



音數小子

第七組

411031108 魏碩廷 411031119 陳柏諺 411031137 游智宇
411031139 張天傑 411031216 許仲勳

1. 動機

MOTIVATION

2. 音樂與數學

MUSIC and MATH

3. 關於音樂界中數學...

WHAT MATH WE CAN LEARN FROM MUSIC

4. 參考文獻

REFERENCES





動機

MOTIVATION

生活無處不是音樂，這可以顯示出本組的人究竟有多愛音樂，雖然對於樂理可能根本一翹不通，但對於聽歌或唱歌亦或是奏樂可能還是滿腔熱忱，不過我們還是可以透過我們對於數學的感覺去試著理解其內容，所以我們就藉由這次數思報告，來好好探究音樂中的數學，不管是理論上的符合還是應用上的巧合，我們都會去探尋，來發覺其中的奧妙。





音樂與數學

MUSIC and MATH



赫爾曼·京特·格拉斯曼
Hermann Günther Graßmann

奧古斯塔斯·德摩根

Augustus De Morgan





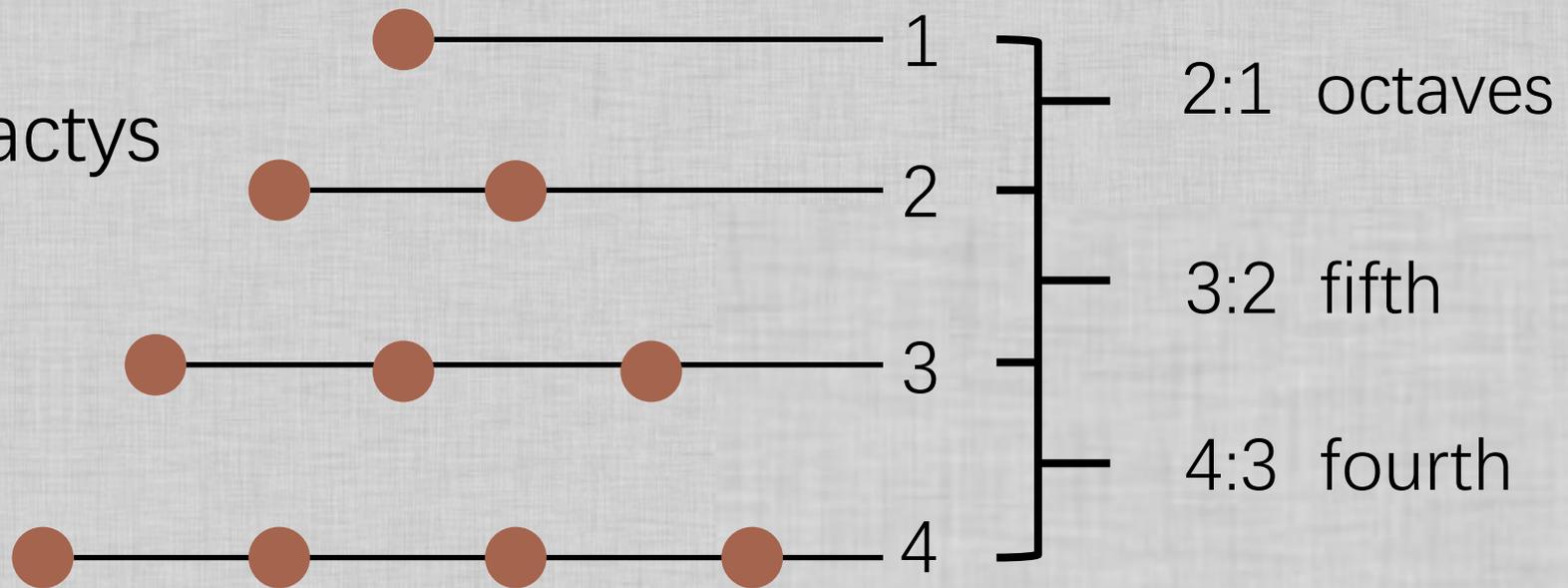
b

a

$$= \sqrt{a^2 + b^2}$$



tetractys



和漢洋十二音律對照表

風鍵	琴盤	白 鍵												黑 鍵	八 鍵
西音	洋名	C	♯C D	D	♯D E	E	F	♯F G	G	♯G A	A	♯A B	B		
唱音	歌名	ハ	嬰ハ 變ニ	=	嬰ニ 變ホ	ホ	〜	嬰〜 變ト	ト	嬰ト 變イ	イ	嬰イ 變ロ	ロ		
長階	音名	1		2		3	4		5		6			7	
短階	音名	6 •		7 •	1		2		3	4		5			
雅律	樂名	神 仙	上 無	壹 越	斷 金	平 調	勝 絕	下 無	双 調	鳧 鐘	黃 鐘	鸞 鐘	盤 涉		
俗律	樂名	四 本	五 本	六 本	七 本	八 本	九 本	十 本	十一本	十二本	十三本 一本	二 本	三 本		
古律	樂名	無 射	應 鐘	黃 鐘	大 呂	太 簇	夾 鐘	姑 洗	仲 呂	蕤 賓	林 鐘	夷 則	南 呂		
明律	樂名	夾 鐘	姑 洗	仲 呂	蕤 賓	林 鐘	夷 則	南 呂	無 射	應 鐘	黃 鐘	大 呂	太 簇		
明階	樂名	本書音符	乙七	上一		尺二		工三		凡四	合•六 五凡		四•五 六		
新階	樂名	四•五 六		乙七	上一		尺二		工三		凡四	合•六 五			

