「珠」絲馬跡—彈珠臺與數學的交響曲

報告組別:第 6 組

組員: 張心玫、林鈺祐、江晁維、楊荏喻、倪詩晶

序、 前言

彈珠臺這個遊戲家喻戶曉，看似簡單，實則包含許多隱含意義。無論是從生活面向，亦或是從學術面向，彈珠臺的出現無疑做出了重大貢獻。今日，我們將從各個面向深入探討，了解「彈珠臺」的出現帶來的影響。

- 研究動機

由於上次在夜市跑去玩彈珠台，發現到彈珠台會先決定倍率再去決定得分通道，由此我們發現可以選用彈珠台做為主題進行期末報告。

還記得彈珠台共有幾排？用幾顆彈珠？在顆數固定的條件下，想要每一排都能打進的機會都不大；而若想要刻意打中其中某一排，也絕非易事。決定落點的關鍵並非只有控制力道，玩家給予的初速度，以及滾動時產生的摩擦力，加上釘子的碰撞力，都會影響最後的結果。

- 研究目的

本次的實驗為觀察及統計在不考慮台面上的釘子分布與力道控制，研究問題如下:

每局平均各進排數的機率為何？顆數與排數是否有關連性？圖形分

布是否有特殊的情況？以及試算期望值。

目錄

序、 前言 1

□ 研究動機 1

□ 研究目的 1

壹、 彈珠臺的基礎知識 5

貳、 彈珠臺的相關理論與問題 9

(一)機率 9

(二)二項分布理論 10

(三)期望值 11

(四)關於彈珠台的相關機率問題這檔事 12

參、 彈珠臺的相關實驗及數據 19

(一) **模型操作實驗：** 21

(二) **電腦程式模擬實驗：** 25

(三) **結論：** 27

肆、 彈珠臺本身與相關遊戲 28

□ 彈珠臺小遊戲 28

□ 與彈珠臺相似的遊戲 28

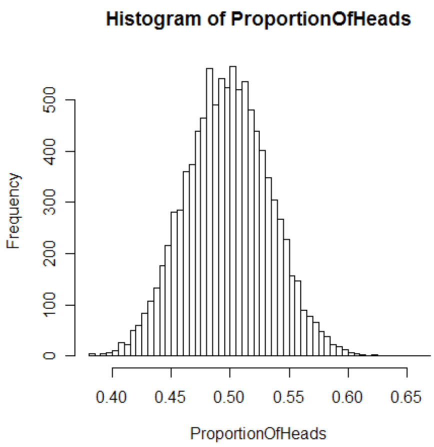
伍、 參考資料來源 31

壹、 彈珠臺的基礎知識

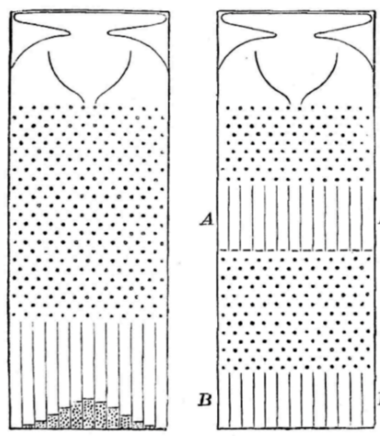
談起彈珠台就不得不提起高爾頓，最早的彈珠台就是由他發明的，稱為高爾頓釘板，當然他發明的彈珠台與我們現今所玩的彈珠台是有所差異的。

高爾頓板（英語：Galton board），又稱為豆機（bean machine）、梅花機（quincunx）等，是弗朗西斯·高爾頓發明的用以驗證中心極限定理的裝置。

中心極限定理（英語：central limit theorem，簡作 CLT）是概率論中的一組定理。中心極限定理說明，在適當的條件下，大量相互獨立隨機變量的均值經適當標準化後依分布收斂於標準正態分布。這組定理是數理統計學和誤差分析的理論基礎，指出了大量隨機變量之和近似服從正態分布的條件。



10,000 次拋擲硬幣實驗中出現正面的平均比率，每次抽樣（實驗）的樣本數為 200（拋擲 200 次硬幣）



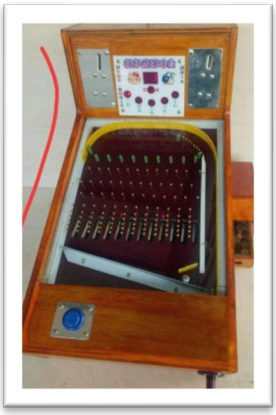
高爾頓繪製的高爾頓板示意圖

高爾頓釘板

高爾頓想要找到一種方法，就是可以用父母的資料來推測小孩的結果。舉例來說是不是高個子的父母生的孩子也會是高個子嗎？並且有沒有一種數學公式，只用父母的身高就可以來預測小孩的身高呢？就在研究的過程中，高爾頓觀察到很特別的情形，就是非常高的父母所生的小孩，會比父母矮一些；而非常矮的父母所生的小孩，又會比父母高一點。這裡似乎有種奇妙的魔力將人的身高從高矮的兩端往所有人的平均值推過去。這樣的結果，卻使得高爾頓產生了困惑；因為他觀察到親子兩代各自的身高數據，是遵循著同一個常態分布。但是根據拉普拉斯的中央極限定理，常態分布成立的條件是存在於大量的，而非一個較小因素之作用。然而，遺傳對於身高而言，卻是一項顯著的因素。高爾頓還想到，遺傳這項因素把一種如身高的性狀優勢傳遞給下一代，按常理來想應該會出現兩極化的態勢。如果是這樣，我們應該會看到一代接著一代的人之中，巨人與小矮子的比例會日益增加，而中等普通身高者之比例則會日漸減少。可是，我們觀察到的結果確是一代又一代的身高是穩定的，並且形成常態分布

