我很好騙—什麼是真理？

第八組

組員：

411031102戴世勳

411031103潘柏銓

411031107林亮辰

411031113黃俊穎

411031123李柔樺

第八組

目錄

摘要 2

壹、研究動機 2

貳、研究目的 2

參、研究方法 2

一、什麼是悖論？ 2

(一)定義 2

(二)解釋 3

(三)悖論 v.s 謬誤 3

(四)分類 4

(五)數學危機 6

二、悖論介紹 6

(一) 哥德爾不完備定理 6

(二) 羅素悖論 7

(三) 睡美人悖論 8

(四) 旅館悖論 8

(五) 雙面真理說 8

(六) 半費之訟 8

(七) 意外絞刑悖論 9

(八) 潘洛斯悖論 10

肆、討論 10

伍、結論 11

陸、其他 11

柒、參考資料 11

摘要

悖論這個詞，在國文中有兩個字，是一個名詞，注音為ㄅㄟˋ ㄌㄨㄣˋ，一個大家也不知道在幹嘛的詞。而在希臘語中含有「奇怪的」意義，也確實如他字根所述般，悖論大多數時候是一種奇怪的敘述，一個違反直覺的證明，或是一個未預料到的結果，不過這些悖論卻能帶出許多有趣的想法，也能指出觀念中的錯誤，因此了解悖論的精巧之處就更能去體會出原本想法優缺與疏漏。

本次報告將會以介紹數種悖論為主軸，望能帶給大家更多與悖論有關的知識。

壹、 研究動機

不久前在微積分課本中看到芝諾悖論(Zeno's paradoxes)，覺得非常的有趣——一個人如果走到牆的距離的一半，再走上次距離走的一半，以此類推，那麼這個人永遠不會到達牆的那邊。但這又與我們所知的概念不合，因為人一定可以走到牆的那邊，所以產生了矛盾，形成了悖論。

這讓我們不禁思考，數學界中還有多少悖論呢？因為如此，我們蒐集了許多悖論的資料，將會在以下報告中呈現。

貳、 研究目的

透過理解各種悖論的故事背景即操作原理，再加以利用數學邏輯原理、機率運算、空間概念證實所有合理與不合理之悖論，尋求在數學原理下的悖論，並尋求所有悖論的最主要的根本真理，找出問題所在並加強我們的邏輯推算。

除了能讓我們對悖論有更加熟悉的認識，還能加強對生活中許多難以理解的邏輯問題處理。

參、 研究方法

一、什麼是悖論？

(一)定義

斯坦福哲學百科全書「悖論」條目認為，所謂「悖論」通常是指一種命題，聲稱某項內容超出（甚至反對）「通常的見解」。拋開悖論的各種含義，通常所說的導致矛盾的悖論，應當滿足如下條件：

1. 有一個命題 A，稱為悖論命題。
2. 有一個邏輯系統 L，稱為相關系統。
3. 有一組命題 E, 稱為背景命題。背景命題都是相關系統中的真命題。
   相關系統被簡化為背景命題，背景命題成為悖論證明的依據。
4. 相關系統存在兩個證明可以獲得悖論命題 A 的真值，其中一個證明 A 為真，而另一個證明 A 為假，從而出現矛盾。

因此，要判斷一個悖論是否為真的邏輯悖論，就要確定要素 A、L 和 E，特別是要確認 E 中的命題都是真命題，而且所給出的兩個證明都是正確合規的證明。如果 E 中的命題不真，或者所給出的證明是錯的，則這不是一個邏輯悖論，而是一個邏輯錯誤。許多邏輯悖論最終都可以歸結為一個命題 A⇔¬A，稱為悖論情形（paradox situation），是進一步推出矛盾的依據。根據悖論情形，可以有證明 1：假設 A 為真，可以推出 A 為假，矛盾，因此 A 為假。但同時也可以有證明 2：假設 A 為假，可以推出 A 為真，矛盾，因此 A 為真。證明 1 和證明 2 都是正確合規的證明。因此問題就是，A⇔¬A 在相關系統中是不是一個真命題。如果是真命題，悖論成立，是相關系統有問題，需要改進。而且改進相關系統以消除悖論的思路也就在於如何避免這一悖論情形。如果不是真命題，那就不能由它推出矛盾，則該悖論實際上就是一個邏輯錯誤：把一個假命題當作了真命題，並用它進行推理。