約翰·塞巴斯蒂安·巴哈

Johann Sebastian Bach



B a c h

$$2 + 1 + 3 + 9 = 14$$

皮耶·布萊茲

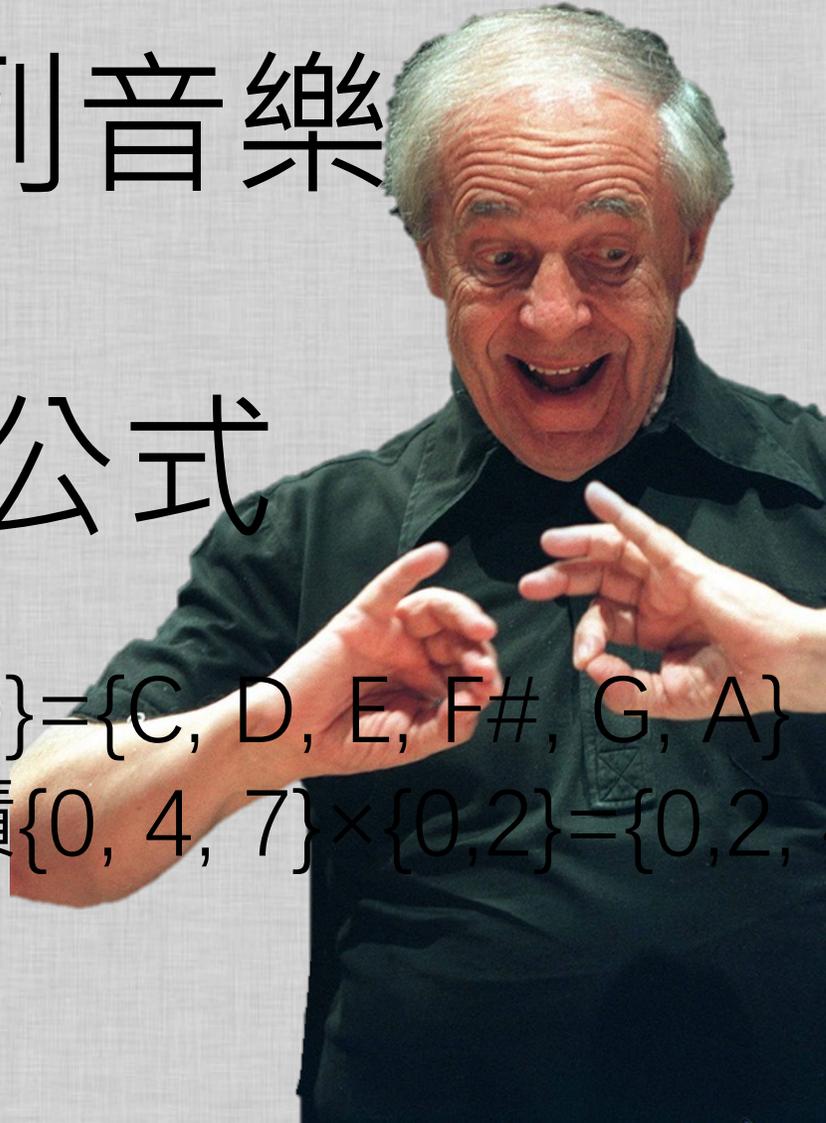
Pierre Louis Joseph Boulez

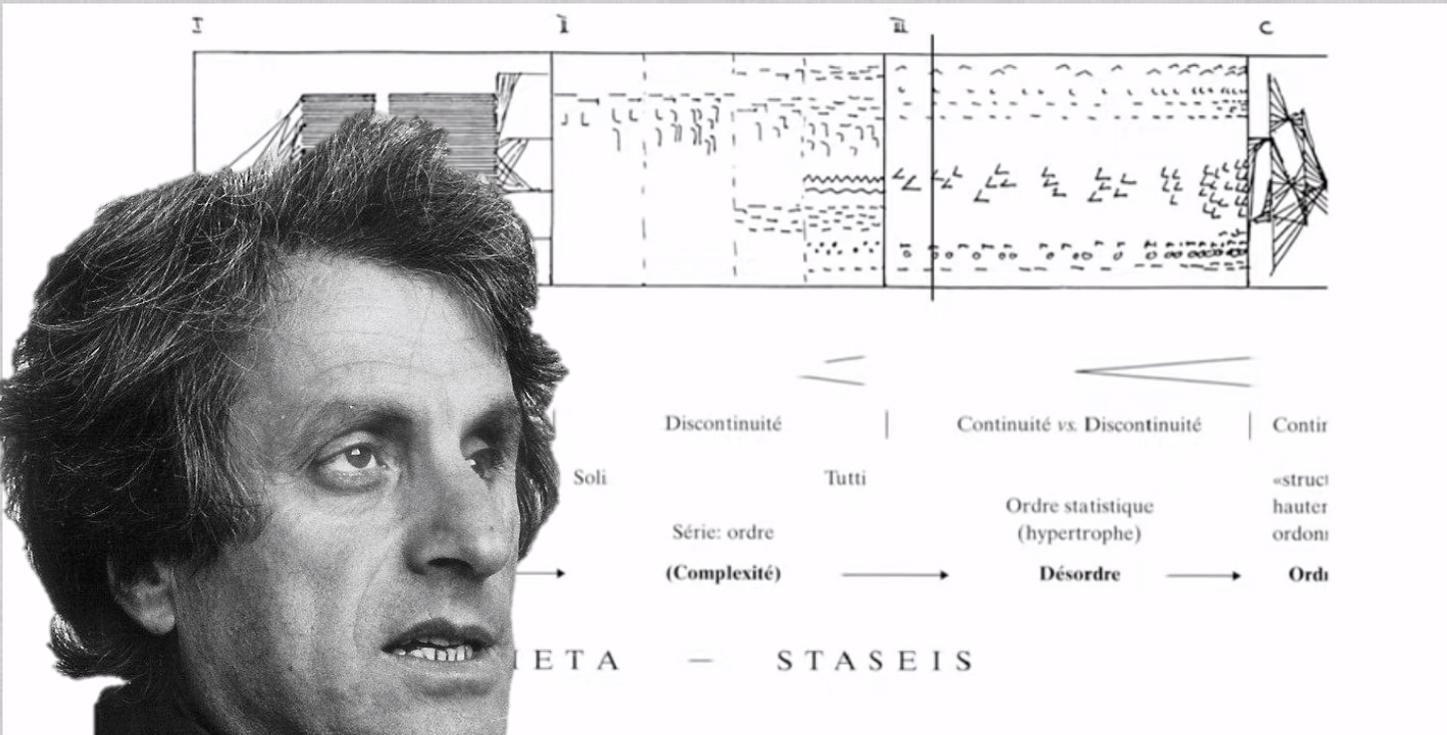
序列音樂

作曲公式

$$\{C, E, G\} \times \{C, D\} = \{C, D, E, F\#, G, A\}$$

對應笛卡爾積 $\{0, 4, 7\} \times \{0, 2\} = \{0, 2, 4, 6, 7, 9\}$





伊阿尼斯·澤納基斯

Ιάννης Ξενάκης

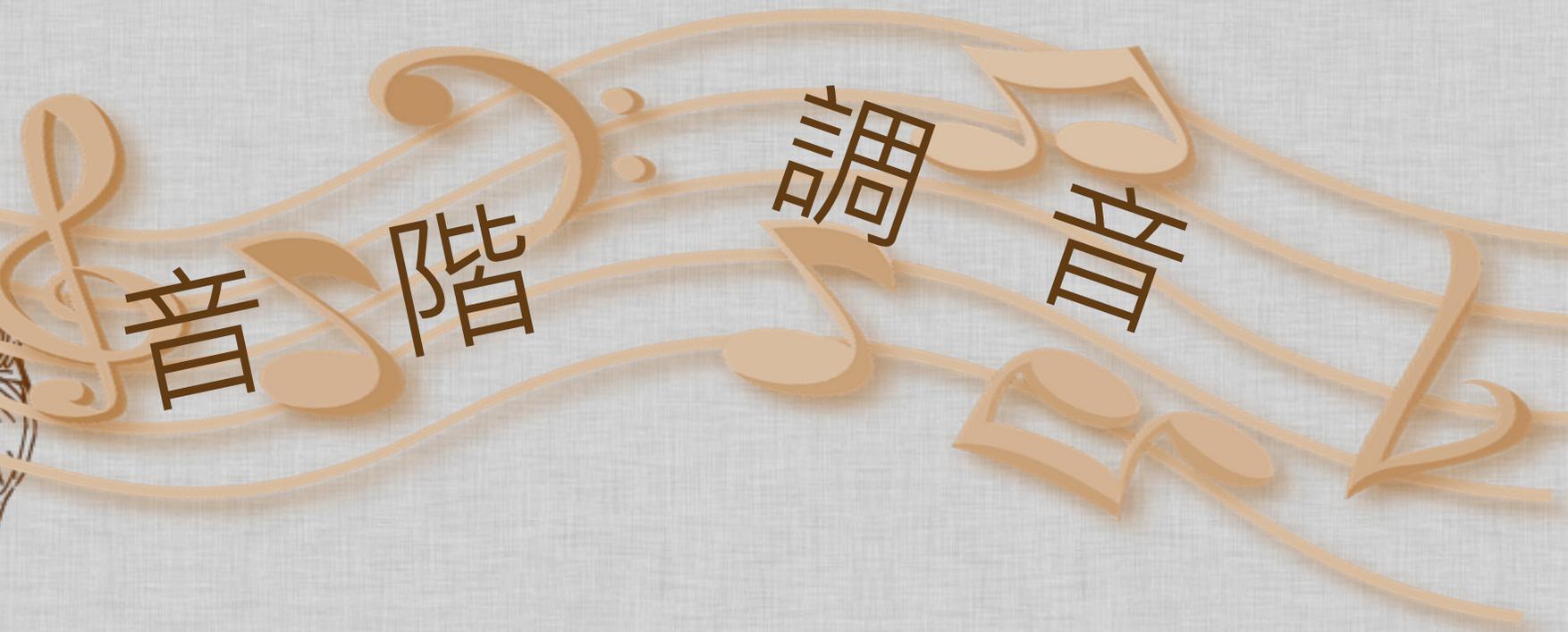


關於音樂界中數學...