高爾頓還設計一個別出心裁的裝置，稱為 quincunx (梅花樁)。其實，這就是我們現在說的 Galton Board(高爾頓釘板)。當時，這項裝置上方是一個漏斗狀的容器，可將許多大小相同的小球倒入並讓其掉落。每個小球先碰到第一排釘子，繼續掉落則會碰到第二排釘子，並且碰到的機率都是 1/2。球繼續掉落，最後落入底部隔開的槽內。假若一共有 n 排釘子，各槽內的球數則服從於二項分布 B(n, 1/2)；當 n 很大時，它就接近於常態分布。這項裝置只不過是一個二項分布或二項分布逼近常態的演示器。高爾頓對其更加利用，使其與先前所提到的身高與遺傳之問題給連結起來。他在此裝置的中間高度某 AB 處將流下的小球用一板子截住，則小

球會在該處聚成一個近似於常態分佈曲線的形狀。接著，將 AB 處的閥門打開，讓小球繼續在 quincunx 中之掉落，則每個小球就會有一個新的起源，此起源的大小取決於原先累積的球數；同樣地，愈近中間處球愈多。從每一個這樣的起源裝置所掉落的球，到了 quincunx 底部則形成一個個小的常態分布。而在 quincunx 底部所形成的大常態分布，則是這些個別小常態分佈的混合。故整個 AB 可視為一個顯著因素 (如遺傳)，而底部所形成的常態分布則表明了縱然有此顯著因素之作用，這並不會影響到最終結果的常態性 (如身高)。



此為現今的彈珠臺

貳、　彈珠臺的相關理論與問題

(一)機率

舊稱幾率，又稱概率、機會率或或然率，是對隨機事件發生之可能性的度量，第一個系統地推算機率的人是 16 世紀的卡爾達諾。

我們日常所見所聞的事件大致可分為兩種：一種是確定性事件。確定性事件包含必然事件和不可能事件。 如太陽從東方升起，或者在標準大氣壓下，水在 100℃時會沸騰。我們稱這些事件為必然事件。 如擲一個點數只有 1 到 6 的骰子，向上一面的數字是 7。我們稱這些事件為不可能事件。

一種是隨機性事件，如明天的氣溫比今天低、擲一枚硬幣得正面向上，又或者在下一年度的 NBA 比賽中，芝加哥公牛隊會奪得全年總冠軍。這些事件在一定條件下是否發生，是無法確定的。

目前至少有兩種成功的將機率公式化的理論，分別是科摩哥洛夫公式化以及考克斯（英語：Cox）公式化。在科摩哥洛夫公式化（參考機率空間）中，用集合代表事件，機率則是對集合的測度。在考克斯定理（英語：Cox's theorem）中，機率是不能再進一步分析的基元，強調在機率值及命題之間建立一致性的關係。在二種公式化方法中，機率公理都相同，只有一些技術細節不同。

事件 A 的機率一般會寫成 $P(A)$、$p(A)$或 $\Pr(A)$，設隨機事件的樣本空間為 Ω，Ω 的一個子集稱為事件。對於 Ω 中的每一個事件 A，都有實函數 P(A)，滿足：

1. 非負性：$P(A)>=0$；

2. 規範性：$P(\Omega)=1$

3. 可數可加性：對可數個兩兩互斥事件$\{A_i\}_{i\in N}$有：$\sum_{i=1}^{\infty} P(Ai) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} Ai)$

任意一個滿足上述條件的函數 P 都可以作為樣本空間 Ω 的機率函數，稱函數值 P(A)為 Ω 中事件 A 的機率

(二)二項分布理論

只要符合下面 3 個特點，就可以判斷某些事件是二項分佈

- 在相同條件下執行某事件
- 其結果相互獨立
- 每個事件都有相互對立的兩種可能結果

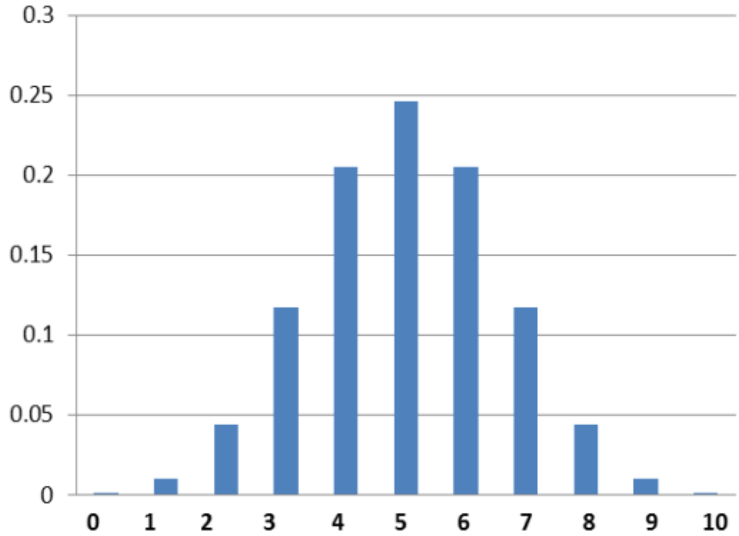
設隨機變數 X 為彈珠最後所在格子的編號，那麼彈珠落到編號 k 的情形是有 k 次向右，(10-k) 次向左落下，其機率為：

$$P(X=k)=C_k^{10}(\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^{10-k}=C_k^{10}(\frac{1}{2})^{10}，k=0，1，2，3，4，5，.....，10$$

