報告主題：

彈珠檯

第六組組員：
411031106
張心玫
411031111
林鈺祐
411031120
江晁維
411031132
楊荏喻
411031142
倪詩晶

目錄

研究動機

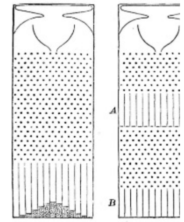
由於上次在夜市跑去玩彈珠台，發現到彈珠台會先選出倍率再去決定得分通道，由此我們發現可以選用彈珠台做為主題進行期末報告。

研究目的

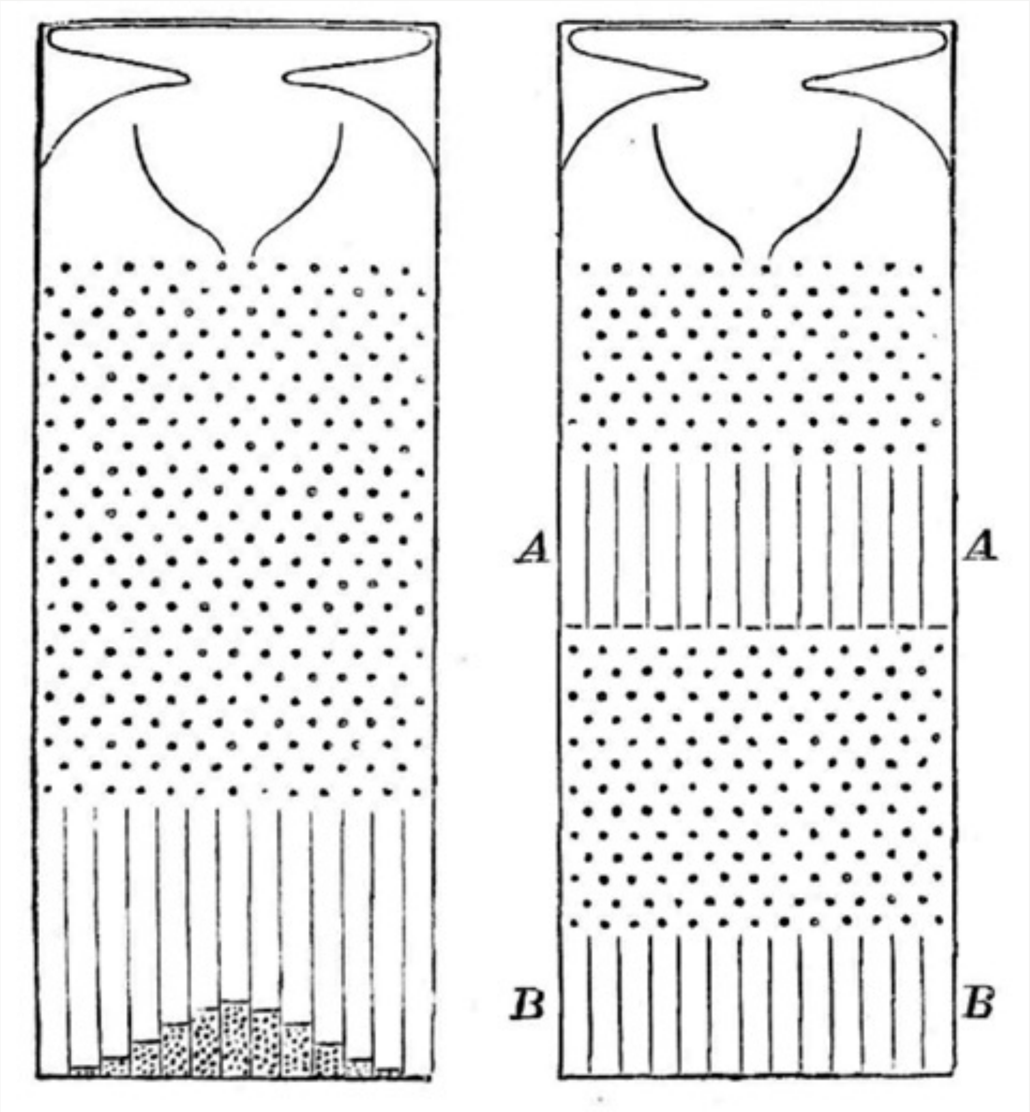
我們本次的實驗就是要觀察及統計在不考慮台面上的釘子分布與力道控制。

- 每局平均各進排數的機率為何？
- 顆數與排數是否有關連性？
- 圖形分布是否有特殊的情況？
- 另外還有期望值呢？

彈珠檯
歷史演變



最早的彈珠檯就是由高爾頓發明的，稱為高爾頓釘板。



Q：高個子的父母生的孩子會是高個子嗎？

遺傳這項因素把身高的性狀優勢傳遞給下一代，按常理來想應該會出現兩極化的態勢。

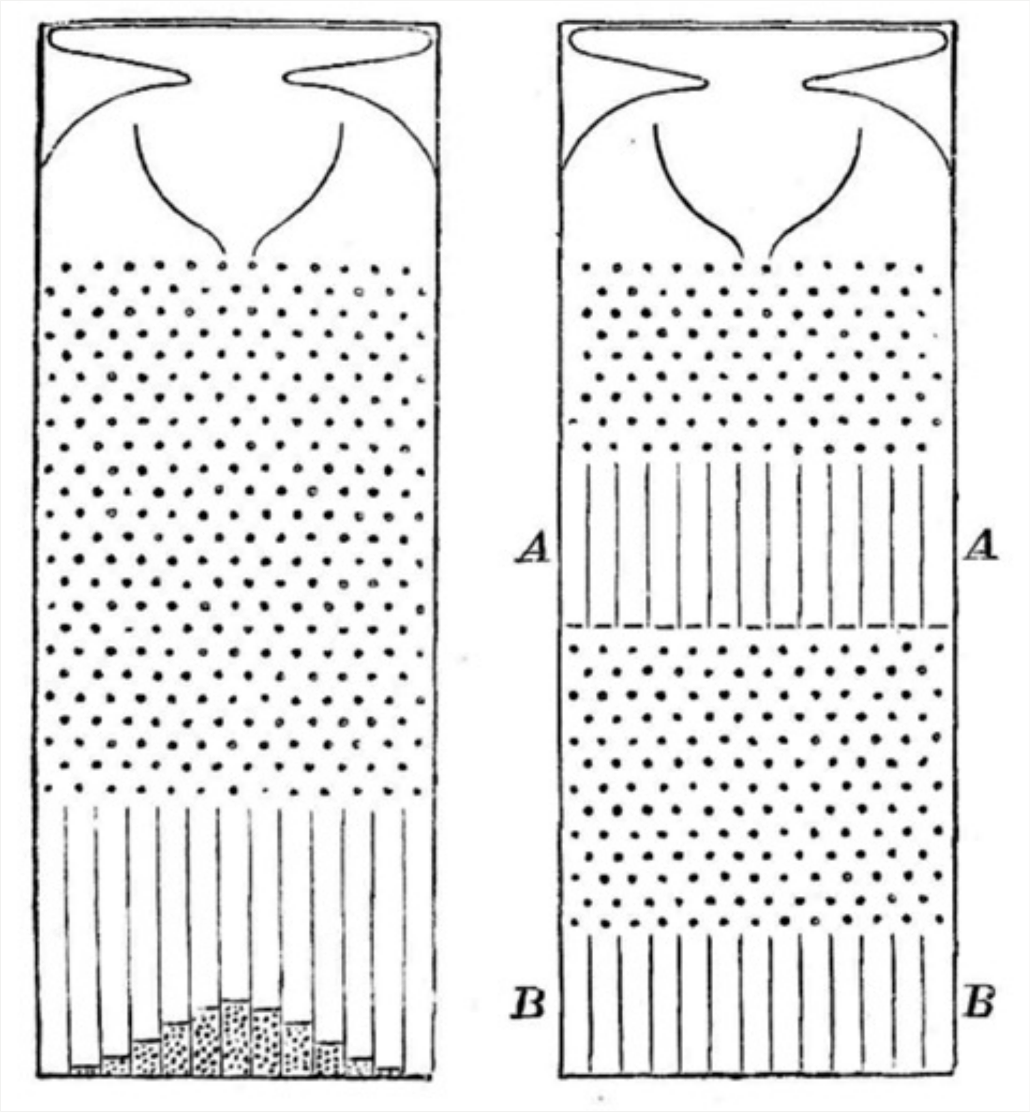
高爾頓觀察到，非常高的父母所生的小孩，會比父母矮一些；而非常矮的父母所生的小孩，又會比父母高一點。