WHAT MATH WE CAN LEARN FROM MUSIC



音階調音



♭: 畢氏音階

Definition

- 兩個不同音高的音所構成的音程，它們的頻率關係必然是3的N次方除以2的M次方或是2的N次方除以3的M次方，當中M和N皆為正整數。

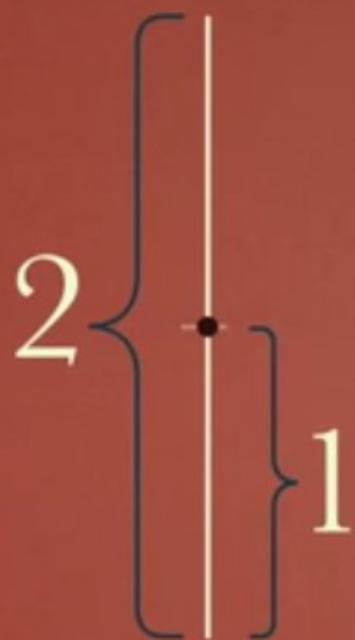


音階	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		Do	Do [#]	Re	Re [#]	Mi	Fa	Fa [#]	So	So [#]	La	La [#]	Si
低音	頻率	262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	464	494
	簡譜	1̇		2̇		3̇	4̇		5̇		6̇		7̇
中音	頻率	523	554	587	622	659	698	740	784	831	880	932	988
	簡譜	1		2		3	4		5		6		7
高音	頻率	1046	1109	1175	1245	1318	1397	1480	1568	1661	1760	1865	1976
	簡譜	1̇		2̇		3̇	4̇		5̇		6̇		7̇

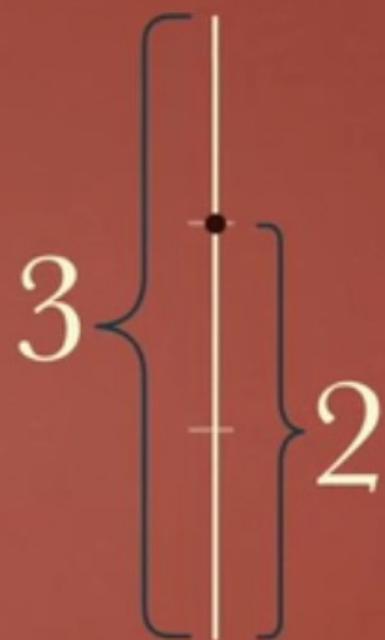
表 1 C 調音階-頻率對照表

相對於鋼琴的鍵盤，如圖 4 所示：

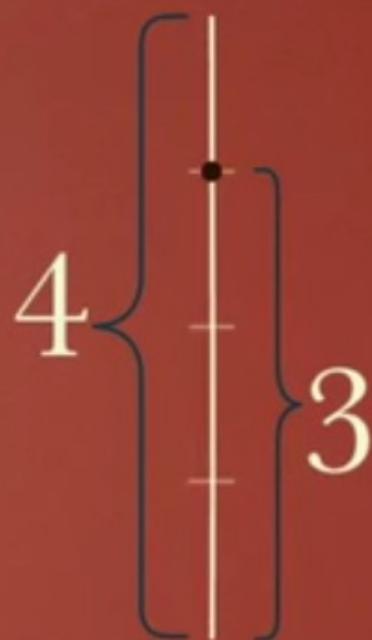




Octave
2:1



Fifth
3:2



Fourth
4:3

音階	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		Do	Do [#]	Re	Re [#]	Mi	Fa	Fa [#]	So	So [#]	La	La [#]	Si
低音	頻率	262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	464	494
	簡譜	1̇		2̇		3̇	4̇		5̇		6̇		7̇
中音	頻率	523	554	587	622	659	698	740	784	831	880	932	988
	簡譜	1		2		3	4		5		6		7
高音	頻率	1046	1109	1175	1245	1312	1397	1480	1568	1661	1760	1865	1976
	簡譜	1̇		2̇		3̇	4̇		5̇		6̇		7̇

表 1 C₄ 頻率對照表

相對於鋼琴的鍵盤，如圖 4 所示：



音階	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		Do	Do [#]	Re	Re [#]	Mi	Fa	Fa [#]	So	So [#]	La	La [#]	Si
低音	頻率	262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	464	494
	簡譜	1̇		2̇		3̇	4̇		5̇		6̇		7̇
中音	頻率	523	544	587	622	659	698	740	784	816	880	932	988
	簡譜	1		2		3	4		5		6		7
高音	頻率	1046	1109	1175	1245	1318	1397	1480	1568	1661	1760	1865	1976
	簡譜	1̇		2̇		3̇	4̇		5̇		6̇		7̇

表 1 C 調音階-頻率對照表

相對於鋼琴的 **880** 如圖 4 所示：

$$\frac{880}{587} = 1.499... \approx \frac{3}{2}$$

音階	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		Do	Do [#]	Re	Re [#]	Mi	Fa	Fa [#]	So	So [#]	La	La [#]	Si
低音	頻率	262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	464	494
	簡譜	1		2̇	3̇	4̇		5̇		6̇		7̇	
中音	頻率	523	554	587	622	659	698	740	784	833	880	932	988
	簡譜	1		2	3	4		5		6		7	
高音	頻率	1046	1109	1175	1245	1318	1397	1480	1568	1661	1760	1865	1976
	簡譜	i		2̇	3̇	4̇		5̇		6̇		7̇	

表 1 C 調音階-頻率對照表

相對於鋼琴的鍵盤，如圖 4 所示：



♭: 畢氏音階歷史

- 傳說畢氏某天經過一間打鐵舖，聽到打鐵聲竟然相當悅耳，便好奇心大發，當場做起研究。由於他聰明絕頂，很快發現了其中的奧秘。原來四名鐵匠所用的鎚子，重量分別是6, 8, 9, 12(斤)——簡單整數比 於是他趕緊衝回家，改用琴弦來做實驗，很快就歸納出類似的規律：只要兩條琴弦的長度成簡單整數比，例如： $4:3$, $3:2$, $2:1$ ，發出的聲音就會和諧悅耳。用現代術語來說，這三組音程分別是完全四度(相差5個半音)、完全五度(相差7個半音)以及完全八度(相差12個半音)。



♭: 十二平均律(主流的律式)

Definition

- 將一個八度平均分成十二等份，每等分稱為半音。八度音的頻率分為十二等分，即是分為十二項的等比數列，也就是每個音的頻率為前一個音的2的12次方根 $^{12}\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{12}} = 1.059 \dots$



音階	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		Do	Do [#]	Re	Re [#]	Mi	Fa	Fa [#]	So	So [#]	La	La [#]	Si
低音	頻率	262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	464	494
	簡譜	1̇		2̇		3̇	4̇		5̇		6̇		7̇
中音	頻率	523	554	587	622	659	698	740	784	831	880	932	988
	簡譜	1		2		3	4		5		6		7
高音	頻率	1046	1109	1175	1245	1318	1397	1480	1568	1661	1760	1865	1976
	簡譜	1̇		2̇		3̇	4̇		5̇		6̇		7̇

表 1 C 調音階-頻率對照表

相對於鋼琴的鍵盤，如圖 4 所示：



♭: 十二平均律歷史

- 現代的鋼琴也是以十二平均律來調律定音的。巴赫的《平均律鍵盤曲集》更是完美地詮釋了平均律的優越性和轉調的完美，被譽為鋼琴文獻的舊約聖經。其實十二平均律的確立最早是來自中國，很可能是通過東西文化的交流傳到了西方，被西方稱之為中國的第五大發明。



♭: 十二平均律歷史

- 在歷史文獻中，最早詳細記錄求律方法的是春秋時期的《管子》，管仲（管子）為齊桓公「九合諸侯，一匡天下」，而且精通音樂。他所記載的求律方法稱為「三分損益法」，根據「三分損益法」得來的十二律就是「三分損益法十二律」。而西方最早使用類似方法求律的是希臘的數學家畢達哥拉斯，比管仲晚了一百四十多年。



中國音名	三分損益	西方音名	十二平均律	三分損益與十二平均律之偏差 (%)
黃鐘	81	C	81	-
林鐘	54	G	54.0610	0.11
太簇	72	D	72.1628	0.23
南呂	48	A	48.1629	0.34
姑洗	64	E	64.2898	0.45
應鐘	42.6667	B	42.9083	0.56
蕤賓	56.8889	F#	57.2757	0.68
大呂	75.8519	C#	76.4538	0.79
夷則	50.5679	G#	51.0268	0.90
夾鐘	67.4239	D#	68.1126	1.01
無射	44.9492	A#	45.4597	1.12
仲呂	59.9323	F	60.6814	1.23