得 X 的機率分布如下：

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$
近	0.0010	0.0098	0.0439	0.1172	0.2051	0.2461	0.2051	0.1172	0.0439	0.0098	0.0010

似值											



(三)期望值

試驗中每次可能的結果乘以其結果機率的總和，稱為期望值。在賭博中，期望值又稱預期值、長期效果值、合理價值、期待值。如果 X 是在機率空間 (Ω,F,P) 中的隨機變數，那麼它的期望值 E(X)定義為:

$$E(X)=\int_{\Omega} X\,dP$$

上述積分有時不存在，因此，不是每一個隨機變數都有期望值。如果兩個隨機變數的分布相同，則它們的期望值也相同。

期望值的性質如下:

期望值 E 是線性函數。意即 $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$，X 和 Y 為在同一機率空間的兩個隨機變數（可以獨立或者非獨立），a、b∈R。

一個隨機變數的函數的期望值並不等於這個隨機變數的期望值的函數。即

E(g(X))= $\int_{\Omega} g(x)f(x)\,dx \neq g(E(X)$

在一般情況下，兩個隨機變數的積的期望值不等於這兩個隨機變數的期望值的積。當 E(XY)=E(X)E(Y)成立時，隨機變數 X 和 Y 的共變異數為 0，又稱它們不相關。特別的，當兩個隨機變數獨立時，它們共變異數（若存在）為 0。

(四)關於彈珠台的相關機率問題~~這檔事~~

相信大家都有去過夜市也玩過彈珠台吧!但怎麼總是看到別人可以玩很久?有的還拿獎品?明明同樣的遊戲，別人就可以享受特別多?你是否也有這樣的疑問?

所以我們今天探討有關彈珠台機率這檔事。

根據我們多年來的觀察，這些人通常分為以下幾種：

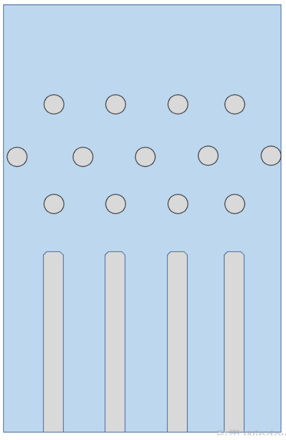
•獎金高時下注多

•獎勵低時下注多

•一直都下少少

哪個才是投資理財的不二法門?

接下來我們得先固定一些彈珠台的變因，如下圖所示:



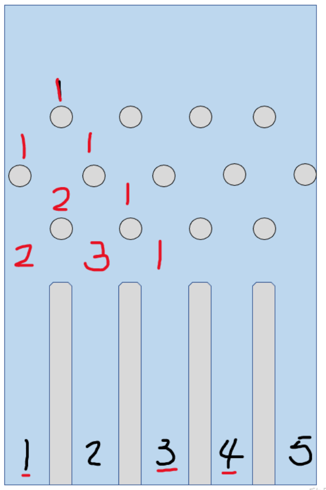
已知彈珠台有五個洞口，現在彈珠台每次玩都有兩種情形，分別為

(1)兩倍獎勵開三洞

(2)八倍獎勵開一洞

玩家可在打彈珠前選擇下注金額，若鋼珠進獎勵洞則獲得下注金額的 N 倍報酬，反之你的賭金將被吃光光。

進入探討：



如右圖

假設鋼珠由左邊第一根鋼釘上落下

由前面所說的二項分布和巴斯卡三角形可知

算法為從此鋼釘往下畫巴斯卡三角形

假設獎勵為兩倍開獎洞為 1 3 4，賭金為 1

可知進號碼洞的機率分別是

2/6、3/6、1/6、0、0

再由可得期望值

E=(2+1)/6*2-3/6*1

接著我們統整了各類情況

獎勵：2倍
賭金：1

起始鋼釘 \ 開獎洞	1	2	3	4
123	2	13/8	1/2	-1/2
124	3/2	7/8	1/2	1/2
125	3/2	1/2	-2/8	0
134	1/2	7/8	5/4	1
135	1/2	1/2	1/2	1/2
145	0	-1/4	1/2	3/2
234	7/6	13/8	13/8	1
235	1	5/4	7/8	1/2
245	1/2	1/2	7/8	3/2
345	1/2	1/2	13/8	2

獎勵：2倍
賭金：10

起始鋼釘 \ 開獎洞	1	2	3	4
123	20	130/8	5	-5
124	15	70/8	5	5
125	15	5	-10/4	0
134	5	70/8	50/4	10
135	5	5	5	5
145	0	-10/4	10/4	15
234	70/6	130/8	130/8	10
235	10	50/4	70/8	5
245	5	5	70/8	15
345	5	5	130/8	20

獎勵：8倍
賭金：1

起始鋼釘 \ 開獎洞	1	2	3	4
1	2	1/8	-1	-1
2	7/2	19/8	1/8	-1
3	1/2	19/8	19/8	1/2
4	-1	1/8	19/8	7/2
5	-1	-1	1/8	2

獎勵：8倍
賭金：10

起始鋼釘 \ 開獎洞	1	2	3	4
1	20	10/8	-10	-10
2	70/2	190/8	10/8	-10
3	10/2	190/8	190/8	10/2
4	-10	10/8	190/8	70/2
5	-1 0	-10	10/8	20