背景命題是根據悖論的描述歸納出來的，比較原始並接近悖論的描述。悖論情形是根據背景命題推理而得到的，進一步就可直接推出矛盾。因此，只有當所有背景命題中的命題都為真時，悖論情形才是一個真命題。所談論的悖論才是一個真正的邏輯悖論。

(二)解釋

所謂「悖論」，是指如果一個命題 a 被承認，但它可以被推斷為非 a 命題；相反，如果我們承認它不是 a，我們卻可以推出 a。那麼，這個矛盾的命題 a 就會被稱為「悖論」。

簡單來說，假設一個命題是真的，經過一系列正確的推理，卻又得出它明顯是假的；或是假設它是假的，經過一系列正確的推理，卻又得出它明顯是真的，那麼這命題就稱為「悖論」。

舉個例子來說明。假設現在有一臺正常執行的計算機，它的反應很快，並且只在瞬間判斷問題。規定計算機在紅燈時說「是」，綠燈時說「否」。現在它被要求判斷並回答「下一次綠燈是否亮」。輸入問題後，計算機開始執行。結果，人們發現這臺倒黴的電腦一直瘋狂地交替閃爍著紅燈、綠燈。他感到困惑的原因其實很簡單：如果它回答「是」，這意味著下面的燈確實是綠色的，但按照程式，「是」必須開啟紅燈；如果它回答「否」，這意味著下面的指示燈不是綠色的，但根據程式，它回答「否」並再次亮起綠色，因此計算機是瘋狂的，因為它不知道該做什麼。

(三)悖論 v.s 謬誤

不同於悖論是指既互相矛盾、但又能自圓其說的陳述，謬誤一般是指一些似是而非的論述，看起來是對的，而實際上是錯的論述，是以亦有人稱之為假語悖論。論證的謬誤可發生在三個地方：一是陳述了錯誤的事實（實質謬誤），二是使用了不恰當的詞語（言詞謬誤）；三是使用了不恰當的推理結構/形式（形式謬誤）。其中一與二合稱非形式謬誤，而二與三合稱邏輯謬誤。

例：稻草人謬誤。在一些格鬥訓練中，會以稻草人作為假想敵，練習向它作出攻

擊，無論攻擊再怎麼猛烈，被擊倒的都只是替身，真正想攻擊的對象並未受到攻擊。以猛烈炮火攻擊一個假想的論點就像「打稻草人」一樣。就如同社會上掀起一陣「年輕人買不起台北房」的討論時，出現了一篇在討論「年輕人很少自己買房」的文章，主要論述是「買房不是年輕人的事，而是家族的事，買房本來就是要靠父母和親友。」

但先把「年輕人買不起台北房」的批判性內涵，就字面上扭曲成「年輕人『本來就該』買不起台北房」，進而討論年輕人應該是要靠家族、父母來買房。而「年輕人買不起台北房」會引起廣泛討論，是因為「房價—薪資比」過高才造成的，跟年輕人是不是該和父母借錢買房，是不同議題，所以是個謬誤。

此謬誤非常的危險，因為若是你沒了解事情的本質，就很容易被從頭到尾聽來都合邏輯的論述呼嚨過去，尤其當一個字詞或語句，可理解為多種意思的時候，我們容易朝有利於自己觀點的方式扭曲，造成即使接下來的陳述雖然都合邏輯，但整體仍是犯了邏輯上的錯誤。