♭: 音階中的費氏數列



- 八個是白鍵，五個是黑鍵。
- 第三和第五音符創建了基本和弦的基礎
- 主音是第五個音符，它也是組成八度音階的所有13個音符的第八個音符。

♭: 音階中的費氏數列



- 八個音13個音符→ $8/13=0.61538\dots$ 近似黃金比例
- 3、5、8、13接氏費是數列

♭: 費波那契數列與音樂

音樂是以八度音階為基礎。在鋼琴中，是由八個白鍵及五個黑鍵，總共**13**個鍵來代表。像大六度的E音與C音，震動頻率比為**0.25**倍，偏離真正的黃金比率僅**0.006966**。



費波那契數的強大



斯特拉迪瓦里小提琴

薩克斯管吹嘴



揚聲器的線



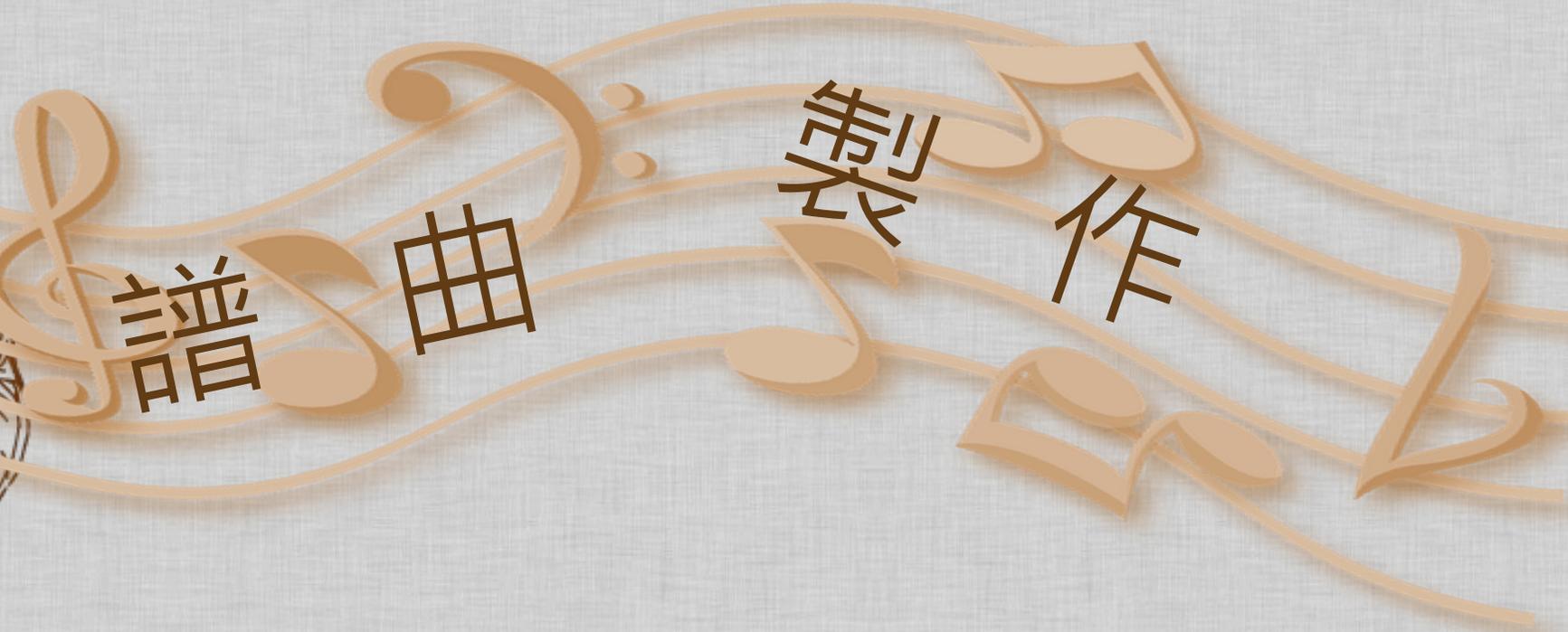


譜

曲

製

作



音符

長度	音符	休止符
1	全音符 	全休止符 
1/2	2 分音符 	2 分休止符 
1/4	4 分音符 	4 分休止符 
1/8	8 分音符 	8 分休止符 
1/16	16 分音符 	16 分休止符 
1/32	32 分音符 	32 分休止符 

音符

$$o \cdot = o + \text{♪}$$

$$\text{♪} \cdot = \text{♪} + \text{♩}$$

$$\text{♩} \cdot = \text{♩} + \text{♪♪}$$

$$\text{♪♪} \cdot = \text{♪♪} + \text{♩♪}$$

$$\text{■} \cdot = \text{■} + \text{■}$$

$$\text{■} \cdot = \text{■} + \text{♪}$$

$$\text{♪} \cdot = \text{♪} + \text{♩}$$

$$\text{♩} \cdot = \text{♩} + \text{♪♪}$$

譜曲創作

- 貝多芬的音樂生涯中大部分都是聾的!!!
- 開頭從一連串綿長的三連音開始，將相同音型的D大調三和弦（D、F #、A）拉出來檢視，從上列數學程式中可以得出三顆音符的正弦波，其組合出來的動聽和弦稱為「協和音程」。

Adagio sostenuto

sempre *pp* e senza sordini



$$y(t) = \sin(2\pi f t)$$

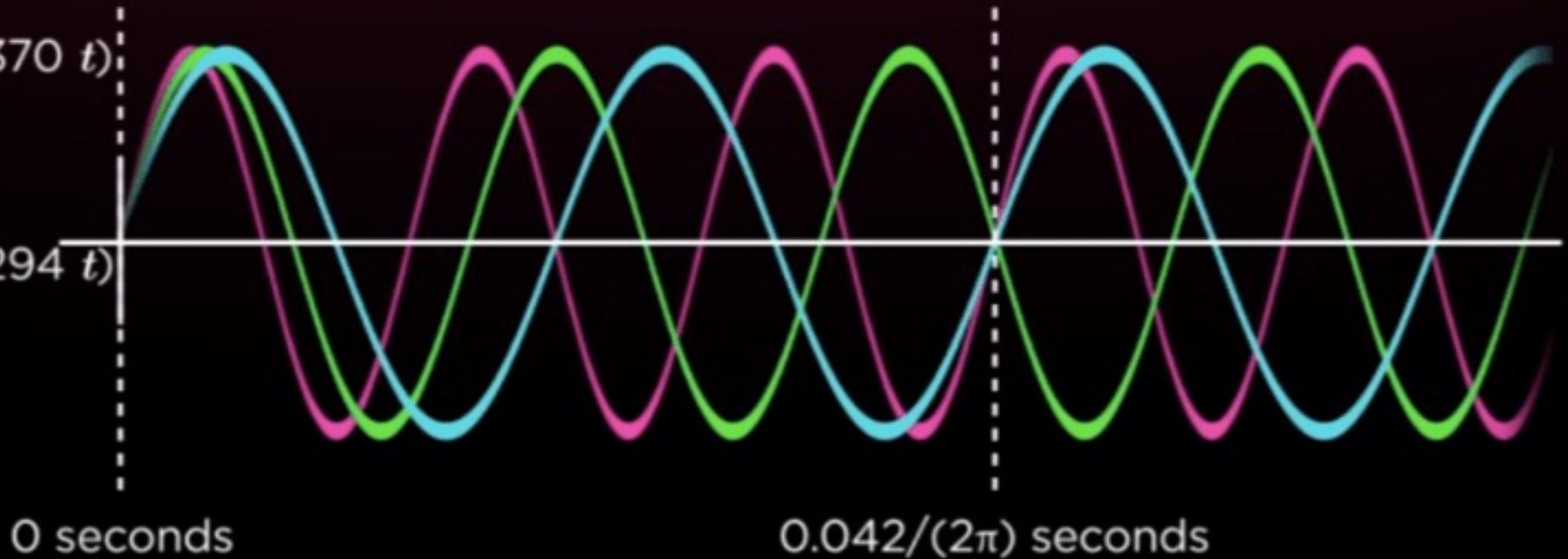
f = frequency (in Hz)

t = time (in seconds)