結果卻是一代又一代的身高是穩定的，並且形成常態分布。

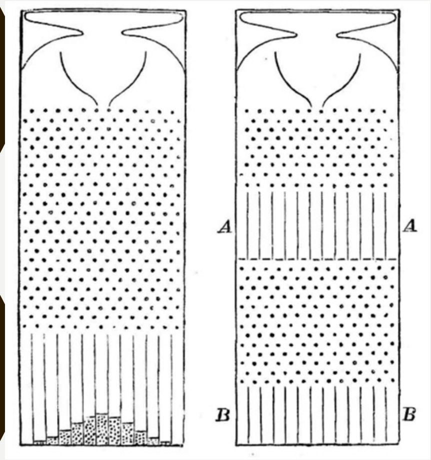
將人的身高從高矮的兩端往所有人的平均值推過去。

高爾頓釘板

高爾頓釘板(英語：Galton board)，又稱為豆機(bean machine)、梅花機(quincunx)等，是弗朗西斯・高爾頓發明的用以驗證中心極限定理的裝置。

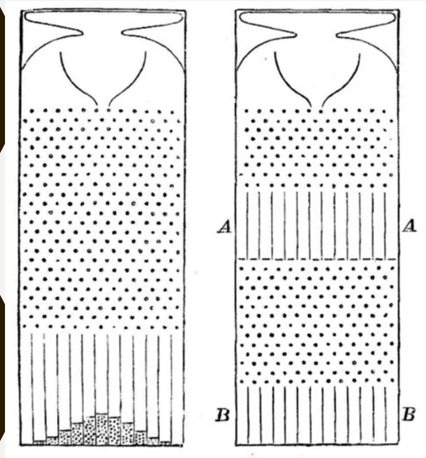


高爾頓繪製的高爾頓釘板示意圖



高爾頓釘板

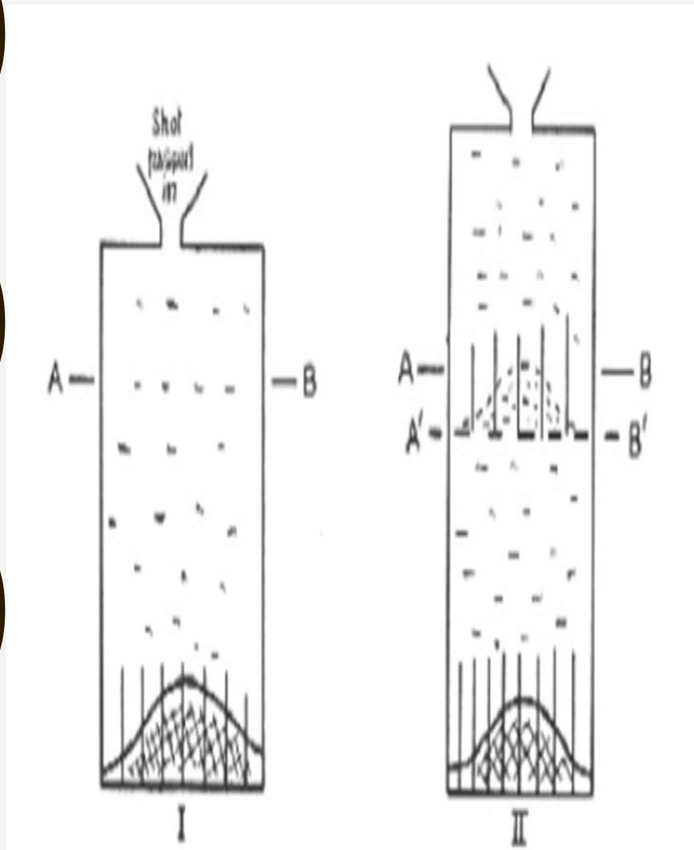
這項裝置上方是一個漏斗狀的容器，可將許多大小相同的小球倒入並讓其掉落。每個小球先碰到第一排釘子，繼續掉落則會碰到第二排釘子，並且碰到的機率都是 1/2。球繼續掉落，最後落入底部隔開的槽內。



高爾頓釘板

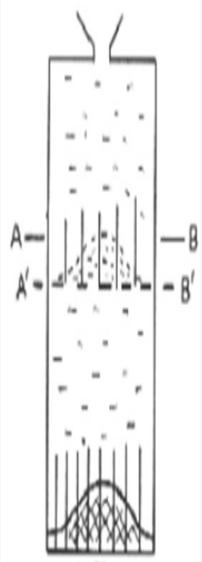
假若一共有 n 排釘子，各槽內的球數則服從於二項分布；當 n 很大時，它就接近於常態分布。這項裝置只不過是一個二項分布或二項分布逼近常態的演示器。

高爾頓釘板



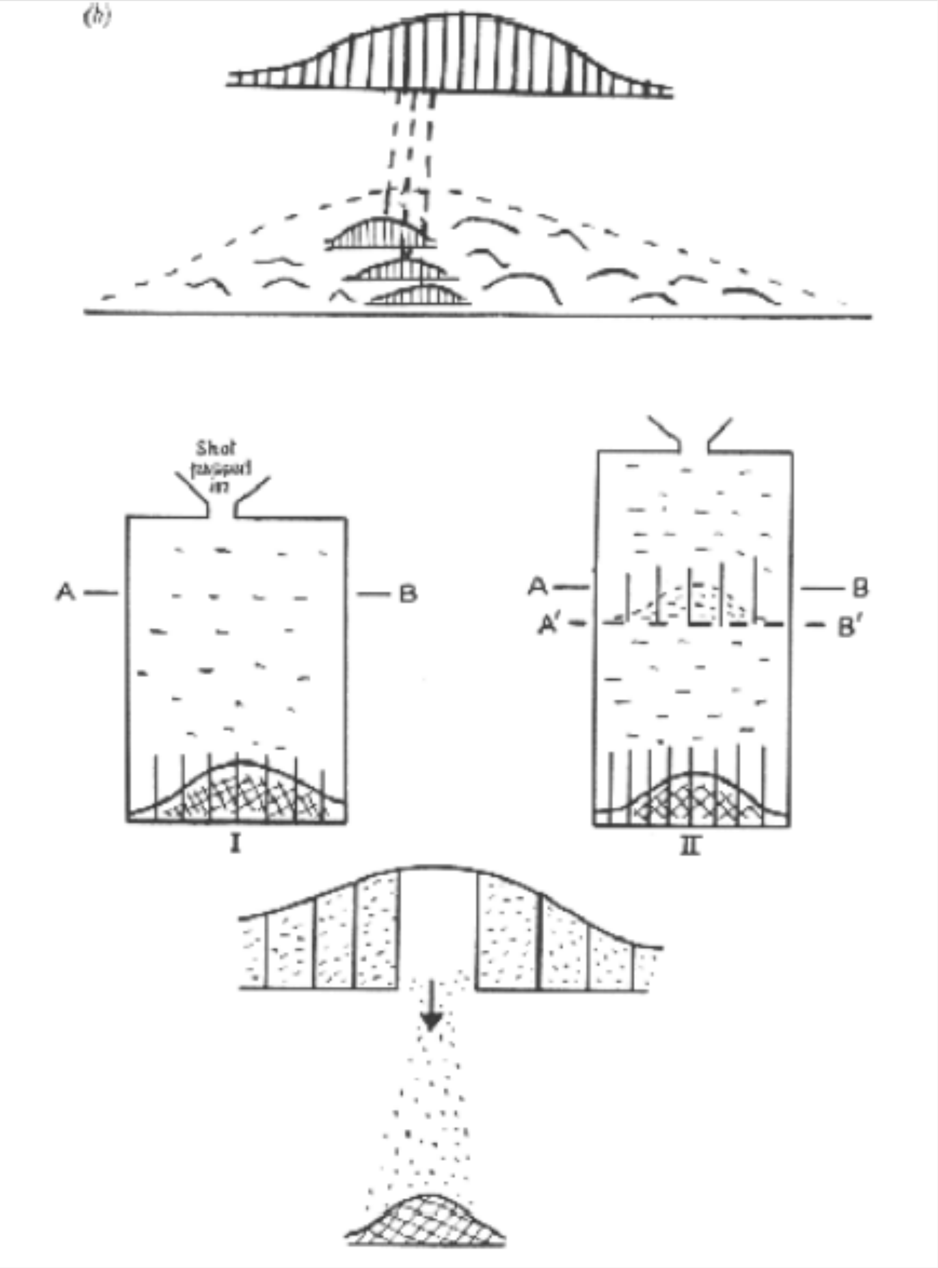
在中間某AB處將流下的小球用一板子截住，小球聚成一個近似於常態分佈曲線的形狀。

將AB處的閥門打開，讓小球繼續掉落，則每個小球就會有一個新的起源。

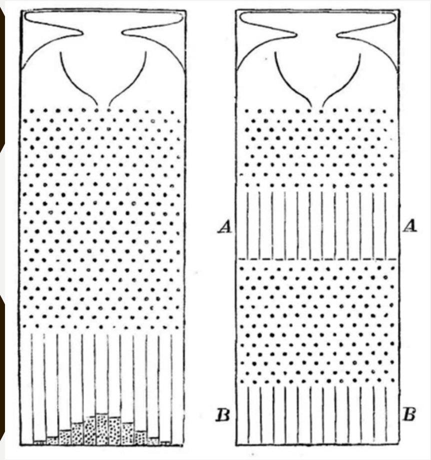


高爾頓釘板

同樣地，愈近中間處球愈多。從每一個這樣的起源裝置所掉落的球，到了高爾頓釘板底部則形成一個個小的常態分布。而在高爾頓釘板底部所形成的大常態分布，則是這些個別小常態分佈的混合。