(四)分類

1. 威拉德·范奧曼·奎因的分類

(1)真實性悖論（veridical paradox）：

產生的結果看起來很荒謬，但事實證明是正確的。其推理過程和其結果都沒有問題，不是真正的悖論。如，希爾伯特旅館悖論。

(2)謬誤悖論（falsidical paradox）：

其推理過程是有謬誤的，但據此確立的命題不但似乎是荒謬的，而且確實是錯誤的。所以，也不是真正的悖論。如，稱為芝諾悖論的「阿基里斯與烏龜」和「飛矢不動」，這些現在可以用微積分（無限）的概念解釋。因為謬誤悖論是源於錯誤的思維方式和推理過程，更應該歸類於謬誤。

(3)悖論（paradox）：

不是上兩者之一。而是在我們自身的理性中，自身知識體系中的矛盾（antinomy)。表現為：通過適當地採用公認的推理方式，可以推導出自相矛盾的結果。如，羅素悖論和說謊者悖論。只有這一類是真正意義上的悖論。

2. 拉姆齊的分類

被認為是當前標準的悖論分類方法。分為邏輯悖論（Logical Paradox）及語義悖論（Semantical Paradox）。邏輯矛盾涉及數學或邏輯術語(例如類、數)，因此表明存在邏輯問題。而語義矛盾除純邏輯術語外還涉及思想、語言、符號等概念，它們是經驗性(非形式)術語。其中羅素悖論屬於前者，說謊者悖論屬於後者。

拉姆齊的分類是針對奎因區分出的真正悖論，不包括奎因認為並非是真正悖論的另外兩種：真實性的悖論和謬誤悖論。

(五)數學危機

1. 第一次數學危機

畢達哥拉斯曾有一句名言「凡物皆數」，其中的「數」，在那個年代的人們，相信一切的數字皆可以表達為整數或整數之比——也就是分數，簡單而言，他們所認識的只是「有理數」。

然而腰長為 1 的等腰直角三角形的斜邊長度，竟然是一個無法寫成有理數的數。這使他們心中的信念完完全全被破壞了，對於當時的數學界來說，是一個極大的震撼，也就是歷史上的「第一次數學危機」。

2. 第二次數學危機

芝諾悖論——無限小量問題，阿基里斯與烏龜悖論：只要烏龜先起跑，阿基里斯就無法超越牠。

3. 第三次數學危機

羅素悖論——理髮師問題，詳細說明請見「**羅素悖論**」。

二、悖論介紹

(一)哥德爾不完備定理

1. 哥德爾不完備定理

在數理邏輯中，哥德爾不完備定理是庫爾特·哥德爾於 1931 年證明並發表的兩條定理。簡單地說，第一條定理指出：

> 任何自洽的形式系統，只要蘊涵皮亞諾算術公理，就可以在其中構造在體系中不能被證明的真命題，因此通過推理演繹不能得到所有真命題（即體系是不完備的）。

這是形式邏輯中的定理，容易被錯誤表述。有許多命題聽起來很像是哥德爾不完備定理，但事實上並不是。具體實例見對哥德爾定理的誤解。

把第一條定理的證明過程在體系內部形式化後，哥德爾證明了第二條定理。

該定理指出：

> 任何邏輯自洽的形式系統，只要蘊涵皮亞諾算術公理，它就不能用於證明其本身的自洽性。

哥德爾不完備定理破壞了希爾伯特計劃的哲學企圖。大衛·希爾伯特提出，像實分析那樣較為複雜的體系的相容性，可以用較為簡單的體系中的手段來證明。最終，全部數學的相容性都可以歸結為基本算術的相容性。但哥德爾的第二條定理證明了基本算術的相容性不能在自身內部證明，因此當然就不能用來證明比它更強的系統的相容性了。

2.含意

哥德爾巧妙地利用了命題的「真值為真」和「含義為真」的區別，從而構造出了含義為真而真值不可證的命題，又避免了悖論的陷阱。形式邏輯系統的命題本身是沒有含義的。命題只有真值而沒有含義。公理命題的真值為真。其它命題的真值為真若且唯若該命題可以被證明，為假若且唯若該命題的非可以被證明。當形式邏輯系統被實際應用時，系統中的符號都被對映到實際概念上，從而有了語意。這種對映叫做一個模型。有