A_4 $f = 440$ Hz
 $y(t) = \sin(2\pi 440 t)$

$F\#_4$ $f \approx 370$ Hz
 $y(t) = \sin(2\pi 370 t)$

D_4 $f \approx 294$ Hz
 $y(t) = \sin(2\pi 294 t)$



Consonance

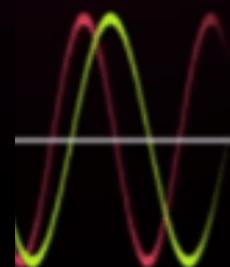


Dissonance



0 seconds

$0.042/(2\pi)$ seconds



主歌比例(根據53屆科展統計)

2008音樂風雲榜榜單前10名

編號	歌名	歌手	至副歌秒數	全部(一次)秒數	比值	是否符合黃金分割
1	沒有如果	梁靜茹	01:35	02:34	0.617	0
2	王妃	蕭敬騰	01:01	01:40	0.610	0
3	心牆	郭靜	01:00	01:36	0.625	0
4	壞人	方炯鑌	01:26	02:22	0.606	0
5	情歌	梁靜茹	01:11	01:45	0.617	0
6	妥協	蔡依林	01:06	01:47	0.617	0
7	如果我變成回憶	Tank	01:36	02:36	0.613	0
8	搞笑	羅志祥	01:11	01:58	0.602	0
9	別再為他流淚	梁靜茹	00:52	01:24	0.619	0
10	我愛他	叮噹	01:20	02:09	0.620	0

2009音樂風雲榜榜單前10名

編號	歌名	歌手	至副歌秒數	全部(一次)秒數	比值	是否符合黃金分割
1	說好的幸福呢	周杰倫	01:12	01:56	0.621	0
2	下一個天亮	郭靜	01:08	01:51	0.613	0
3	下雨天	南拳媽媽	01:00	01:37	0.619	0
4	終於說出口	小宇	01:01	01:39	0.614	0
5	擦肩而過	李聖傑	01:08	01:54	0.618	0
6	為你寫詩	吳克群	01:11	01:50	0.623	0
7	稻香	周杰倫	00:49	01:21	0.605	0
8	原諒我	蕭敬騰	00:54	01:30	0.600	0
9	會呼吸的痛	梁靜茹	01:06	01:46	0.623	0
10	我不配	周杰倫	01:24	02:17	0.613	0

2010、11音樂風雲榜榜單前10名

編號	歌名	歌手	至副歌秒數	全部(一次)秒數	比值	是否符合黃金分割
1	洋葱	丁噹	00:59	01:33	0.634	0
2	沒關係	吳克羣	00:41	01:12	0.569	0
3	我們沒有在一起	劉若英	00:54	01:30	0.600	0
4	我是一隻小小鳥	丁噹	00:57	01:51	0.514	X
5	沒那麼簡單	黃小琥	01:26	02:09	0.666	0
6	天后	陳勢安	00:53	01:21	0.654	0
7	指望	郁可唯	00:30	00:58	0.517	X
8	好的事情	顏爵	00:52	01:21	0.642	0
9	那些年	胡夏	00:44	01:08	0.647	0
10	末班車	蕭煌奇	00:41	01:07	0.612	0

100%

100%

80%

主歌比例(根據53屆科展統計)

校園名歌

編號	歌名	歌手	至副歌秒數	全部(一次)秒數	比值	是否符合 黃金分割
1	外婆的澎湖灣	潘安邦	00:43	01:10	0.614	0
2	拜訪春天	施孝榮	00:16	00:31	0.516	X
3	秋蟬	楊芳儀/徐曉菁	00:48	01:19	0.608	0
4	捉泥鰍	包美聖	00:19	00:30	0.633	0
5	龍的傳人	李建復	01:21	01:37	0.835	X
6	讓我們看雲去	陳明韶	00:24	00:39	0.615	0
7	如果	合唱	00:24	00:41	0.585	0
8	浮雲遊子	陳明韶	00:28	00:45	0.622	0

75%

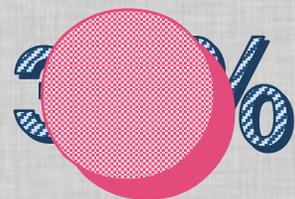
西洋經典

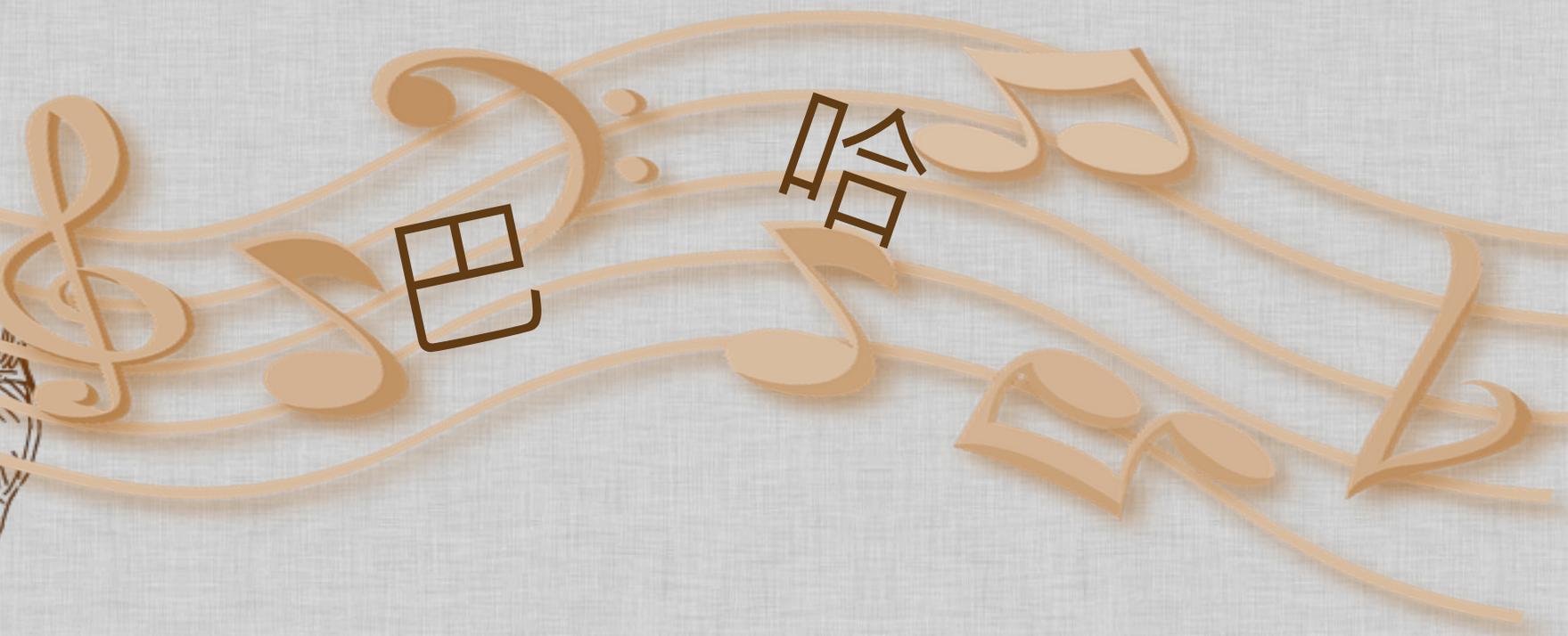
編號	歌名	到副歌秒數	全部(一次)秒數	比值	是否符合 黃金分割
1	I Will Always Love You	00:43	01:10	0.614	0
2	Somewhere In Time	00:56	01:20	0.700	X
3	The Rose	02:08	02:49	0.757	X
4	Unchained Melody	01:03	01:46	0.594	0
5	My Heart Will Go On	00:58	01:35	0.611	0
6	Somewhere Out There	01:51	02:43	0.681	X
7	Edelweiss	00:43	01:10	0.614	0
8	Today	00:55	01:24	0.655	0
9	Take me home country road	00:33	00:54	0.611	0
10	All I ask of you(歌劇魅影)	00:37	01:00	0.617	0

