a,b]$ 且 $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}=1$ $p_i \geq 1$

則 $\left|\int_a^b f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)\,dx\right| \leq \left(\int_a^b |f_1(x)|^{p_1}\,dx\right)^{\frac{1}{p_1}} \cdots\cdots \left(\int_a^b |f_n(x)|^{p_n}\right)^{\frac{1}{p_n}}$

hölder 不等式的問題

$$\left[\left(\sin^{\frac{2}{p}}\theta\right)^p+\left(\cos^{\frac{2}{p}}\theta\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \times \left[\left(\frac{2^{\frac{1}{q}}}{\sin^{\frac{1}{q}}\theta}\right)^q+\left(\frac{3^{\frac{1}{q}}}{\cos^{\frac{1}{q}}\theta}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\geq \sin^{\frac{2}{p}}\theta \cdot \frac{2^{\frac{1}{q}}}{\sin^{\frac{1}{q}}\theta}+\cos^{\frac{2}{p}}\theta \cdot \frac{3^{\frac{1}{q}}}{\cos^{\frac{1}{q}}\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \\ \frac{2}{p}=\frac{1}{q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{p}=\frac{1}{3} \\ \frac{1}{q}=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\left(\sin^{\frac{2}{3}}\theta\right)^3+\left(\cos^{\frac{2}{3}}\theta\right)^3\right]^{\frac{1}{3}} \times \left[\left(\frac{2^{\frac{2}{3}}}{\sin^{\frac{2}{3}}\theta}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{3^{\frac{2}{3}}}{\cos^{\frac{2}{3}}\theta}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}} \geq 2^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \left[\sin^2\theta+\cos^2\theta\right]^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta}\right)^{\frac{2}{3}} \geq 2^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin\theta}+\frac{3}{\cos\theta} \geq \left(2^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

三、Minkowski inequality

設 $x_i,\ y_i \ge 0 \quad i=1,2,\dots,n$

則 $(x_1^p+x_2^p+\dots+x_n^p)^{\frac{1}{p}}+(y_1^p+y_2^p+\dots+y_n^p)^{\frac{1}{p}} \ge \left[(x_1+y_1)^p+\dots+(x_n+y_n)^p\right]^{\frac{1}{p}}$

$p>1$

等號成立 $\iff x_i=Ky_i \quad 1\le i\le n,\ K\ge 0$ or $y_i=0$

Minkowski 證明(利用 Hölder)

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p &= \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)(x_i+y_i)^{p-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n}x_i(x_i+y_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}y_i(x_i+y_i)^{p-1} \\
&\le \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right]^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}
$$

發現

1. 在 p=2 時會看到我們熟悉的三角不等式，我們可以知道三角不等式其實就是 Minkowski 不等式的特例。

2. 在建造 N 維空間中，Minkowski 不等式佔有重要的一席之地，因為在建構空間時，也要符合三角不等式

問題

設 a、b、c 為三角形的邊長，且 $a+b+c=1$

令 $n>1$，$n\in\mathbb{Z}$，試證

$$\sqrt[n]{a^n+b^n}+\sqrt[n]{b^n+c^n}+\sqrt[n]{c^n+a^n}<1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}$$

解答

設 $x=\frac{-a+b+c}{2}>0$，$y=\frac{a-b+c}{2}>0$，$z=\frac{a+b-c}{2}>0$

by Minkowski 不等式.

$$\sqrt[n]{(y+z)^n+(x+z)^n}\le\sqrt[n]{y^n+x^n}+\sqrt[n]{z^n+z^n}$$

$$\sqrt[n]{(z+x)^n+(y+x)^n}\le\sqrt[n]{z^n+y^n}+\sqrt[n]{x^n+x^n}$$

$$\sqrt[n]{(x+y)^n+(y+z)^n}\le\sqrt[n]{x^n+z^n}+\sqrt[n]{y^n+y^n}$$

$$\Rightarrow\sqrt[n]{a^n+b^n}+\sqrt[n]{b^n+c^n}+\sqrt[n]{c^n+a^n}\le\sqrt[n]{x^n+y^n}+\sqrt[n]{y^n+z^n}+\sqrt[n]{z^n+x^n}+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}$$

by 二項定理 $\left(x^n+y^n<(x+y)^n\Rightarrow\sqrt[n]{x^n+y^n}<(x+y)\right)$

$$\begin{aligned}\therefore\sqrt[n]{a^n+b^n}+\sqrt[n]{b^n+c^n}+\sqrt[n]{c^n+a^n}&<(x+y)+(y+z)+(z+x)+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}\\&=2(x+y+z)+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}\\&=1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}\end{aligned}$$

Prove the following inequalities

$$\textbf{Holder inequality}: \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$
$$\text{where } p > 1 \text{ and } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$$\textbf{Cauchy-Schwarz inequality}: \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\textbf{Minkowski inequality}: \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$
$$\text{where } p > 1.$$

參考連結

柯西不等式形式與證明

https://www.math.ncku.edu.tw/~fang/%E5%90%91%E9%87%8F%E5%88%86%E6%9E%90-Cauchy-Schwarz%E4%B8%8D%E7%AD%89%E5%BC%8F%E4%B9%8B%E6%9C%AC%E8%B3%AA%E8%88%87%E6%84%8F%E7%BE%A9-%E6%9E%97%E7%90%A6%E7%84%9C.pdf

柯西不等式

https://kknews.cc/zh-tw/education/jvyka9p.html

Minkowski 不等式 Holder 不等式

https://www.facebook.com/%E6%9E%97%E5%8A%AD%E6%95%B8%E5%AD%B8-102044938580990/photos/pcb.139552028163614/139551831496967

楊式不等式

https://en.wikipedia.org/wiki/Young%27s_inequality

Minkowski 不等式

https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski_inequality