了模型，命題就有了含義（語意）。例如，在 ZF 公理化集合論中，系統中的物件（object）被影射到「集合」這一概念，∈被對映到「屬於」這一概念就是模型的一個例子。而 ZF 公理化系統本身即使沒有模型也可以成立。如果換一個模型，形式系統沒變，只是它不再是集合論了。當然，ZF 公理化系統是為了集合論量身打造的，很適合於集合論。如果換一個模型，很難找到可理解的語意。但這說明了「真值為真」和「含義為真」是有區別的。

在大多數情況下，命題的「真值為真」和「含義為真」是一致的。例如，設 A 為一命題,則命題 A↔¬A 的含義是「本命題 A 為假」，這時 A 的真值為真和含義為真是一致的，結果形成了否定迴圈而構成了悖論。而邏輯系統不能含有悖論，所以這樣的 A 應該是構造不出來的。哥德爾定理證明的巧妙之處就在於將悖論的「為假」改為了「為不可證」使得真值為真和含義為真成為不一致（含義為真是不可證，而真值為真或假都是可證），因而產生了自我否定又避免了迴圈的效果，也就避免了悖論。

德爾揭示的是在多數情況下，例如在數論或者實分析中，永遠不能找出公理的完整集合。換句話說，每一次將一個命題作為公理加入，將總有另一個命題出現在所能形式證明的範圍之外。

(二)羅素悖論

1.羅素悖論

設有一性質 P，並以一性質函數表示：P(x)，且其中的自變量 x 有此特性：$x \notin x$
現假設由性質P 能夠確定一個滿足性質 P 的集合 A — 也就是說 $A = \{x \mid x \notin x\}$。
那麼現在的問題是$A \in A$ 是否成立?
首先，若$A \in A$，則 A 是 A 的元素，A 具有性質 P，由性質函數 P 可以得知 $A \notin A$；
其次，若$A \notin A$，根據定義，A 是由所有滿足性質 P 的類組成，也就是說：
A 具有性質 P，所以 $A \in A$。

2. 理髮師悖論和羅素悖論等價

理髮師悖論和羅素悖論是等價的：
因為，如果把每個人對應一個集合，這個集合的元素被定義成這個人刮臉的對象。那麼，理髮師宣稱，他對應的集合裡的元素，都是城裡不屬於自己對應的集合的人，並且城裡所有不屬於自身對應集合的人都屬於理髮師對應的集合，那麼他是否屬於他自己對應的集合？這樣就由理髮師悖論得到羅素悖論。反過來的變換也是成立的。

3. 羅素悖論與書目悖論等價

另一種等價的悖論為書目悖論，第一類的書的目錄有它自己的條目，經典的例子就是維基百科。第二類的書目錄則沒有它自己的條目，一般的書目都是如此，問：今有一圖書館員，想將第二類的書名編輯成一冊，則將所有第二類書籍名稱統整的該書該不該擁有自己名稱的條目？
在 19 世紀晚期，格奧爾格·康托爾首次建立了集合論。集合論讓人們可以嚴謹地表示

極限的概念，並且隨後成為了幾乎所有數學家的通用語言。康托爾的集合論和數理邏輯在皮亞諾、魯伊茲·布勞威爾、大衛·希爾伯特和伯特蘭·羅素手中蒸蒸日上，也引發了關於數學基礎的長時間爭論。

(三)睡美人悖論

故事背景

睡美人將在星期日晚上睡去，而在睡前她被告知實驗詳情：在她睡去後會由拋硬幣來決定她將醒來一次或是兩次。如果硬幣為正面朝上，她會在星期一醒來並接受採訪；如果為反面朝上，她則會在星期一到星期五中各醒來一次並分別接受採訪。無論硬幣正反，她每次睡去時都會被灌下失憶藥，不再記得自己是否曾經醒過。同時，她在接受採訪時也並不知道這一天是星期幾。在她每次接受採訪時，都會詢問她：「你現在有多確信之前拋出的硬幣是正面朝上？」