70%

主歌比例(自行統計)

排名	歌曲	歌手	主歌長度	第一次結束	比值	符合分割
1	愛情你比我想的閣較偉大	茄子蛋	01:53	02:05	0.816	X
2	在這座城市遺失了你	告五人	01:53	02:29	0.677852	X
3	我很好騙	動力火車	01:53	01:58	0.533898	X
4	四季予你	程響	01:53	01:41	0.722772	X
5	阿拉斯加海灣	蔡恩雨	01:53	01:26	0.616279	○
6	因為你 所以我	五月天	01:20	01:47	0.747664	X
7	白月光與朱砂痣	大籽	01:06	01:28	0.75	X
8	失重前幸福	艾薇	00:59	01:28	0.670455	X
9	如果能幸福	周興哲	01:29	02:22	0.626761	○
10	星辰大海	黃霄雲	00:46	01:11	0.647887	○







螃蟹卡農

A musical score for the piece 'Crab Canon' (螃蟹卡農). The score is written in G major and 3/4 time, consisting of two systems of two staves each. The first system features a melody in the upper staff and a bass line in the lower staff. The second system continues the piece with a more complex bass line. Two red crab illustrations are placed on the score: one on the upper staff of the first system and one on the lower staff of the second system.

倒
轉



Canon Trias Harmonica a 8 BWV 1072



對
稱

延
一
拍





Goldberg Canons

1. Canon Simplex (Simple Canon)



對

稱



3. Both previous Canons simultaneously
the subject followed by it's inversion



延後四拍



5. Double Canon in 4 parts

The image displays a musical score for a four-part double canon. It consists of four staves, each in a different clef: the top staff is in bass clef, the second and third staves are in alto clef, and the bottom staff is in bass clef. The key signature is one sharp (F#) and the time signature is 2/4. A vertical red line is drawn through the score, marking a specific point in time. The notation includes various rhythmic values such as eighth and sixteenth notes, and rests. The score is presented on a yellow background.

對稱 延後四拍



inverted

inverted

up a 2nd

對稱 延後一拍 升調 加速



7. The same. In 3 parts.

The image displays a musical score for three parts in 2/4 time, key of D major. The score is divided into two systems by a vertical red line. The first system contains the first two staves, and the second system contains the third staff. The first staff is in bass clef with a treble clef sign above it, and the second staff is also in bass clef with a treble clef sign above it. The third staff is in bass clef. The music consists of eighth and sixteenth notes, with some slurs and accents. A red vertical line is positioned between the first and second systems.

9. Canon in Unison after the 16th note in 3 parts.

The image displays a musical score for a canon in unison, consisting of two staves. The top staff is in treble clef with a key signature of one sharp (F#) and a time signature of 2/4. It contains a complex melodic line with many beamed notes. A red dot is placed on the 16th note of this line, and a white dot is placed on the 17th note. The bottom staff is in bass clef with the same key signature and time signature. It contains a simpler melodic line. A blue vertical bar is placed on the first note of the bottom staff, which is the 16th note of the top staff. This indicates that the bottom part begins its entry at the 16th note of the top part's melody.

對稱 延後一個16分音符

12. Double Canon over the said fundamental notes.
(in five parts)

The image displays a musical score for a double canon exercise in five parts. It consists of five staves. The bottom staff is a bass clef with a common time signature (C) and contains a sequence of eight notes: C2, D2, E2, F2, G2, A2, B2, and C3. Each note is circled in red. Above this staff are four staves, each with a red box containing a melodic line. The first two boxes are labeled 'inverted' in red text. The first box contains a line of notes: C4, D4, E4, F4, G4, A4, B4, and C5. The second box contains the inverted line: C5, B4, A4, G4, F4, E4, D4, and C4. The third box contains a line of notes: C4, D4, E4, F4, G4, A4, B4, and C5. The fourth box contains the inverted line: C5, B4, A4, G4, F4, E4, D4, and C4. The entire score is set against a light yellow background.

Scretto

12. Double Canon over the said fundamental notes.
(in five parts)

The image displays a musical score for a double canon in five parts. The score is written on five staves, all in the key of D major (one sharp) and common time (C). The first four staves are in alto clef (C3), and the fifth staff is in bass clef (C2). A vertical red line is drawn through the score, indicating a specific point in time. The music consists of complex rhythmic patterns, including sixteenth and thirty-second notes, and rests. The first staff begins with a dynamic marking of *sf*. The score is divided into two main sections by a double bar line, with the red line positioned in the second section.

13. Triple Canon in 6 parts

A musical score for a six-part triple canon. The score consists of six staves, each with a treble clef and a key signature of one sharp (F#). The music is written in a 3/4 time signature. A vertical red line is drawn through the score, highlighting a specific measure across all six parts. The notation includes various rhythmic values such as quarter notes, eighth notes, and sixteenth notes, along with repeat signs and fermatas.

對稱 延後四派



14. Canon in 4 parts. by Augmentation and Diminution

The image displays a musical score for a four-part canon. It consists of four staves, each representing a different voice part. The music is written in a key signature of one sharp (F#) and a 2/4 time signature. The notation includes various rhythmic values such as eighth and sixteenth notes, as well as rests. The score is organized into measures, with repeat signs and bar lines indicating the structure of the piece. The overall style is that of a classical musical manuscript.

對稱 擷取

14. Canon in 4 parts. by Augmentation and Diminution

Normal Speed →  Musical notation for the first staff, showing a canon in 4 parts at normal speed. The key signature is one sharp (F#) and the time signature is 2/4. The notation includes a treble clef, a key signature of one sharp, and a time signature of 2/4. The music consists of four staves of music, each starting with a different rhythmic pattern.

2x Slower →  Musical notation for the second staff, showing the canon in 4 parts at 2x slower. The key signature is one sharp (F#) and the time signature is 2/4. The notation includes a bass clef, a key signature of one sharp, and a time signature of 2/4. The music consists of four staves of music, each starting with a different rhythmic pattern.

4x Slower →  Musical notation for the third staff, showing the canon in 4 parts at 4x slower. The key signature is one sharp (F#) and the time signature is 2/4. The notation includes a treble clef, a key signature of one sharp, and a time signature of 2/4. The music consists of four staves of music, each starting with a different rhythmic pattern.

8x Slower →  Musical notation for the fourth staff, showing the canon in 4 parts at 8x slower. The key signature is one sharp (F#) and the time signature is 2/4. The notation includes a bass clef, a key signature of one sharp, and a time signature of 2/4. The music consists of four staves of music, each starting with a different rhythmic pattern.