(b)
Shot
A
B
I
A
B
A′
B′
II

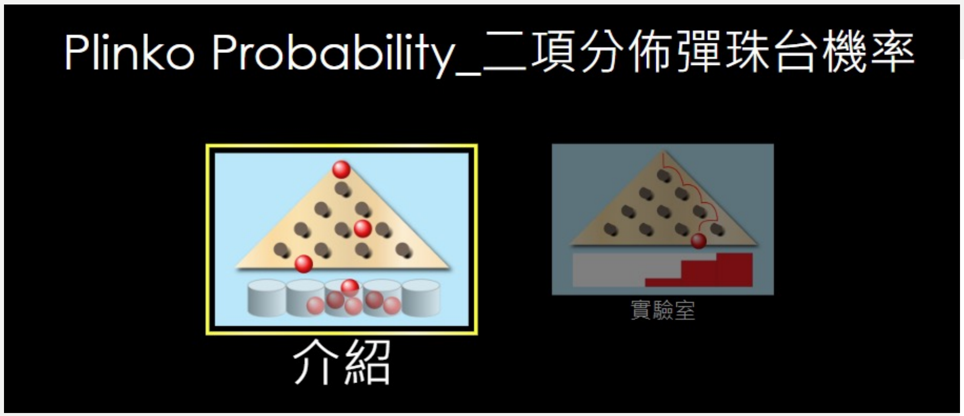


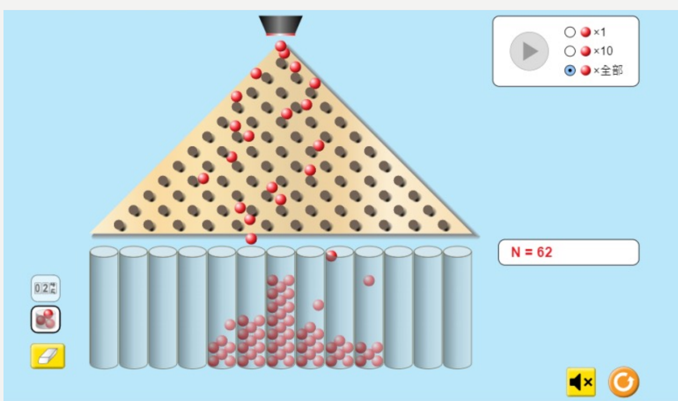
高爾頓釘板

整個 AB 可視為一個顯著因素 (如遺傳)，而底部所形成的常態分布則表明了縱然有此顯著因素之作用，這並不會影響到最終結果的常態性(如身高)。

右圖為現今
的彈珠檯。

遊戲示範





伯努利分布

- 如果一個隨機試驗的結果**僅有兩種情形**，就稱為伯努力試驗
- 習慣上將這兩種情形稱為成功或失敗

二項分布

- 而只要符合下面三個特點，就可以判斷某些事件是二項分布：

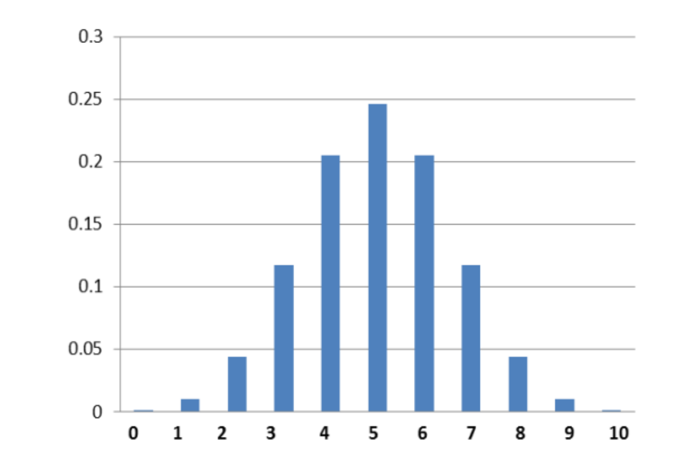
1. 在相同的條件下執行某件事
2. 其結果相互獨立
3. 每個事件都有相互對立的兩種可能結果

二項分布

- 設隨機變數 X 為彈珠最後所在格子的編號，那麼彈珠落到編號 k 的情形是有 k 次向右，(10-k) 次向左落下，其機率為：(二項式)

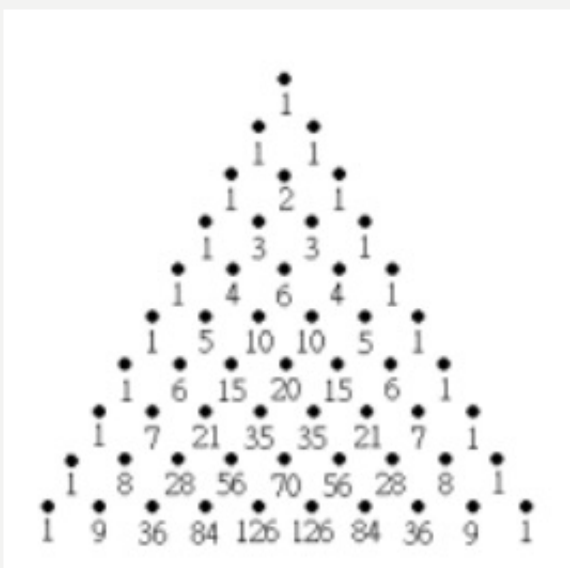
$$P(X=k)=C_k^{10}(\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^{10-k}=C_k^{10}(\frac{1}{2})^{10}\text{，}k=0\text{，}1\text{，}2\text{，}3\text{，}4\text{，}5\text{，}.....\text{，}10$$

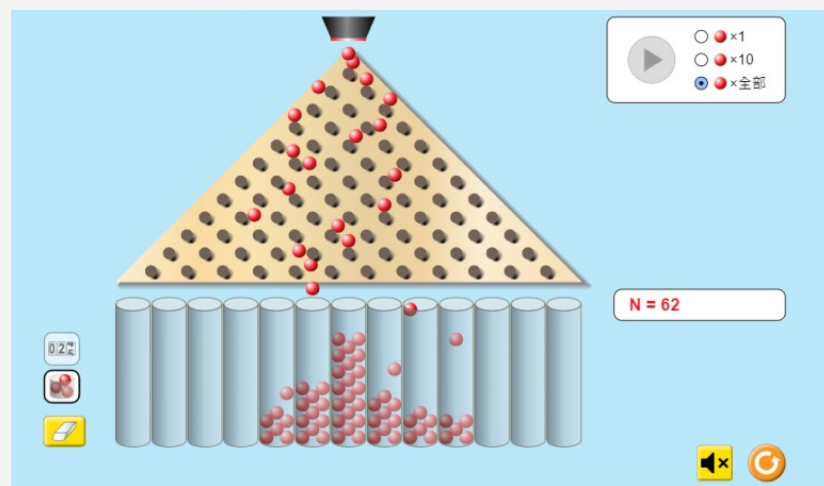
右圖為二項分布理論值的長條示意圖(p=1/2)