(四)旅館悖論

1.悖論背景

假設有一個擁有可數無限多個房間的旅館，且所有的房間均已客滿。或許有人會認為此時這一旅館將無法再接納新的客人（如同有限個房間的情況），但事實上並非如此。

2.旅館問題

(1)有限個新客人

(2)無限個新客人

(3)無限個客車且每個客車有無限客人

3.結論

(1)在有無限個房間時，「每個房間都客滿」與「無法入住新的客人」兩者其實並不等價。

(2)無限集合的性質與有限集合的性質並不相同。

(3)對於擁有有限個房間的旅館，其奇數號房間的數量顯然總是小於其房間總數的。然而，在希爾伯特所假想的這一旅館中，奇數號房間數與總房間數是相同的。

(五)雙面真理說

雙面真理，顧名思義就是指存在雙面真理的命題，即命題 P 和~P 同為真的命題。在同一時間和同一意義上同時是「真」以及「假」的悖論被稱為雙面真理論。這一個學說反對當代為主流的亞里斯多德的「無矛盾律」，即若 P 為真，則~P 必定為假的傳統觀。

(六)半費之訟

1.背景故事

有一次，普羅塔哥拉斯收了一位有前途的學生，他叫歐緹勒士（Euathlus）。老師說:「我先只收你一半學費，剩下的學費等你畢業後的第一場官司幫人贏了之後再給我即可。」經過了普羅塔哥拉斯的幾年教學後，歐緹勒士畢業了，但是他並不打算在職場中給別人打官司，他想要去從政。普羅泰戈拉一看苗頭不對，那另一半學費是不是永遠拿不回來了，所以他決定起訴學徒歐緹勒士。

2.背後原理

普羅泰戈拉先論道：

如果我打贏官司，那按法庭判決，被告理應付我另一半學費。

如果我打輸了官司，那按照合同，被告也應付我另一半學費。

因而，無論這場官司是贏是輸，被告歐緹勒士都應付我另一半學費。

學徒歐緹勒士見老師打出這樣一張牌，那就以其人之道，還治其人之身。針對普羅泰戈拉的論辯提出了個相反的二難推理，推理如下：

如果我打贏官司，那按法庭判決，被告我不應付你另一半學費。

如果我打輸了官司，那按照合同，被告我不應付你另一半學費。

因而，無論這場官司是贏是輸，我都不應該付給你我的另一半學費。

如果 p 則 q；

如果非 p 則 q；

p 或者非 p；

所以 q

(七)意外絞刑悖論

故事背景

(1) 意外絞刑悖論

一位司法大臣宣布，將於禮拜一到禮拜天之間，出乎囚犯意料之外的一天，對某一位死囚處以絞刑，並會在前一天事先宣布。

該死囚開始邏輯推論：從禮拜一到禮拜天都可能處死我，而我是不知道究竟會是哪一天，所以哪一天都算是出乎我的意料之外。可是假設我順利的活到了禮拜六，我不就可以確定要在禮拜天把我殺了？這樣的話，就在我的意料之中了。禮拜天已經被排除了，如果我活到了禮拜五，我又可以確信不會在禮拜六處刑，如果禮拜六要殺我，也算是我的意料之中。如果繼續往前推的話，他不能在任何一天把我絞死。」可是到了禮拜三，他卻得到了次日要把他送上絞刑架的消息。事實上，這是他沒有預料到的。死囚的推論幾乎都是假設。事實上在禮拜天以外的任何一日處死他，對他來說都是意料之外的。