降速



巴哈樂曲中的數學公式

$$g(t) = Af(t - c) + B$$

其中 $f(t)$ 為原本的音樂函數

A, B, c 為實數

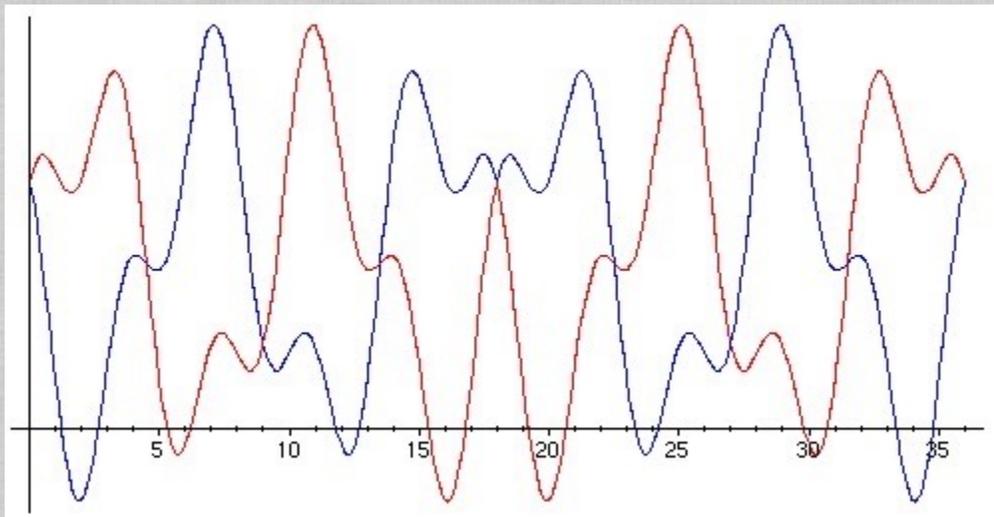
A : 波的幅度

B : 波的高低

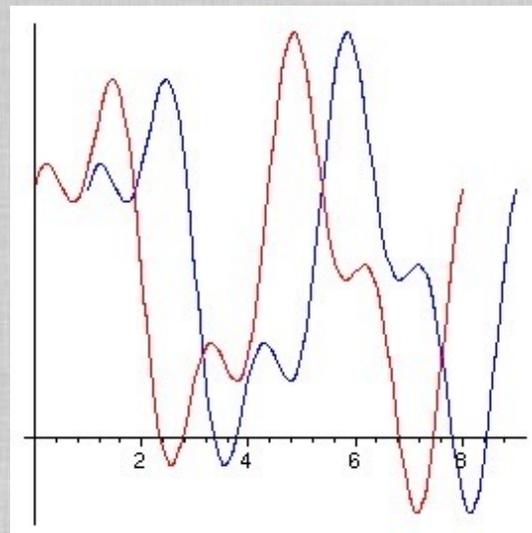
c : 快/慢幾拍

t : 時間函數

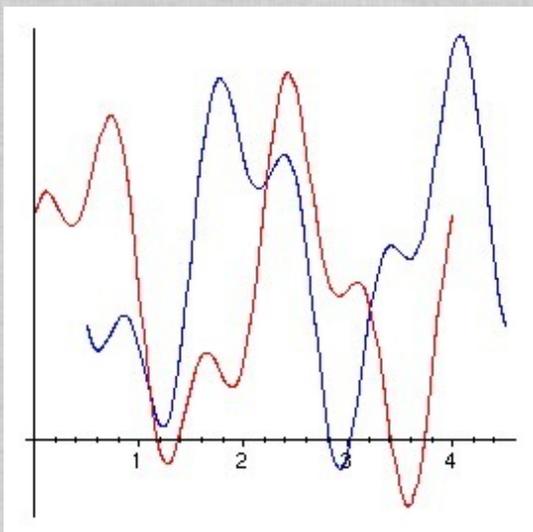




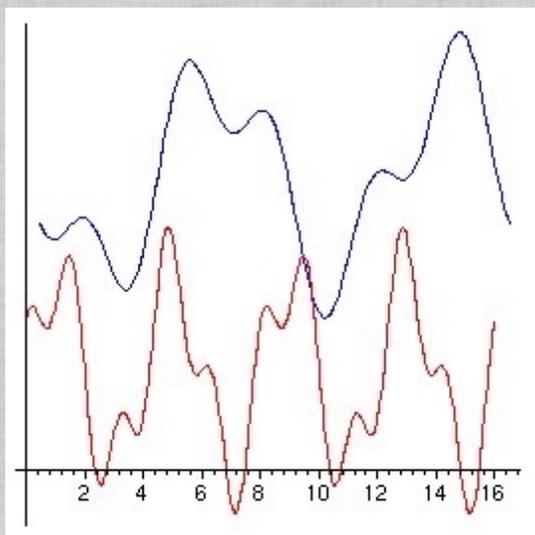
$$g(t) = f(18 - t)$$



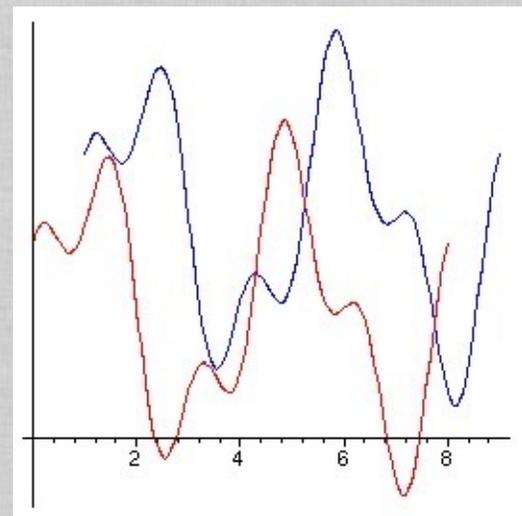
$$g(t) = f(t - 1)$$



$$g(t) = -f(t - 0.5) + K$$



$$g(t) = -f\left(\frac{t - 0.5}{2}\right) + L$$



$$g(t) = f(t - 1) + H$$



C大調二部創意曲

C大調二部創意曲

No.1

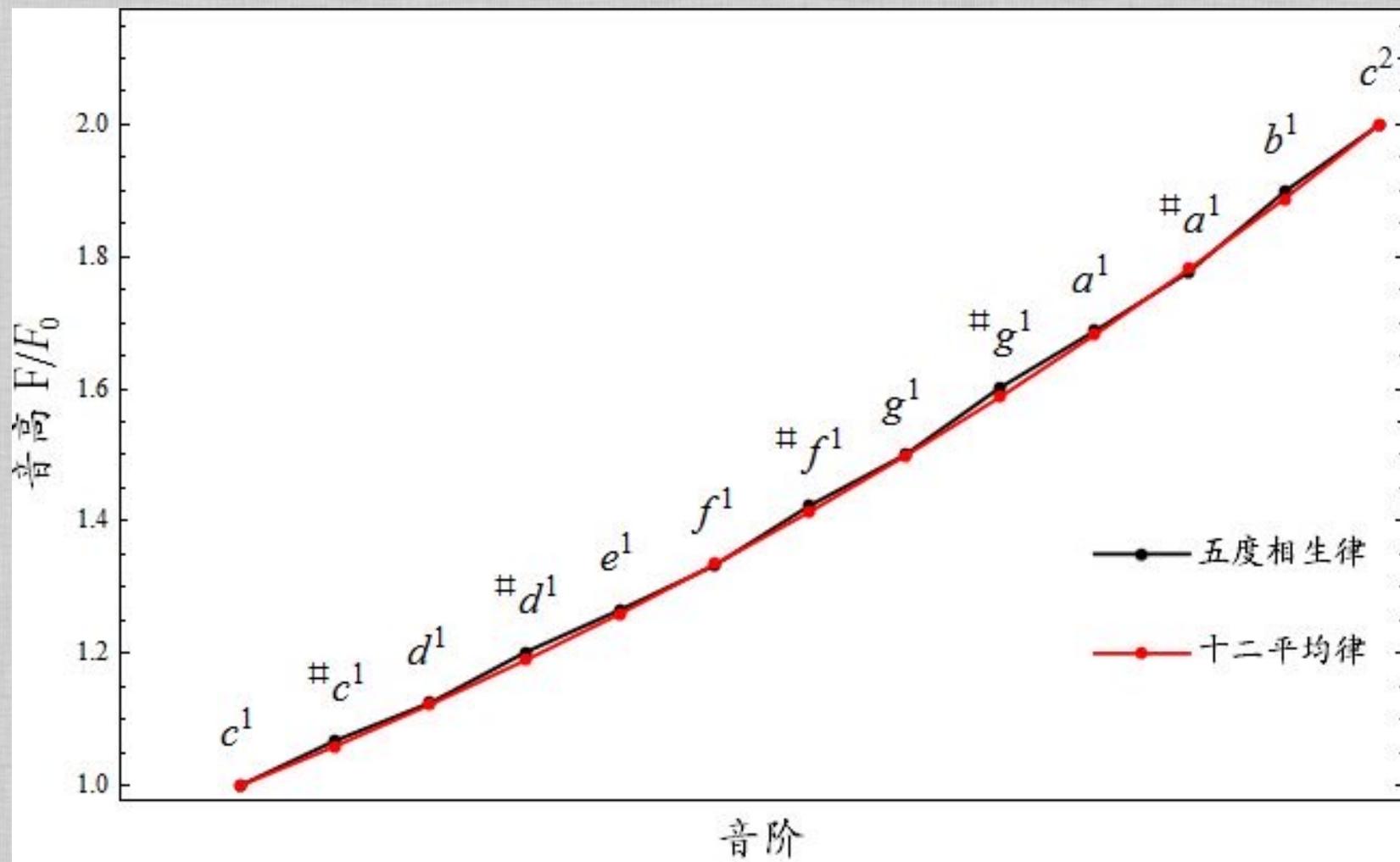
J.S.巴 赫

The musical score is presented in five systems, each with a treble and bass clef staff. The first system is marked *Allegro* and *mf*. The second system is marked *legato*. The third system includes a *f* dynamic marking. The fourth system is marked *p* and includes the instruction "1 注意" (Attention 1). The fifth system includes the instruction "cre" (crescendo) and "scen" (decrescendo). The score contains various musical notations such as slurs, accents, and dynamic markings.