二項分布

- 而當滿足二項分布時，其結果的圖形神似於巴斯卡三角形，而再仔細觀察，可發現其實跟彈珠台的結構也非常相似！





期望值

- 試驗中每次可能的結果乘以其結果機率的總和，稱為期望值。在賭博中，期望值又稱預期值、長期效果值、合理價值、期待值。如果X是在機率空間(Ω,F,P) 中的隨機變數，那麼它的期望值E(X)定義為:

$$E(X)=\int_{\Omega} X\,dP$$

關於彈珠檯問題的這檔事

相信大家都有去過夜市看過彈珠台吧，也一定有去玩過吧！

根據我多年來的經驗，認真玩的分成三種人

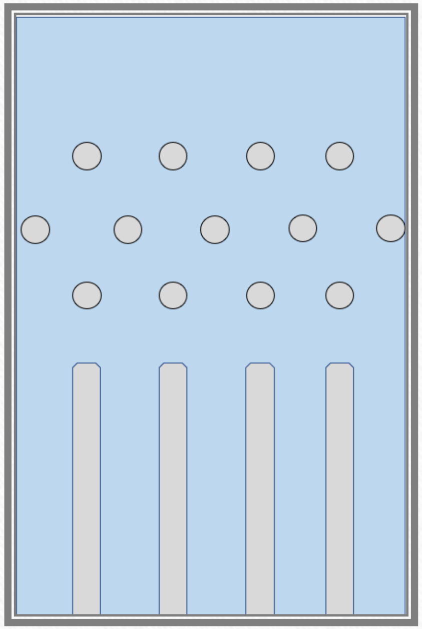
- 獎勵高時下注多
- 獎勵低時下注多
- 一直都下少少

那哪一種才是投資理財的最好方法?

燕師彈珠台

規則講解

- 現在彈珠台每次玩都有兩種情形，分別為
(1)兩倍獎勵開三洞
- &
- (2)八倍獎勵開一洞
- 玩家可在打彈珠前選擇下注金額，若鋼珠進獎勵洞則獲得下注金額的N倍報酬，反之你的賭金將被吃光光！
- (彈珠台如右圖所示→)



假設鋼珠由左邊第一根鋼釘上落下

由前面所說的二項分布和巴斯卡三角形可知

算法為從此鋼釘往下畫巴斯卡三角形

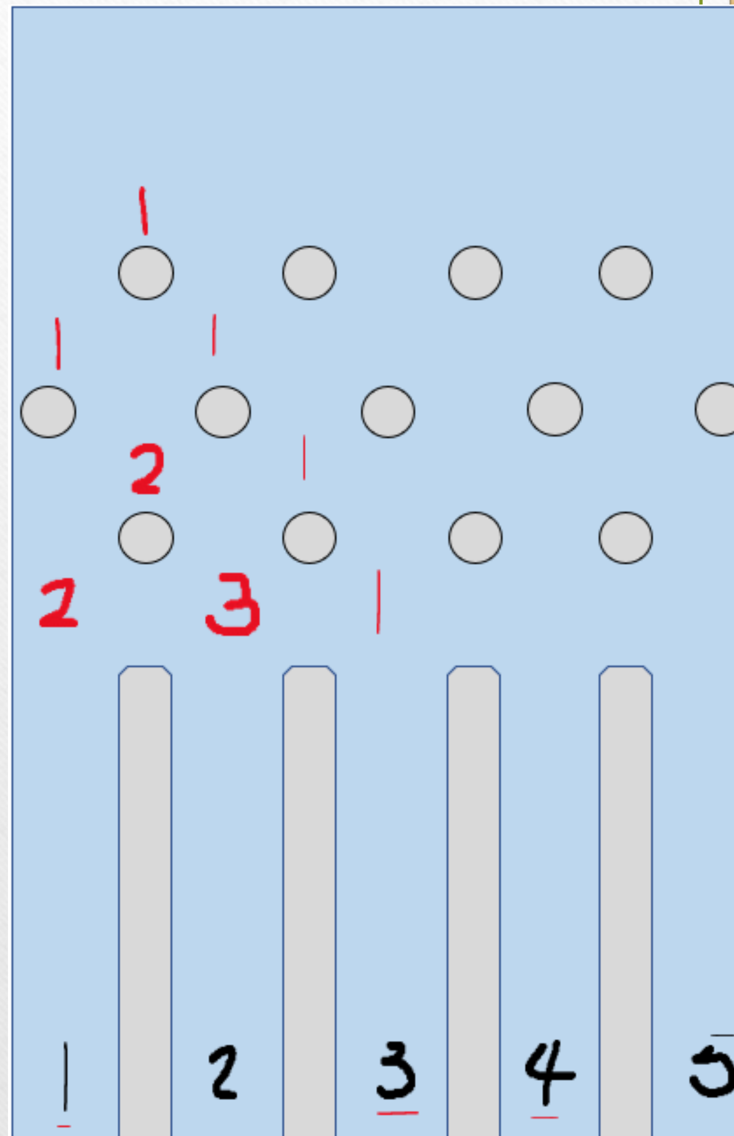
假設獎勵為兩倍開獎洞為1 3 4，賭金為1

可知進號碼洞的機率分別是

$\frac{2}{6}$、$\frac{3}{6}$、$\frac{1}{6}$、0、0

再由可得期望值

$$E=\frac{(2+1)}{6}\times 2-\frac{3}{6}\times 1$$



獎勵：2倍

賭金：1

起始鋼釘 \ 開獎洞	1	2	3	4
123	2	13/8	1/2	-1/2
124	3/2	7/8	1/2	1/2
125	3/2	1/2	-2/8	0
134	1/2	7/8	5/4	1
135	1/2	1/2	1/2	1/2
145	0	-1/4	1/2	3/2
234	7/6	13/8	13/8	1
235	1	5/4	7/8	1/2
245	1/2	1/2	7/8	3/2
345	1/2	1/2	13/8	2

獎勵：2倍

賭金：10

起始鋼釘 \ 開獎洞	1	2	3	4
123	20	130/8	5	-5
124	15	70/8	5	5
125	15	5	-10/4	0
134	5	70/8	50/4	10
135	5	5	5	5
145	0	-10/4	10/4	15
234	70/6	130/8	130/8	10
235	10	50/4	70/8	5
245	5	5	70/8	15
345	5	5	130/8	20

獎勵：8倍

賭金：1

起始鋼釘 \ 開獎洞	1	2	3	4
1	2	1/8	-1	-1
2	7/2	19/8	1/8	-1
3	1/2	19/8	19/8	1/2
4	-1	1/8	19/8	7/2
5	-1	-1	1/8	2

獎勵：8倍

賭金：10

起始鋼釘\開獎洞	1	2	3	4
1	20	10/8	-10	-10
2	70/2	190/8	10/8	-10
3	10/2	190/8	190/8	10/2
4	-10	10/8	190/8	70/2
5	-1 0	-10	10/8	20

起始金額　12　12　2　20

	獎金高下多	獎金低下多	都下少	都下多
平均期望值	9.891	10.641	1.866	18.666
成長度	0.824	0.88675	0.933	0.933

都下多跟都下少可能才是最好辦法?

將賭金再提高

高倍率時賭金99　起始金額 100　100　2　198

	獎金高下多	獎金低下多	都下少	都下多
平均期望值	89.25	97.416	1.866	184.8
成長度	0.8925	0.97416	0.933	0.933

低倍率時賭金5　起始金額　15　15　10　20

	獎金高下多	獎金低下多	都下少	都下多
平均期望值	13.7916	14.2083	9.3333	18.6666
成長度	0.91944	0.94722	0.9333	0.9333

結論

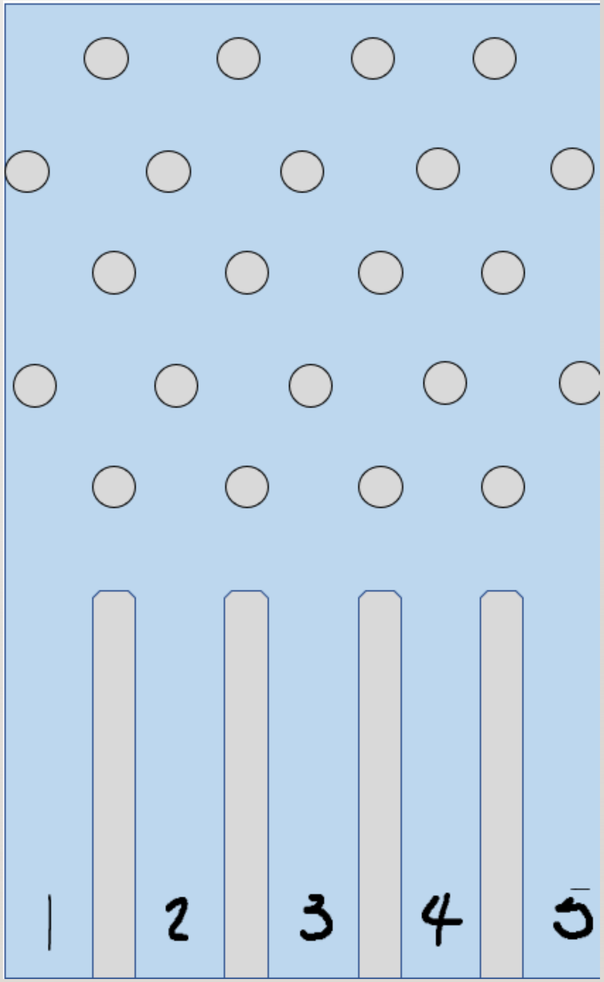
- 賭博傷財
- 發現當賭金提高時
  最好的方案其實是倍率低時下注多為
  最好的方法
- 但其實成長度都仍是小於1的