(2) 老虎悖論

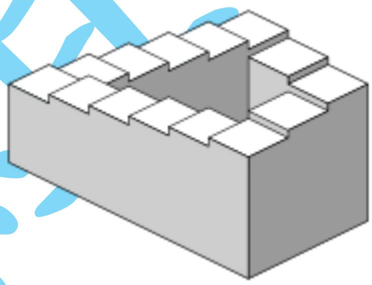
有一天，某個國王要處決一個死囚，但給他一個免死的機會，如果可以證明我在說謊就把你放了。國王把囚犯帶到一個房間，該房間有五道緊閉的門，其中一道門後面關著一隻老虎。國王對囚犯說：「這五道門各有次序，你必須由第一道至第五道依序打開，其中一道門後有老虎，會把你咬死。但我可以肯定的是，在你沒有打開那道有老虎的門之前，你萬萬料想不到老虎在哪一道門的後面。」顯然，如果死囚預料到老虎在哪道門後面，就證明國王在撒謊，那麼他就可以活命。所以開門之前，死囚進行了如下邏輯學的分析：假如老虎在第五道門，那把前四道門打開，都沒發現老虎，那肯定猜到老虎在第五道門中，因國王說過死囚料想不到老虎在哪

一道門，那國王的話就錯了。所以，國王不會把老虎放在第五道門。同理，老虎也不在第四道門中，否則囚犯打開三道門之後，就只剩兩道門，老虎既不在第五道門，就一定在第四道門，這樣他就猜出老虎在哪了；以此類推，老虎不存在於任何一道門中；於是死囚心安了，冒冒失失地依次開門，結果老虎從第二道門中跳了出來，把囚犯咬死了。國王說：「我不是跟你說了，老虎在哪道門，你萬萬料想不到麼？」

(八)潘洛斯悖論

一個始終向上或向下但卻無限循環的階梯，可以被視為潘洛斯三角形的一個變體，在此階梯上永遠無法找到最高的一點或者最低的一點是三維世界裡需要在一定角度下才能看到的樓梯。 在三維世界中不可能出現，這種不可能出現的物體來自於將三維物體描繪於二維平面時出現的錯視現象。

從一個特定的視角，將下圖藍色線重疊，就能在視覺上實現潘洛斯階梯了，它只是二維圖形，不存在高度這個維度。圖中那四條藍色線，在這個特定視角成了點，這就是空間的轉換導致的視覺效果。



肆、討論

一、悖論為何出現？

這樣一個奇怪的悖論是怎麼出現的？它的根源是客觀世界的一些內在矛盾罷了，人類的能力是有限的，對於世界的認知水平，是一個逐步提高的過程。只能在不同時期、不同層次，從淺到深、從低到高把握事物的規律。因此，即使是公認的科學理論，也只是對一定時期、一定水平、一定領域客觀規律的區域性反映，不一定全面、嚴謹，人們對事物的認識會隨著時間的推移而變化。

例如，長期以來，人們認可和接受的數字是一個自然數，人們習慣於從較大的數字中減去較小的數字。後來，為了表示事實相反意義上的數量，引入了負數的概念，因此從較小的數字中減去較大的數字不再荒謬。再例如，對於 2000 多年前的人們來說，尚未有無窮的概念，因此芝諾的「阿基里斯與龜悖論」出現。

這也說明了，認知的變化還有科學的理論，他們絕非絕對的真理，因此悖論的產生非常合理。

伍、結論

一、研究悖論的意義

研究悖論將對促進人類認知能力和科學發展起到積極作用。例如第一次數學危機引出了無理數並且促使邏輯的發展和幾何學的體系化；第二次數學危機則是解決了無窮小量的問題；第三次數學危機促進了數理邏輯的大發展。