可以看出紅色的是"最佳"碰撞，而這也符合了二項分布定理，也可知道當你想進獎勵洞，從他的正上方為"最佳"碰撞。

接著我們觀察

起始金額	12	12	2	20
	獎金高下多	獎金低下多	都下少	都下多
平均期望值	9.891	10.641	1.866	18.666
成長度	0.824	0.88675	0.933	0.933

發現在此條件下都下多跟都下少竟然會是最好的，這明顯與我們認知有些出入，於是我們調整了金額。

高倍率時賭金99

起始金額	100	100	2	198
	獎金高下多	獎金低下多	都下少	都下多
平均期望值	89.25	97.416	1.866	184.8
成長度	0.8925	0.97416	0.933	0.933

低倍率時賭金5

起始金額	15	15	10	20
	獎金高下多	獎金低下多	都下少	都下多
平均期望值	13.7916	14.2083	9.3333	18.6666
成長度	0.91944	0.94722	0.9333	0.9333

發現當我們調高賭金時，獎金低下多的成長度是最高的，而都下多與都下少則固定在 0.933

於是我們可知獎金低下多會是最好方案。

不過仔細一看，其實成長度都低於 1，也就是說其實都還是虧本的，只能說賭博傷財阿。

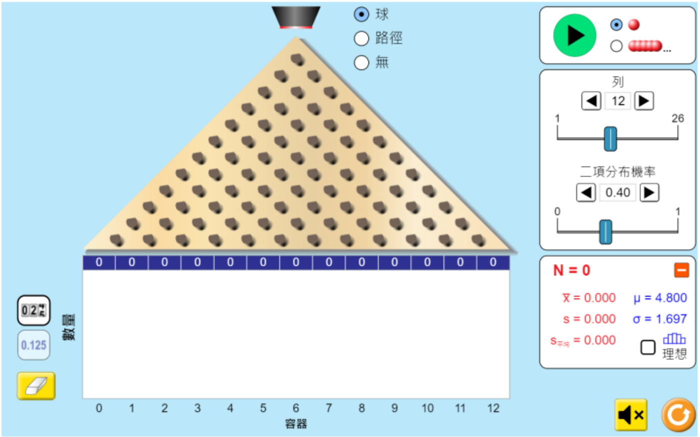
接著我們想探討的是：

如果鋼釘的排數增加呢?

由前面的二項分布和巴斯卡三角形，我們發現，排數增加影響的為起始鋼釘能否碰撞至所有洞口。(兩邊洞口機率仍為最小)也因為巴斯卡三角形可看出，呈現二項分布的情形會愈加明顯

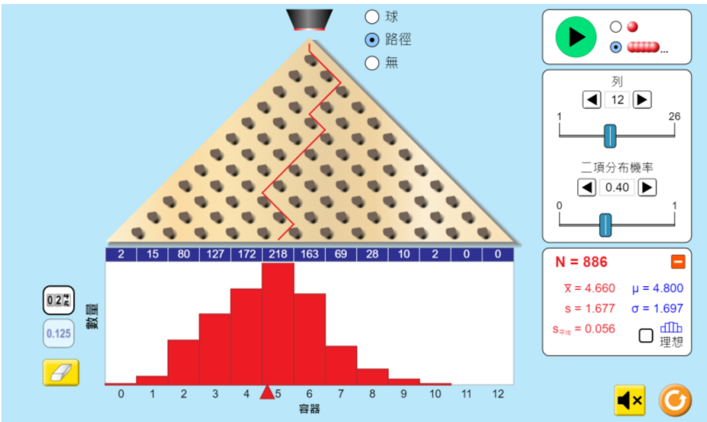
再來思考二項分布的問題:

1.彈珠台一般來說遵守二項定律，試問:若有一個彈珠台(如圖)，彈珠落下



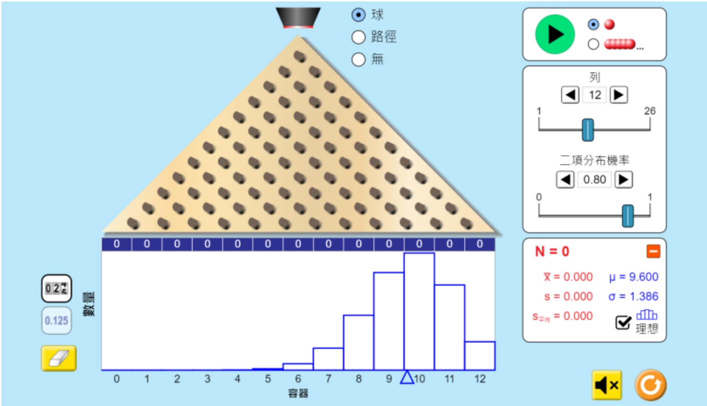
左:落下右的機率(每一階)=6:4，經過無數次後，幾號容器所裝的球數量最多?

Sol:如圖所示:



可見五號容器最多。

2.呈上題，若要使 10 號容器的球數數量最多，則二項分佈機率應趨近於多少?(四捨五入取至小數點第一位)