注意：最初可先分別彈奏注有數字的小段



平均律鍵盤曲集





參考文獻

REFERENCES



參 考 網 址



- Mathematicians and Music:

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Archibald_music_1/

- 赫爾曼·京特·格拉斯曼:

<https://zh.wikipedia.org/zhtw/%E8%B5%AB%E7%88%BE%E6%9B%BC%C2%B7%E6%A0%BC%E6%8B%89%E6%96%AF%E6%9B%BC>

- 外代數:

<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%A4%96%E4%BB%A3%E6%95%B0>

- 奧古斯塔斯·德摩根:

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%A5%A7%E5%8F%A4%E6%96%AF%E5%A1%94%E6%96%AF%C2%B7%E5%BE%B7%E6%91%A9%E6%A0%B9>

- Short History of the Relation Between Mathematics and Music:

https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-42937-3_2?noAccess=true

- Mathematics and Music:

<https://www.simplifyingtheory.com/math-in-music/>

- 音樂中的中國古代數學之美:

<https://ppfocus.com/0/cua436cdb.html>

- 十二律:

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%81%E4%BA%8C%E5%BE%8B>

- 巴赫作曲的秘密竟與數學有關？

<https://kknews.cc/zh-tw/news/v2l3zn2.html>

- 約翰·塞巴斯蒂安·巴哈:

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%BA%A6%E7%BF%B0%C2%B7%E5%A1%9E%E5%B7%B4%E6%96%AF%E8%92%82%E5%AE%89%C2%B7%E5%B7%B4%E8%B5%AB>

- 皮耶·布列茲:

<https://zh.wikipedia.org/zhtw/%E7%9A%AE%E5%9F%83%E5%B0%94%C2%B7%E5%B8%83%E8%8E%B1%E5%85%B9>

- 法國作曲家布列茲去世：他改變了整個音樂界的生態環境:

https://m.thepaper.cn/newsDetail_forward_1417793

- 序列主義:

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BA%8F%E5%88%97%E4%B8%BB%E4%B9%89>

- 古典音樂與數學:

<https://read.muzikair.com/us/articles/8e212f14-de1c-424c-82dd-61527e4533d2>

- 伊阿尼斯·澤納基斯:

<https://zh.wikipedia.org/zhtw/%E4%BC%8A%E9%98%BF%E5%B0%BC%E6%96%AF%C2%B7%E6%B3%BD%E7%BA%B3%E5%9F%BA%E6%96%AF>

- 畢氏音程:

<https://zh.wikipedia.org/zhtw/%E7%95%A2%E6%B0%8F%E9%9F%B3%E7%A8%8B>

- Ancient Math & Music:

<https://www.pbslearningmedia.org/resource/nvmm-math-mathmusic/ancient-math-music/>

- 畢氏音階:

<https://elarinet900.pixnet.net/blog/post/39214465>

- 弦樂泛音到底怎麼回事兒

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/59274917>

- 原來莫扎特的音樂秘訣在這裡——神奇的斐波那契數列

<https://kknews.cc/news/q6pmoy8.html>

- 貝多芬其實是數學天才？音樂與數學的巧妙關係

<https://dq.yam.com/post/8854>

- Music and Math. The Genius of Beethoven.

<https://www.youtube.com/watch?v=M51Bm9sNazM>

- ResearchGate-What relation exists between mathematics and music?

https://www.researchgate.net/post/What_relation_exists_between_mathematics_and_music

- 圓周率之歌：用音樂呈現數學之美

<https://www.youtube.com/watch?v=kV1t9b0D4To>

- 巴赫音樂中的數學性是怎麼體現的？

<https://www.getit01.com/p20180131839791973/>



影 音 寶 料



- 圓周率之歌

- 螃蟹卡農

- BWV1072

- BWV1087

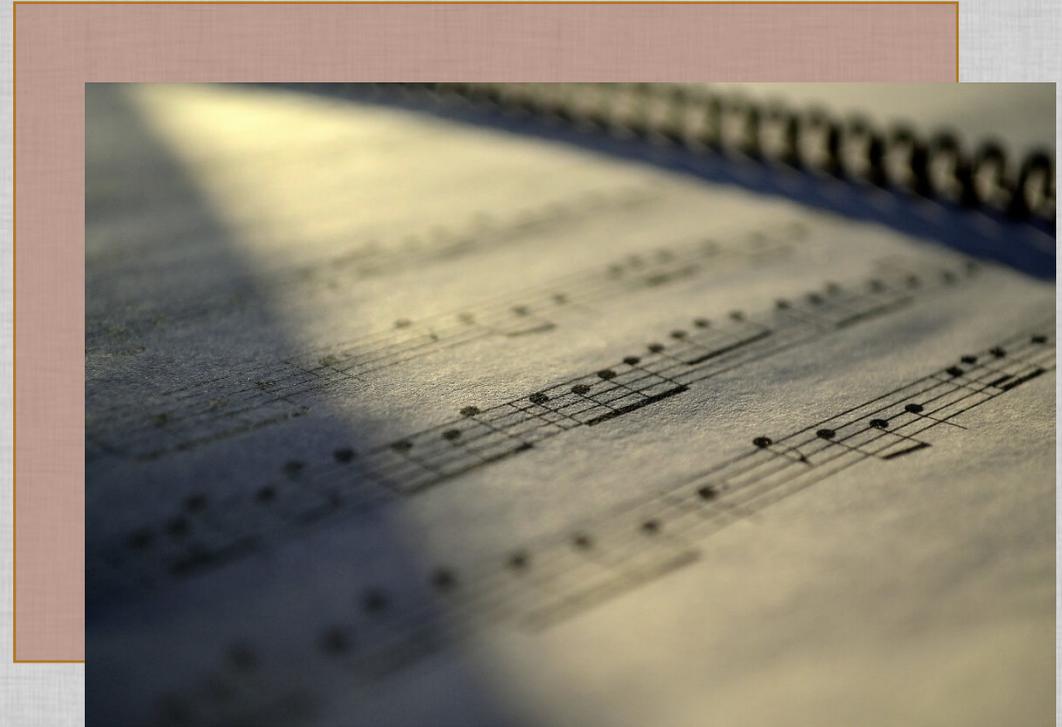
- 貓咪樂譜

- gerubach

- 十二平均律 C大調前奏曲



Art is an act of giving an aesthetic form to these elements. Art in math is to form thoughts to solve problems.



數學解題方法期末報告
第七組
《音數小子》

組員

411031108 魏碩廷
411031119 陳柏諺
411031137 游智宇
411031139 張天傑
411031216 許仲勛

本次報告聊解了音樂中的數學美
音樂無所不在，美就在身邊
那數學就跟空氣跟細菌一樣
遍佈在我們的四周
或許有一天

作詞曲方式不再是音樂人哼著哼著就出來了
有可能是對著電腦輸入感受等一下就出來了
或許電腦更注重旋律間的美
更注重詞的聲調是否會符合旋律
這一切都是在運用音樂中的數學