邏輯的幾個基本概念發展過程, 之所以已經到了目前的狀態，通常是得益於解決悖論的各種嘗試。

陸、其他

這是一部以著名悖論——阿基里斯與龜悖論為題的電影。從片頭一開始對於主角兒時作畫的正向鼓勵，到片末窮困潦倒妻離子散的悲果，即便最後唯一能理解他的人又再度引領他繼續活下去，但夢想終究破滅，主角的心境始終待在兒時原點。一個除了他妻子外沒有人能夠理解他的藝術世界，形同故事開始所述的芝諾悖論一般，即便是身手矯健的阿基里斯努力追趕著烏龜，但到最後仍會以釐米之差敗給烏龜，主角也因為畫賣不出去而放棄自我的原創性，開始模仿他人的風格，形同阿基里斯（主角自帶的才華）永遠追不上相距不遠的烏龜（流行風格）。探討藝術到底是實力還是運氣的作品，但或許只有當創作者親身體會才能有所真正感受。

柒、參考資料

悖論參考資料

悖論維基百科

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%82%96%E8%AE%BA#cite_note- SEP_Paradoxes-1

“悖論”是什麼，為什麼會有這麼多的悖論

https://aijianggu.com/quyi/875648.html

從阿基米德對「芝諾悖論」的解釋，理解「無窮」概念的起源

https://aijianggu.com/collect/787283.html

謬誤參考資料

謬誤維基百科

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/謬誤

謬誤與悖論：簡介

http://www.mathsgreat.com/paradox/paradox_000.pdf

稻草人論證維基百科
https://zh.wikipedia.org/wiki/稻草人論證
八個常見的邏輯錯誤
http://mrpm.cc/?p=998

數學危機參考資料
第三次數學危機_百度百科
https://baike.baidu.hk/item/%E7%AC%AC%E4%B8%89%E6%AC%A1%E6%95%B8%E5%AD%B8%E5%8D%B1%E6%A9%9F/3891463
當五條老師讓悖論成真，飛毛腿永遠跑不贏烏龜？
https://news.readmoo.com/2020/12/31/zenos-paradox/
三次數學危機簡介
https://web.ntnu.edu.tw/~898400016/TA/relax/major_3/danger_of_math.pdf

羅素悖論參考資料
羅素悖論維基百科
https://zh.wikipedia.org/zh-tw/罗素悖论

哥德爾不完備定理參考資料
哥德爾不完備定理維基百科
https://zh.wikipedia.org/zh-tw/哥德尔不完备定理

希爾伯特旅館悖論參考資料
希爾伯特的“旅館悖論”
希爾伯特的“旅館悖論” - 雪花新闻 (xuehua.us)

睡美人問題參考資料
睡美人問題維基百科
https://zh.wikipedia.org/zh-tw/睡美人问题

潘洛斯階梯參考資料
潘洛斯階梯維基百科
https://zh.wikipedia.org/zh-tw/彭罗斯阶梯
潘洛斯階梯,揭露那些無法理解的悖論
https://aijianggu.com/painting/605999.html

意外絞刑悖論參考資料
意外絞刑悖論維基百科

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/意外绞刑悖论

阿基里斯與烏龜(電影)參考資料

影評《阿基里斯與龜》：0.99999 的藝術癲狂與夢想悖論

https://www.movier.tw/post.php?SID=134940

阿基里斯與烏龜圖片來源

https://www.bing.com/images/search?view=detailV2&ccid=T9Kv7Mxw&id=E221A3B61713F691D3DEAE01EFCA125CBBF95626&thid=OIP.T9Kv7Mxwx8N1hVJtWJAe7QHaKf&mediaurl=https%3a%2f%2fs3.ap-northeast-1.amazonaws.com%2fmovier2%2fimg_upload%2fa278s1349401512312129.jpg&cdnurl=https%3a%2f%2fth.bing.com%2fth%2fid%2fR.4fd2afeccc70c7c37585526d58901eed%3frik%3dJlb5u1wSyu8Brg%26pid%3dImgRaw%26r%3d0&exph=1200&expw=847&q=阿基里斯與烏龜&simid=608007566610023011&FORM=IRPRST&ck=963A6D7CF6966D91412E71C7782A0165&selectedIndex=4&ajaxhist=0&ajaxserp=0