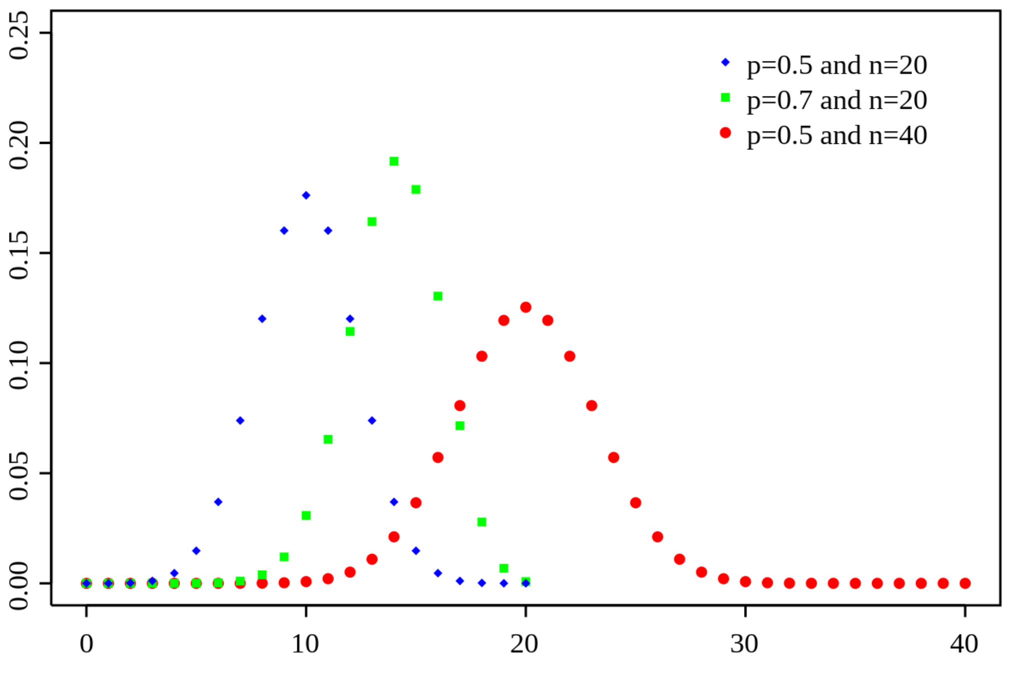


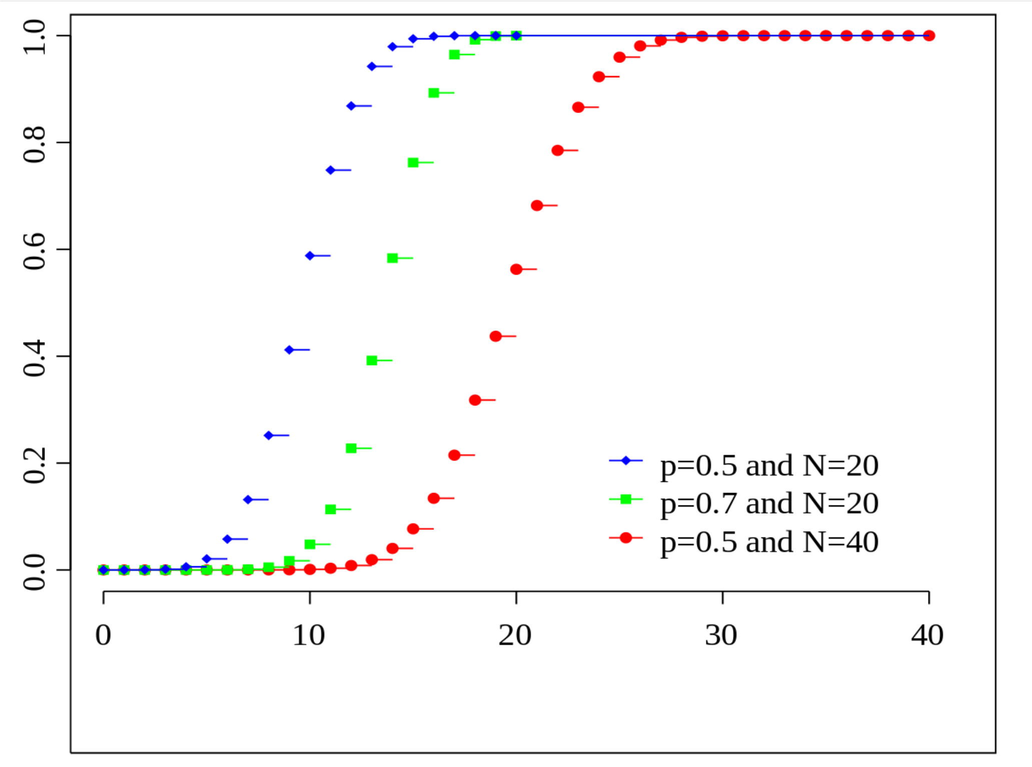
Sol:如圖所示:

可見最接近為 0.8

參、 彈珠臺的相關實驗及數據

在正式開始討論研究內容與結果之前，先跟各位稍微說明一下，我們將會在之後的實驗記錄利用二項分布計算期望值，了解老闆如何設計價錢的分布。





1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
10
20
30
40
p=0.5 and N=20
p=0.7 and N=20
p=0.5 and N=40

(一) 模型操作實驗：

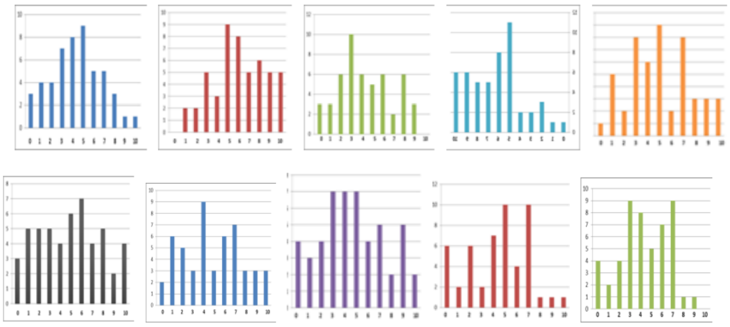
1. 將 50 顆彈珠從正中央一次放下，重複 10 次，並將每次的實驗結果紀錄在下表中：