那你還記得彈珠台共有幾排？ 用幾顆彈珠？

在顆數固定的條件下，想要每一排都能打進的機會不大；若想要刻意打中其中某一排也很難。然而決定落點並非只是力道控制就行，人們給予的初速度，以及滾動時產生的摩擦力，加上釘子的碰撞力，都會影響最後的結果。

關於彈珠檯問題的這檔事

- 那若是鋼釘的排數增加呢？

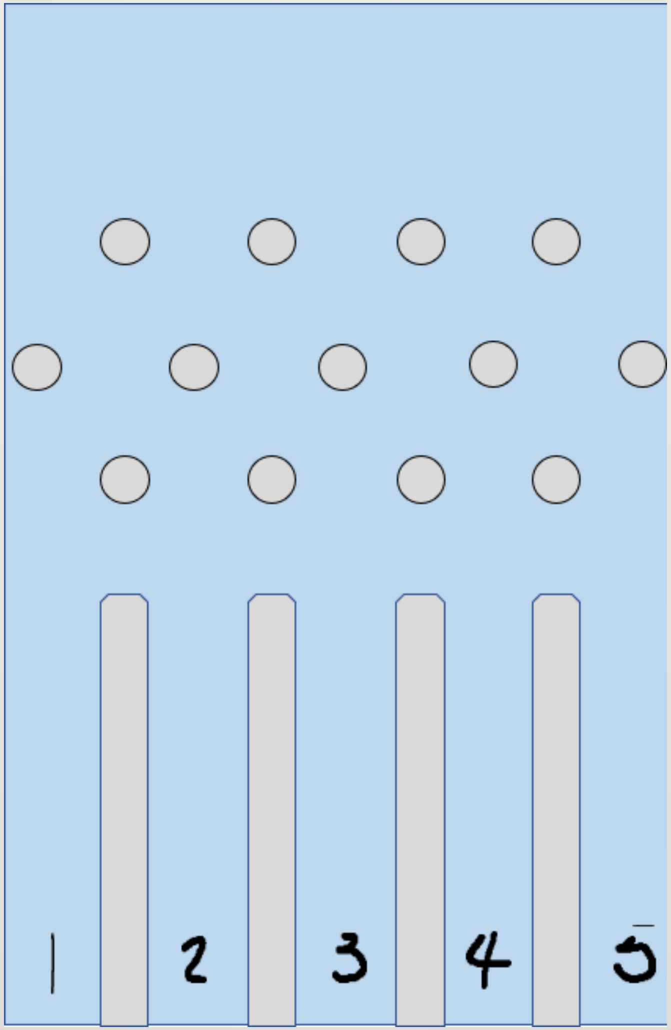


小結

同樣我們以巴斯卡三角形和前面提到的性質發現，排數增加影響的為起始鋼釘能否碰撞至所有洞口

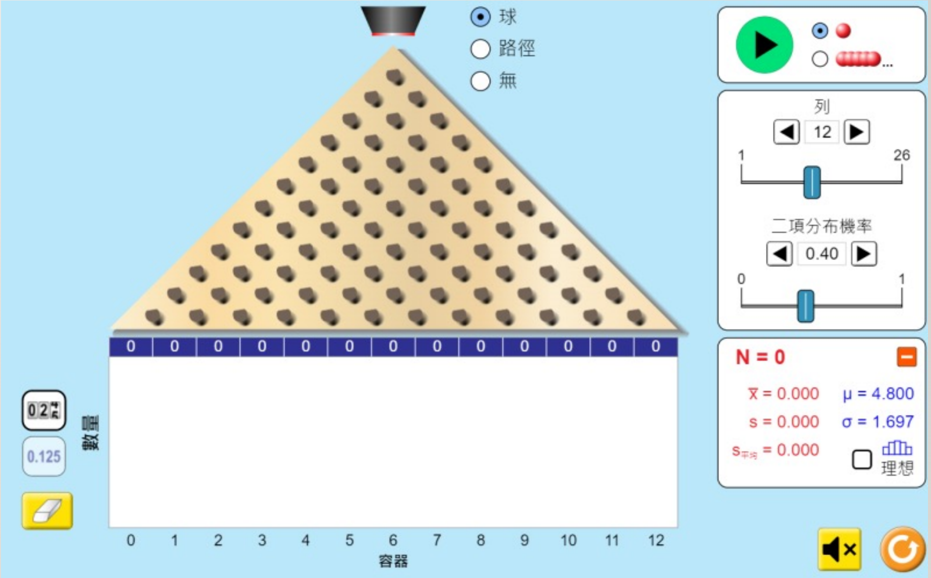
(兩邊洞口機率仍為最小)

也因為巴斯卡三角形可看出，呈現二項分布的情形會愈加明顯


1
2
3
4
5

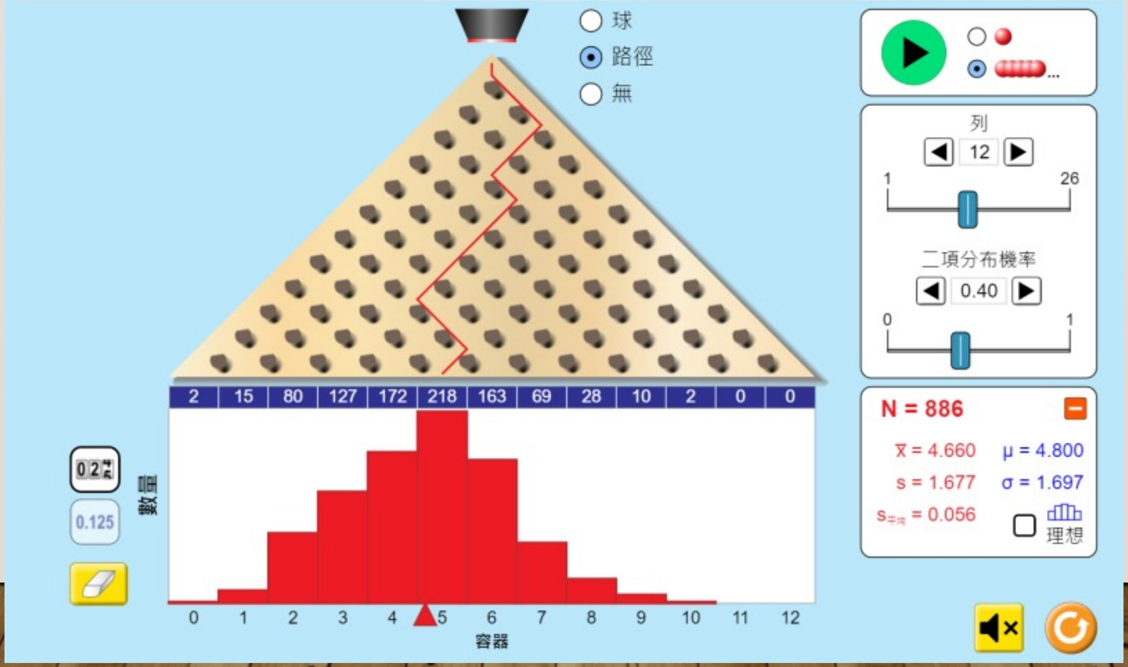
關於彈珠檯問題的這檔事

- Q1：彈珠台一般來說遵守二項定律，試問:若有一個彈珠台(如圖)，彈珠落下左:落下右的機率(每一階)=6:4，經過無數次後，幾號容器所裝的球數量最多?



