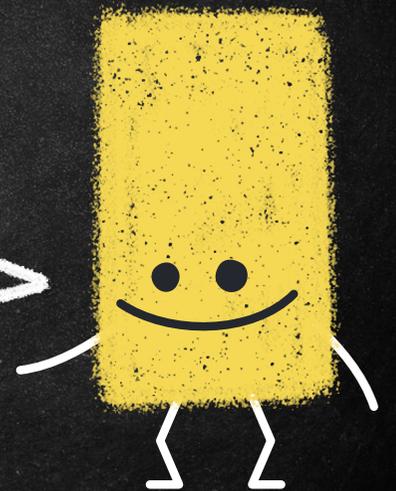


我很好騙——
什麼是真理？

第八組期末報告





組員

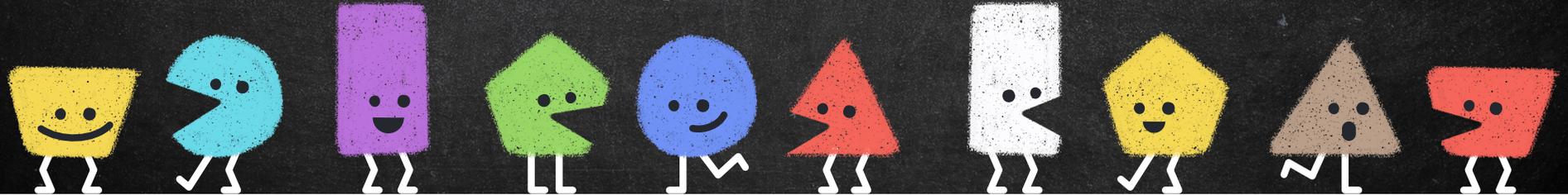
411031102 戴世勳

411031113 黃俊穎

411031103 潘栢銓

411031123 李柔樺

411031107 林亮辰



什麼是悖論？

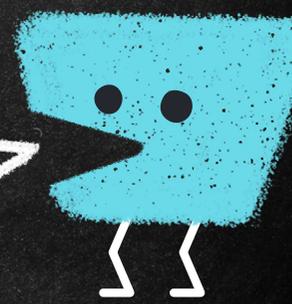
目錄

→ 什麼是悖論？

- (一) 定義
- (二) 解釋
- (三) 悖論 v. s 謬誤
- (四) 分類
- (五) 數學危機

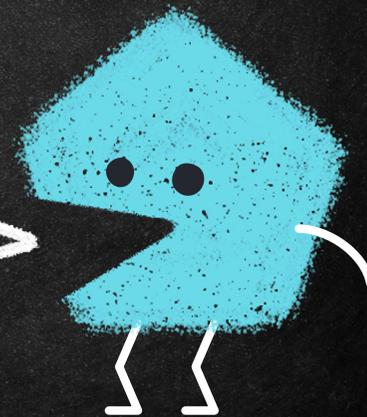
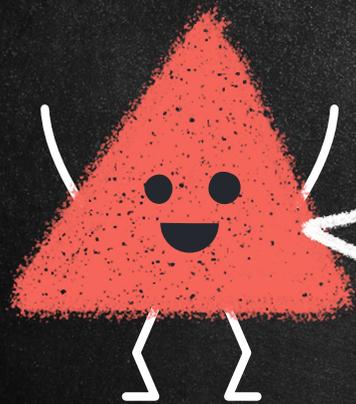
→ 悖論介紹

- (一) 羅素悖論
- (二) 希爾伯特旅館悖論
- (三) 睡美人問題
- (四) 潘洛斯階梯
- (五) 意外絞刑悖論
- (六) 雙面真理說
- (七) 半費之訟



1.

悖論定義



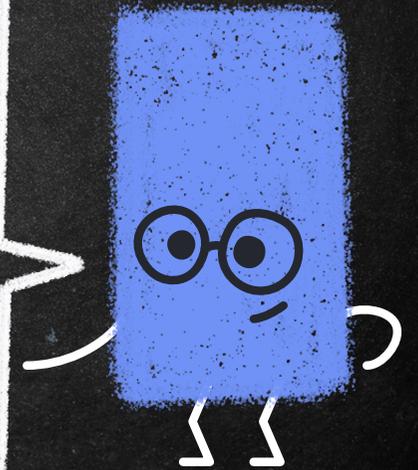
悖論定義

→ 斯坦福哲學百科全書「悖論」條目認為，所謂「悖論」通常是指一種命題，聲稱某項內容超出（甚至反對）「通常的見解」。



悖論定義

1. 有一個命題 A ，稱為悖論命題。
2. 有一個邏輯系統 L ，稱為相關系統。
3. 有一組命題 E ，稱為背景命題。背景命題都是相關系統中的真命題。相關系統被簡化為背景命題，背景命題成為悖論證明的依據。
4. 相關系統存在兩個證明可以獲得悖論命題 A 的真值，其中一個證明 A 為真，而另一個證明 A 為假，從而出現矛盾。