K(第 k 次)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	合計
1	3	4	4	7	8	9	5	5	3	1	1	50
2	0	2	2	5	3	9	8	5	6	5	5	50
3	3	3	6	10	6	5	6	2	6	3	0	50
4	1	1	3	2	2	11	8	5	5	6	6	50
5	1	5	2	8	6	9	2	8	3	3	3	50
6	3	5	5	5	4	6	7	4	5	2	4	50
7	2	6	5	3	9	3	6	7	3	3	3	50
8	4	3	4	7	7	7	4	5	2	5	2	50
9	6	2	6	2	7	10	4	10	1	1	1	50
10	4	2	4	9	8	5	7	9	1	1	0	50

2. 再將上述的結果分別計算其機率：

K(第 k 次)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	合計
P1(X=k)	0.06	0.08	0.08	0.14	0.16	0.18	0.1	0.1	0.06	0.02	0.02	1
P2(X=k)	0	0.04	0.04	0.1	0.06	0.18	0.16	0.1	0.12	0.1	0.1	1

P3(X=k)	0.06	0.06	0.12	0.2	0.12	0.1	0.12	0.04	0.12	0.06	0	1
P4(X=k)	0.02	0.02	0.06	0.04	0.04	0.22	0.16	0.1	0.1	0.12	0.12	1
P5(X=k)	0.02	0.1	0.04	0.16	0.12	0.18	0.04	0.16	0.06	0.06	0.06	1
P6(X=k)	0.06	0.1	0.1	0.1	0.08	0.12	0.14	0.08	0.1	0.04	0.08	1
P7(X=k)	0.04	0.12	0.1	0.06	0.18	0.06	0.12	0.14	0.06	0.06	0.06	1
P8(X=k)	0.08	0.06	0.08	0.14	0.14	0.14	0.08	0.1	0.04	0.1	0.04	1
P9(X=k)	0.12	0.04	0.12	0.04	0.14	0.2	0.08	0.2	0.02	0.02	0.02	1
P10(X=k)	0.08	0.04	0.08	0.18	0.16	0.1	0.14	0.18	0.02	0.02	0	1



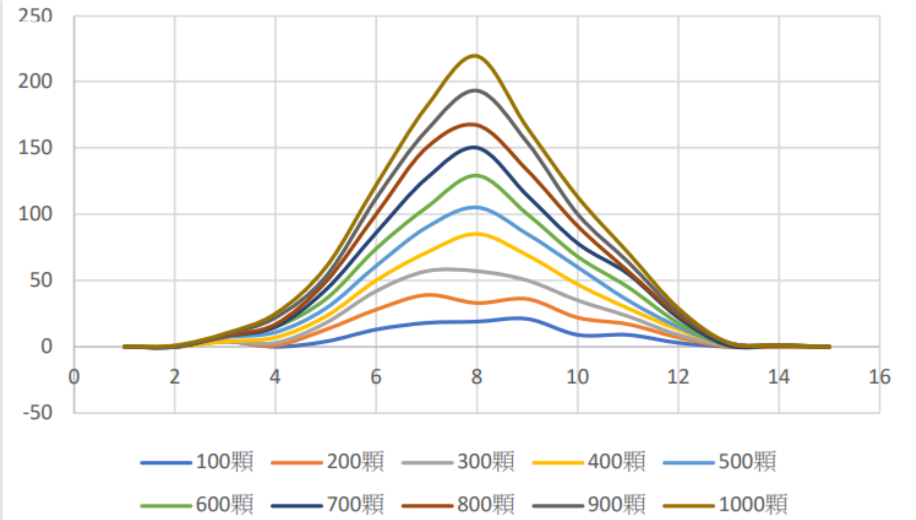
🡑由左而右由上而下分別為模型實驗第 1 次至第 10 次次數分配圖

看到這裡其實還是覺得樣本數有點少，故參考了另外一篇文章的實驗結果來加以確認：

將排數拓展至 15 排，第一次以 100 顆落下，之後每次的顆數為原本的再加上 100 顆，直至 1000 顆為止。以下為實驗結果：

實驗四：固定排數（15 排 100～1000 顆，每單位 100 顆）

排數	第 1 排	第 2 排	第 3 排	第 4 排	第 5 排	第 6 排	第 7 排	第 8 排	第 9 排	第 10 排	第 11 排	第 12 排	第 13 排	第 14 排	第 15 排
100 顆	0	0	4	0	4	13	18	19	21	9	9	3	0	0	0
200 顆	0	0	4	1	13	28	39	33	36	22	17	7	0	0	0
300 顆	0	0	4	3	18	42	57	57	50	35	23	9	1	1	0
400 顆	0	0	4	7	23	50	71	85	69	47	29	13	1	1	0
500 顆	0	0	7	11	29	61	90	105	85	60	35	15	1	1	0
600 顆	0	0	8	15	36	74	105	129	100	68	45	18	1	1	0
700 顆	0	0	8	15	43	86	127	150	114	78	55	22	1	1	0
800 顆	0	0	8	17	49	100	150	167	133	91	57	24	3	1	0
900 顆	0	0	9	22	53	112	163	193	154	100	64	26	3	1	0
1000 顆	0	1	10	25	60	122	181	219	165	113	71	29	3	1	0


250
200
150
100
50
0
-50
0
2
4
6
8
10
12
14
16
100顆
200顆
300顆
400顆
500顆
600顆
700顆
800顆
900顆
1000顆