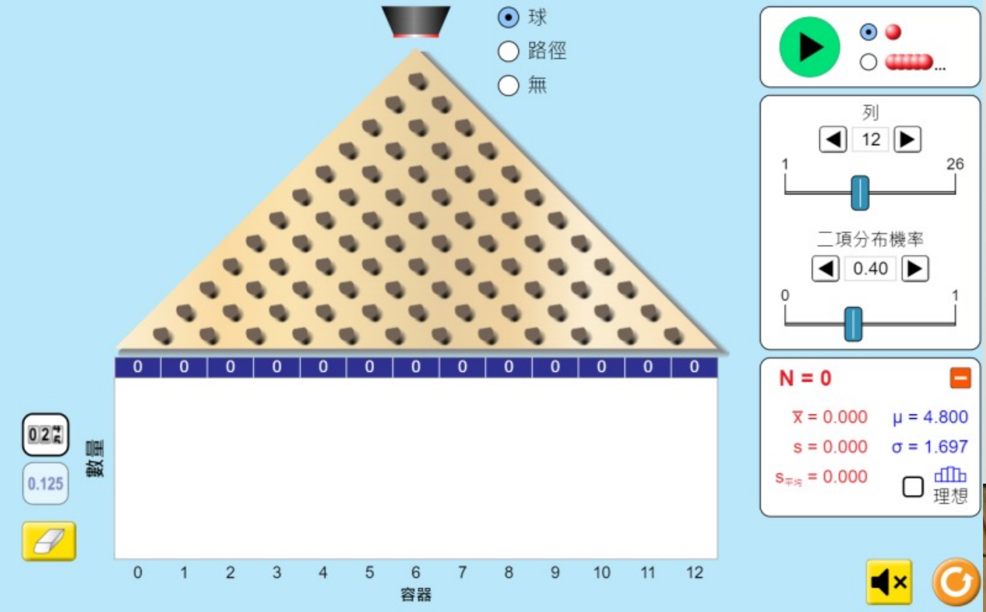
關於彈珠檯問題的這檔事

- Ans1：如圖所示→可見五號容器最多



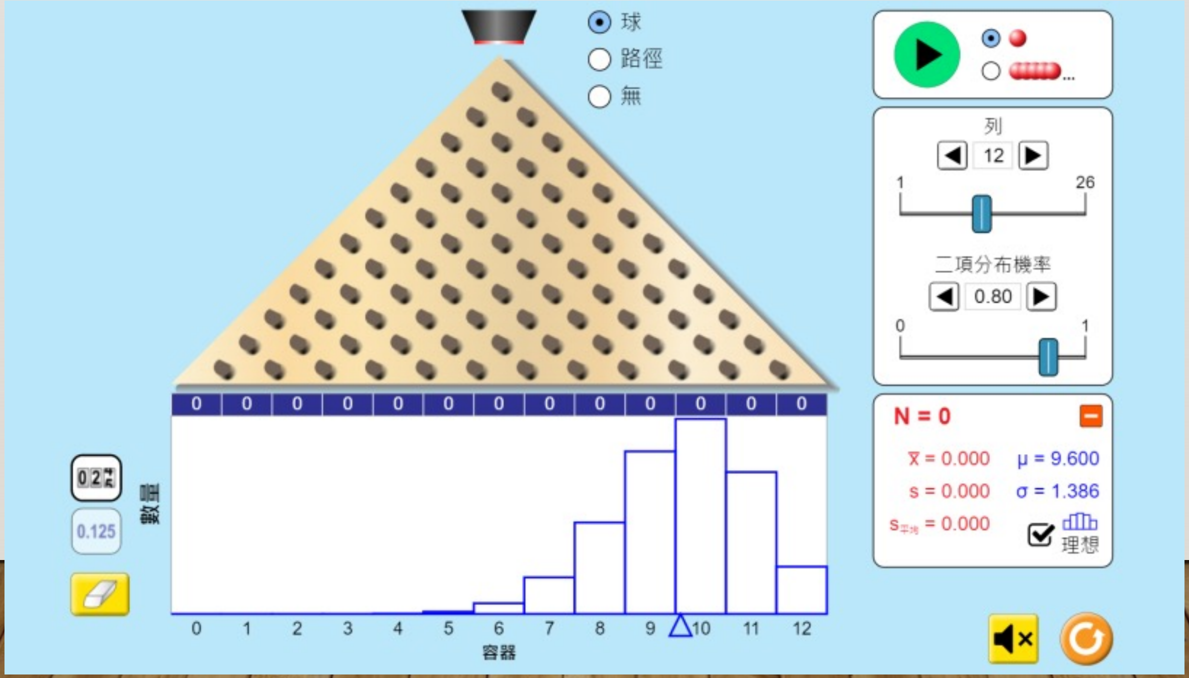
關於彈珠檯問題的這檔事

- Q2：呈上題，若要使10號容器的球數數量最多，則二項分佈機率應趨近於多少?(四捨五入取至小數點第一位)



關於彈珠檯問題的這檔事

- Ans1：如圖所示→可見最接近為0.8



實驗數據

- 模型操作實驗
- 電腦程式模擬實驗

模型操作實驗(一)

1. 將50顆彈珠從正中央一次放下，重複10次，並將每次的實驗結果紀錄在下表中：

K(第 k 次)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	合計
1	3	4	4	7	8	9	5	5	3	1	1	50
2	0	2	2	5	3	9	8	5	6	5	5	50
3	3	3	6	10	6	5	6	2	6	3	0	50
4	1	1	3	2	2	11	8	5	5	6	6	50
5	1	5	2	8	6	9	2	8	3	3	3	50
6	3	5	5	5	4	6	7	4	5	2	4	50
7	2	6	5	3	9	3	6	7	3	3	3	50
8	4	3	4	7	7	7	4	5	2	5	2	50
9	6	2	6	2	7	10	4	10	1	1	1	50
10	4	2	4	9	8	5	7	9	1	1	0	50

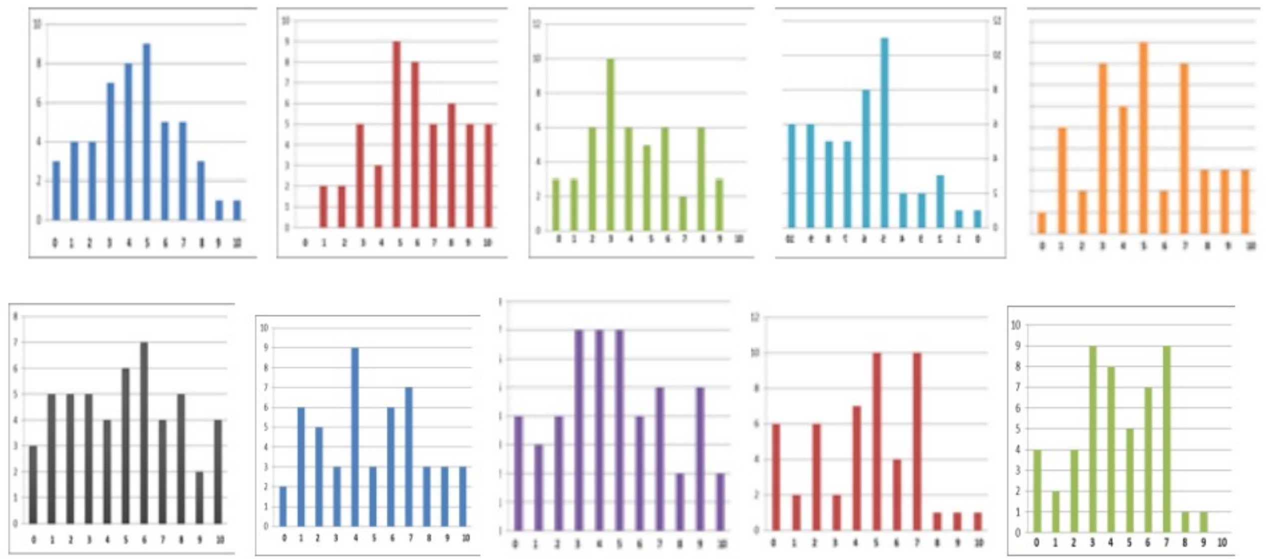
模型操作實驗(一)

2. 再將其結果個別計算其機率：

K(第k次)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	合計
P1(X=k)	0.06	0.08	0.08	0.14	0.16	0.18	0.1	0.1	0.06	0.02	0.02	1
P2(X=k)	0	0.04	0.04	0.1	0.06	0.18	0.16	0.1	0.12	0.1	0.1	1
P3(X=k)	0.06	0.06	0.12	0.2	0.12	0.1	0.12	0.04	0.12	0.06	0	1
P4(X=k)	0.02	0.02	0.06	0.04	0.04	0.22	0.16	0.1	0.1	0.12	0.12	1
P5(X=k)	0.02	0.1	0.04	0.16	0.12	0.18	0.04	0.16	0.06	0.06	0.06	1
P6(X=k)	0.06	0.1	0.1	0.1	0.08	0.12	0.14	0.08	0.1	0.04	0.08	1
P7(X=k)	0.04	0.12	0.1	0.06	0.18	0.06	0.12	0.14	0.06	0.06	0.06	1
P8(X=k)	0.08	0.06	0.08	0.14	0.14	0.14	0.08	0.1	0.04	0.1	0.04	1
P9(X=k)	0.12	0.04	0.12	0.04	0.14	0.2	0.08	0.2	0.02	0.02	0.02	1
P10(X=k)	0.08	0.04	0.08	0.18	0.16	0.1	0.14	0.18	0.02	0.02	0	1

模型操作實驗(一)

3. 最後再把機率放入圖表中作分析，可得下圖：



↑由左而右由上而下分別為模型實驗第 1 次至第 10 次次數分配圖

模型操作實驗(二)

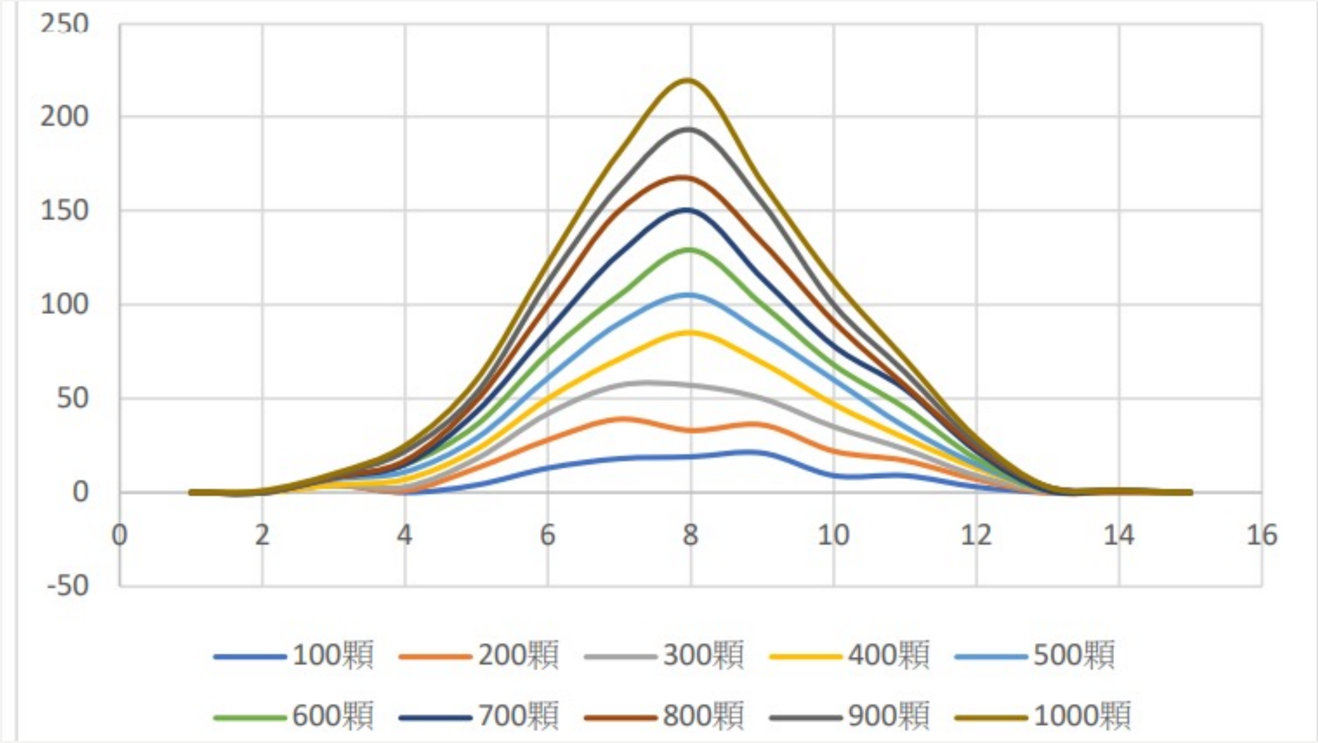
- 將排數拓展至15排，第一次以100顆落下，之後每次的顆數為原本的再加上100顆，直至1000顆為止。以下為實驗結果：

模型操作實驗(二)

排數	第1排	第2排	第3排	第4排	第5排	第6排	第7排	第8排	第9排	第10排	第11排	第12排	第13排	第14排	第15排
100顆	0	0	4	0	4	13	18	19	21	9	9	3	0	0	0
200顆	0	0	4	1	13	28	39	33	36	22	17	7	0	0	0
300顆	0	0	4	3	18	42	57	57	50	35	23	9	1	1	0
400顆	0	0	4	7	23	50	71	85	69	47	29	13	1	1	0
500顆	0	0	7	11	29	61	90	105	85	60	35	15	1	1	0
600顆	0	0	8	15	36	74	105	129	100	68	45	18	1	1	0
700顆	0	0	8	15	43	86	127	150	114	78	55	22	1	1	0
800顆	0	0	8	17	49	100	150	167	133	91	57	24	3	1	0
900顆	0	0	9	22	53	112	163	193	154	100	64	26	3	1	0
1000顆	0	1	10	25	60	122	181	219	165	113	71	29	3	1	0

模型操作實驗(二)

- 以下為分析圖表：



電腦程式模擬實驗

- 利用教育部提供教學用模擬彈珠台研究其彈珠走向。如右圖：

電腦程式模擬實驗

1. 單次放50顆彈珠，重複10次，統計結果如下：

K(第 k 次)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**合計**
1	1	0	4	7	8	15	8	5	1	1	0	50
2	1	0	4	1	12	15	9	6	2	0	0	50
3	0	1	0	5	12	9	16	3	3	1	0	50
4	0	0	1	6	7	17	7	9	2	1	0	50
5	0	1	2	5	10	10	8	10	2	2	0	50
6	0	0	2	9	15	10	8	4	2	0	0	50
7	0	2	3	3	7	16	12	6	1	0	0	50
8	0	2	4	4	12	10	10	5	3	0	0	50
9	0	0	0	3	7	16	15	8	1	0	0	50
10	0	0	1	6	12	15	10	5	1	0	0	50