(二)電腦程式模擬實驗：

1. 利用教育部提供教學用模擬彈珠台研究其彈珠走向。如下圖：

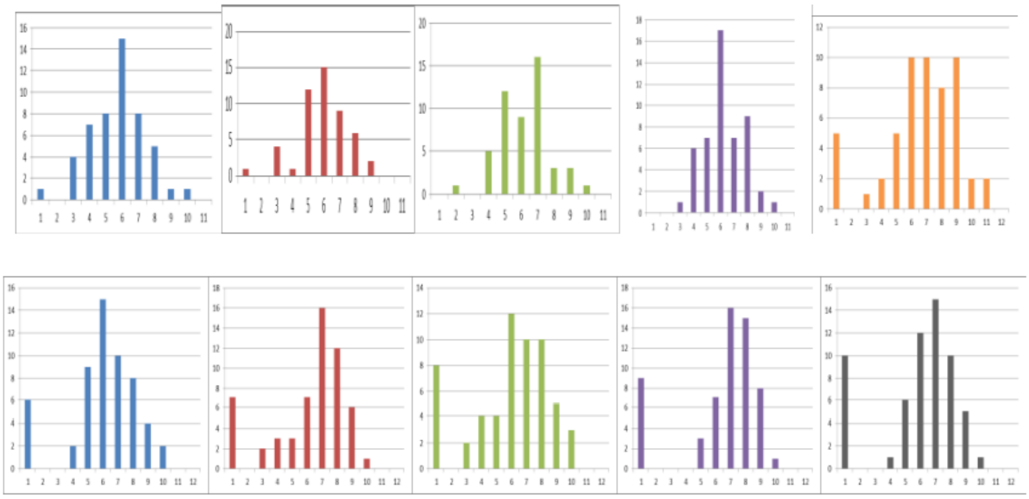
2. 單次放 50 顆彈珠，重複 10 次，統計結果如下：

K(第 k 次)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	合計
1	1	0	4	7	8	15	8	5	1	1	0	50
2	1	0	4	1	12	15	9	6	2	0	0	50
3	0	1	0	5	12	9	16	3	3	1	0	50
4	0	0	1	6	7	17	7	9	2	1	0	50
5	0	1	2	5	10	10	8	10	2	2	0	50
6	0	0	2	9	15	10	8	4	2	0	0	50
7	0	2	3	3	7	16	12	6	1	0	0	50
8	0	2	4	4	12	10	10	5	3	0	0	50

9	0	0	0	3	7	16	15	8	1	0	0	50
10	0	0	1	6	12	15	10	5	1	0	0	50

3. 再次計算個別的機率：

K(第 k 次)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**合計**
P1(X=k)	0.02	0.00	0.08	0.14	0.16	0.30	0.16	0.10	0.02	0.02	0.00	1
P2(X=k)	0.02	0.00	0.08	0.02	0.24	0.30	0.18	0.12	0.04	0.00	0.00	1
P3(X=k)	0.00	0.02	0.00	0.10	0.24	0.18	0.32	0.06	0.06	0.02	0.00	1
P4(X=k)	0.00	0.00	0.02	0.12	0.14	0.34	0.14	0.18	0.04	0.02	0.00	1
P5(X=k)	0.00	0.02	0.04	0.10	0.20	0.20	0.16	0.20	0.04	0.04	0.00	1
P6(X=k)	0.00	0.00	0.04	0.18	0.30	0.20	0.16	0.08	0.04	0.00	0.00	1
P7(X=k)	0.00	0.04	0.06	0.06	0.14	0.32	0.24	0.12	0.02	0.00	0.00	1
P8(X=k)	0.00	0.04	0.08	0.08	0.24	0.20	0.20	0.10	0.06	0.00	0.00	1
P9(X=k)	0.00	0.00	0.00	0.06	0.14	0.32	0.30	0.16	0.02	0.00	0.00	1
P10(X=k)	0.00	0.00	0.02	0.12	0.24	0.30	0.20	0.10	0.02	0.00	0.00	1



↑由左而右由上而下分別為程式實驗第 1 次至第 10 次次數分配圖

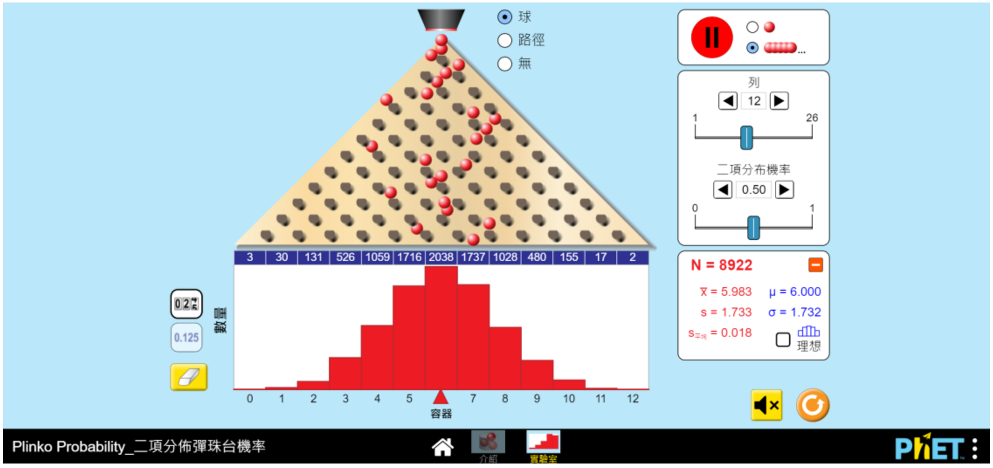
(三)結論：

經過以上結果，可以得出當數據樣本越多時，將越接近二項分布的理論值。

肆、　彈珠臺本身與相關遊戲

- 彈珠臺小遊戲

運行此遊戲的網址，已放置於第五點「彈珠臺小遊戲」中。下圖為運行此模擬程式約一小時後之結果:



(此圖僅供參考)

- 與彈珠臺相似的遊戲

1.電子遊戲

遊戲裡面常常有成功率這個東西，像是成功強化武器的機率、某個技能附加能力的發動機率、抽中稀有卡片的機率等等。

2.博弈-早期老虎機

早期的老虎機在數學方面較現代機臺易於理解。可能有 3 個轉軸，每個轉軸上都有 10 個符號。

然後，我們可以將排列這些符號的獎金與擊中組合的機會進行比較，以得出機器的投資回報率。如果賭場提供押注998：1 賠率，有 1/1000 獲勝的機會，那麼該賭場將擁有很低的優勢。隨著時間的流逝，會逐漸顯示出利潤。

3.博弈-現代老虎機

由於符號和捲軸已編程到計算機中，因此現代老虎機機台很難計算。這使遊戲在很多方面都更加靈活。例如，它們不受捲軸大小的限制。

在遊戲從字面上和物理上變得太大而無法實際使用之前，舊款機械式老虎機在轉軸上只能有 10 多個符號。但是，由計算機驅動的遊戲每個轉軸上可能有 20 個符號。

製造商的另一個優勢是，他們可以調整出現特定符號的機率。每旋轉 10 次，某些符號就會出現一次；其他人每 20 或 30 次旋轉可能只會出現一次。這使製造商和賭場能夠提供更大的頭獎，並且仍然保持其賭場盈利。

線上角子機遊戲具有多種功能。可以玩 5 個轉軸和 25 條支付線的遊戲。散佈符號，野生符號，獎勵遊戲和累積獎金都為老虎機遊戲增添了趣味性和多樣性。

澳門大多數賭場的收入估計有 70%至 80%直接來自這些老虎機。

伍、 參考資料來源

- 彈珠臺小遊戲

  https://phet.colorado.edu/sims/html/plinko-probability/latest/plinko-probability_zh_TW.html

- 高爾頓板

  https://zh.wikipedia.org/zh-hant/%E9%AB%98%E5%B0%94%E9%A1%BF%E6%9D%BF

- 中央極限定理

  https://zh.wikipedia.org/zh-hant/%E4%B8%AD%E5%BF%83%E6%9E%81%E9%99%90%E5%AE%9A%E7%90%86

- 彈珠臺

  https://www.google.com/search?q=%E5%BD%88%E7%8F%A0%E6%AA%AF+%E5%A4%9C%E5%B8%82&tbm=isch&ved=2ahUKEwiQ2NLsit73AhWDx4sBHc4ODPkQ2-cCegQIABAA&oq=%E5%BD%88%E7%8F%A0%E6%AA%AF&gs_lcp=CgNpbWcQARgCMgUIABCABDIFCAAQgAQyBQgAEIAEMgUIABCABDIFCAAQgAQyBQgAEIAEMgUIABCABDIFCAAQgAQyBggAEAcQHjIGCAAQBxAeUABYAGCZF2gAcAB4AIABMIgBMJIBATGYAQCqAQtnd3Mtd2l6LWltZ8ABAQ&sclient=img&ei=ySZ_YtDPEIOPr7wPzp2wyA8&bih=592&biw=1366#imgrc=jv0qGHdATOaeQM
  https://zh.wikipedia.org/zh-hant/%E4%B8%AD%E5%BF%83%E6%9E%81%E9%99%90%E5%AE%9A%E7%90%86

- 二項分布彈珠台機率

  https://phet.colorado.edu/sims/html/plinko-probability/latest/plinko-probability_zh_TW.html

- 從一顆彈珠談起 - 彈珠檯的機率問題

  https://www.shs.edu.tw/works/essay/2016/11/2016111223354818.pdf

- 由高三主題式活動「數學實驗─利用彈珠台學機統」談起

  https://www2.hwhs.tc.edu.tw/resource/openfid.php?id=19034

- 遊戲中的二項式分佈

  https://medium.com/豬窩部落格/遊戲中的二項式分佈-47a750c9098f

- 為什麼說「網遊公布抽取概率」非常好，我來給你算算

  https://read01.com/zh-tw/KK7xRd.html#.YoXrV6hBy5c

- 老虎機遊戲｜機率、技巧、破解、玩法、公式、設計

  https://iboyi66.com/%E8%80%81%E8%99%8E%E6%A9%9F%E9%81%8A%E6%88%B2%EF%BD%9C%E6%A9%9F%E7%8E%87%E3%80%81%E6%8A%80%E5%B7%A7%E3%80%81%E7%A0%B4%E8%A7%A3%E3%80%81%E7%8E%A9%E6%B3%95%E3%80%81%E5%85%AC%E5%BC%8F%E3%80%81%E8%A8%AD/

- 二項分配機率

  https://ezslotdesign.com/二項分配機率/

- 由高三主題式活動「數學實驗─利用彈珠台學機統」談起

  https://www2.hwhs.tc.edu.tw/resource/openfid.php?id=19034

- 從一顆彈珠談起 - 彈珠檯的機率問題

  https://www.shs.edu.tw/works/essay/2016/11/2016111223354818.pdf

- 維基百科-機率

  https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/概率

- 維基百科-期望值

https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/期望值

- 維基百科-二項式分佈

  https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/二項式分佈