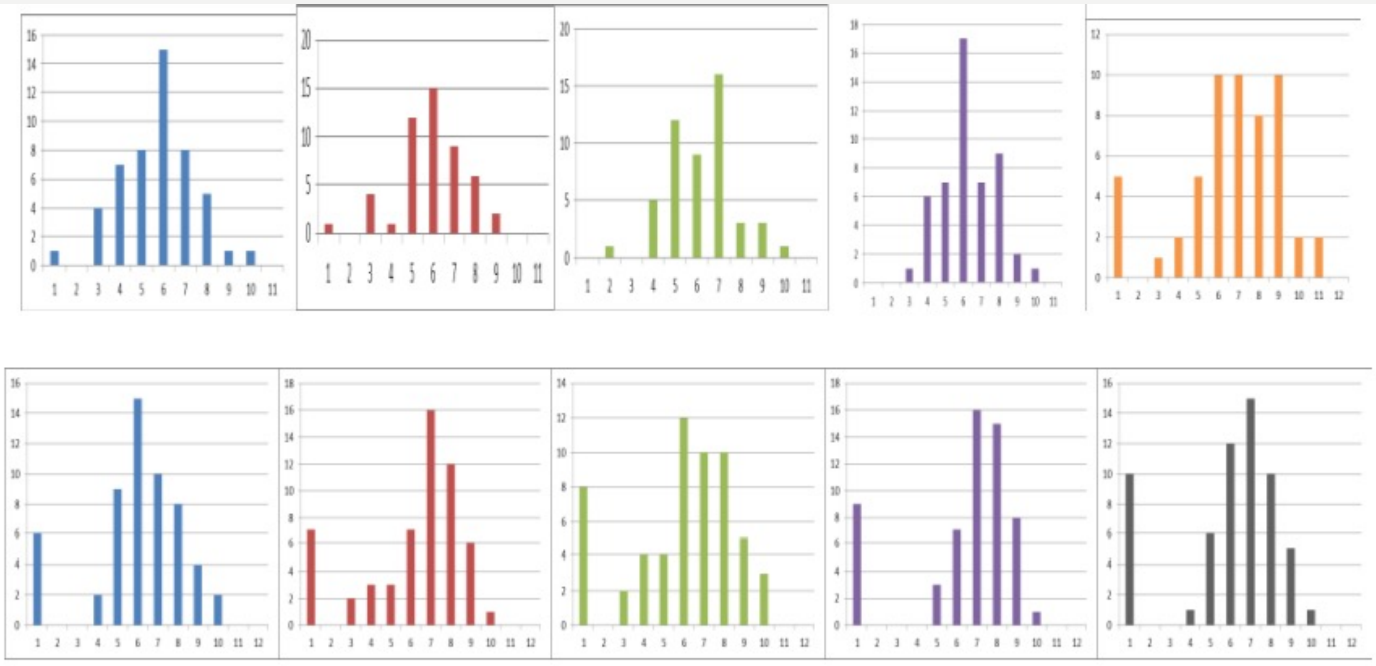
電腦程式模擬實驗

2. 再次計算個別的機率：

K(第k次)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	合計
P1(X=k)	0.02	0.00	0.08	0.14	0.16	0.30	0.16	0.10	0.02	0.02	0.00	1
P2(X=k)	0.02	0.00	0.08	0.02	0.24	0.30	0.18	0.12	0.04	0.00	0.00	1
P3(X=k)	0.00	0.02	0.00	0.10	0.24	0.18	0.32	0.06	0.06	0.02	0.00	1
P4(X=k)	0.00	0.00	0.02	0.12	0.14	0.34	0.14	0.18	0.04	0.02	0.00	1
P5(X=k)	0.00	0.02	0.04	0.10	0.20	0.20	0.16	0.20	0.04	0.04	0.00	1
P6(X=k)	0.00	0.00	0.04	0.18	0.30	0.20	0.16	0.08	0.04	0.00	0.00	1
P7(X=k)	0.00	0.04	0.06	0.06	0.14	0.32	0.24	0.12	0.02	0.00	0.00	1
P8(X=k)	0.00	0.04	0.08	0.08	0.24	0.20	0.20	0.10	0.06	0.00	0.00	1
P9(X=k)	0.00	0.00	0.00	0.06	0.14	0.32	0.30	0.16	0.02	0.00	0.00	1
P10(X=k)	0.00	0.00	0.02	0.12	0.24	0.30	0.20	0.10	0.02	0.00	0.00	1

電腦程式模擬實驗

3. 最後一樣把數據放入圖表中分析：



↑由左而右由上而下分別為程式實驗第 1 次至第 10 次次數分配圖

延伸想法

- 老闆的成本考量和彈珠台二項分布的理論值息息相關！！

與彈珠台相似的遊戲

電子遊戲

遊戲裡面常常有成功率這個東西，像是成功強化武器的機率、某個技能附加能力的發動機率、抽中稀有卡片的機率等等。

博弈

- 早期老虎機
- 早期的老虎機具有易於理解的數學。您可能有3個轉軸，每個轉軸上都有10個符號。
- 排列這些符號的獎金與擊中組合的機會進行比較，以得出機器的投資回報率。

如果賭場提供押注998：1賠率，有1/1000獲勝的機會，那麼該賭場將擁有很低的優勢。隨著時間的流逝，會逐漸顯示出利潤。

- 現代老虎機
- 由於符號和捲軸已編程到計算機中。這使遊戲在很多方面都更加靈活。
- 由計算機驅動的遊戲每個轉軸上可能有20個符號。

製造商的另一個優勢是，他們可以調整出現特定符號的機率。每旋轉10次，某些符號就會出現一次；其他人每20或30次旋轉可能只會出現一次。這使製造商和賭場仍然能保持其賭場盈利的原因。

澳門大多數賭場的收入估計有70%至80%直接來自這些老虎機。

線上角子機遊戲具有多種功能。可以玩5個轉軸和25條支付線的遊戲。散佈符號，野生符號，獎勵遊戲和累積獎金都為老虎機遊戲增添了趣味性和多樣性。

補充資料

卜瓦松分布

- 在二項分布的伯努利試驗中，如果試驗次數n很大，二項分布的機率p很小，且乘積 $\lambda = np$比較適中，則事件出現的次數的機率可以用卜瓦松分布來逼近
- 事實上，二項分布可以看作卜瓦松分布在離散時間上的對應物

如果p=λ/n，n趨近於無窮時P的極限：

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X=k) &= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left[\frac{n!}{n^k (n-k)!}\right]}_{F} \left(\frac{\lambda^k}{k!}\right) \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to\exp(-\lambda)} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]}_{\to 1} \left(\frac{\lambda^k}{k!}\right) \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to\exp(-\lambda)} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \\
&= \left(\frac{\lambda^k}{k!}\right) \exp(-\lambda)
\end{aligned}$$

應用

- 放射性原子核的衰變數
- 電話交換機接到呼叫的次數
- 汽車站台的候客人數
- 機器出現的故障數
- 自然災害發生的次數
- DNA序列的變異數等等

資料來源

- 彈珠臺小遊戲
- https://phet.colorado.edu/sims/html/plinko-probability/latest/plinko-probability_zh_TW.html
- 高爾頓板
- https://zh.wikipedia.org/zh-hant/%E9%AB%98%E5%B0%94%E9%A1%BF%E6%9D%BF
- 中央極限定理
- https://zh.wikipedia.org/zh-hant/%E4%B8%AD%E5%BF%83%E6%9E%81%E9%99%90%E5%AE%9A%E7%90%86
- 二項分布彈珠台機率
- https://phet.colorado.edu/sims/html/plinko-probability/latest/plinko-probability_zh_TW.html

資料來源

- 彈珠臺
  - https://www.google.com/search?q=%E5%BD%88%E7%8F%A0%E6%AA%AF+%E5%A4%9C%E5%B8%82&tbm=isch&ved=2ahUKEwiQ2NLsit73AhWDx4sBHc4ODPkQ2-cCegQIABAA&oq=%E5%BD%88%E7%8F%A0%E6%AA%AF&gs_lcp=CgNpbWcQARgCMgUIABCABDIFCAAQgAQyBQgAEIAEMgUIABCABDIFCAAQgAQyBQgAEIAEMgUIABCABDIFCAAQgAQyBggAEAcQHjIGCAAQBxAeUABYAGCZF2gAcAB4AIABMIgBMJIBATGYAQCqAQtnd3Mtd2l6LW1tZ8ABAQ&sclient=img&ei=ySZ_YtDPEIOPr7wPzp2wyA8&bih=592&biw=1366#imgrc=jv0qGHdATOaeQM
  - https://zh.wikipedia.org/zh-hant/%E4%B8%AD%E5%BF%83%E6%9E%81%E9%99%90%E5%AE%9A%E7%90%86
- 從一顆彈珠談起－彈珠檯的機率問題
  - https://www.shs.edu.tw/works/essay/2016/11/2016111223354818.pdf
- 由高三主題式活動「數學實驗—利用彈珠台學機統」談起
  - https://www2.hwhs.tc.edu.tw/resource/openfid.php?id=19034
- 遊戲中的二項式分佈
  - https://medium.com/豬窩部落格/遊戲中的二項式分佈-47a750c9098f

資料來源

- 為什麼說「網遊公布抽取概率」非常好，我來給你算算
  - https://read01.com/zh-tw/KK7xRd.html#.YoXrV6hBy5c
- 老虎機遊戲｜機率、技巧、破解、玩法、公式、設計
  - https://iboyi66.com/%E8%80%81%E8%99%8E%E6%A9%9F%E9%81%8A%E6%88%B2%EF%BD%9C%E6%A9%9F%E7%8E%87%E3%80%81%E6%8A%80%E5%B7%A7%E3%80%81%E7%A0%B4%E8%A7%A3%E3%80%81%E7%8E%A9%E6%B3%95%E3%80%81%E5%85%AC%E5%BC%8F%E3%80%81%E8%A8%AD/
- 二項分配機率
- https://ezslotdesign.com/二項分配機率/
- 由高三主題式活動「數學實驗—利用彈珠台學機統」談起
  - https://www2.hwhs.tc.edu.tw/resource/openfid.php?id=19034

資料來源

- 從一顆彈珠談起－彈珠檯的機率問題
  - https://www.shs.edu.tw/works/essay/2016/11/2016111223354818.pdf
- 維基百科-機率
  - https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/概率
- 維基百科-期望值
  - https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/期望值
- 維基百科-二項式分佈
  - https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/二項式分佈


穴穴大家
麻糬爸