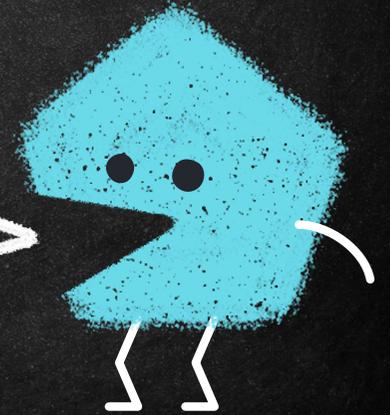
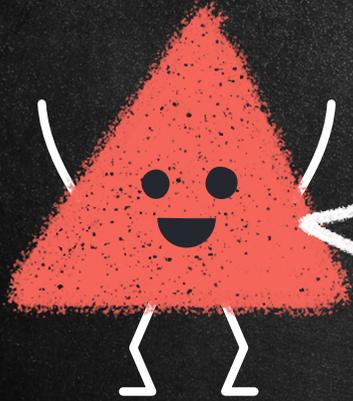
~~邏輯學~~



邏輯錯誤

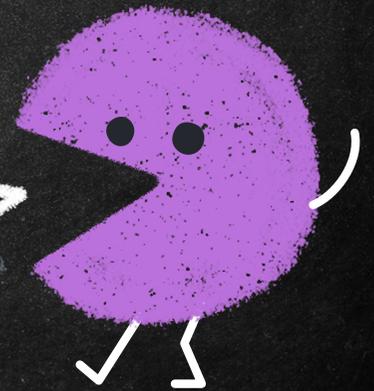
2.

悖論解釋



悖論解釋

所謂「悖論」，是指如果一個命題 a 被承認，但它可以被推斷為非 a 命題；相反，如果我們承認它不是 a ，我們卻可以推出 a 。那麼，這個矛盾的命題 a 就會被稱為「悖論」。



悖論解釋



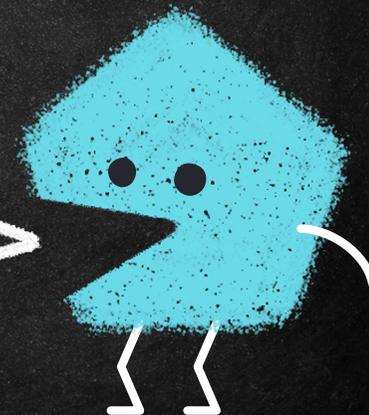
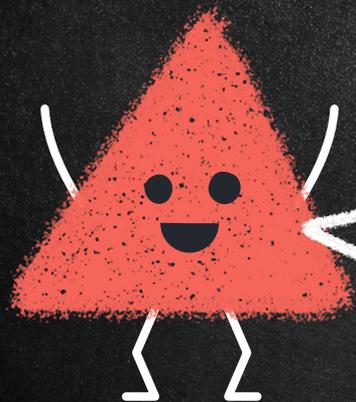
下一次綠燈是否亮？

紅燈——回答「是」

綠燈——回答「否」

3.

悖論 v.s 謬誤



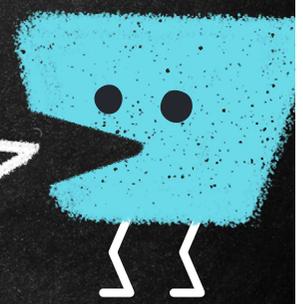
悖論 v.s 謬誤

→ 悖論

既互相矛盾、
但又能自圓其
說的陳述

→ 謬誤

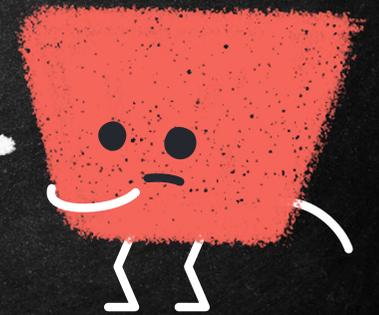
一般是指一些似是
而非的論述，看起
來是對的，而實際
上是錯的論述，是
以亦有人稱之為假
語悖論



稻草人謬誤

→ 為什麼叫稻草人謬誤？

→ 舉例說明：年輕人買不起台北房



年輕人買不起台北房

- 年輕人很少自己買房
- 買房不是年輕人的事，而是家族的事，買房本來就是要靠父母和親友。

- 「房價—薪資比」過高
- 與年輕人是不是該和父母借錢買房是不同議題

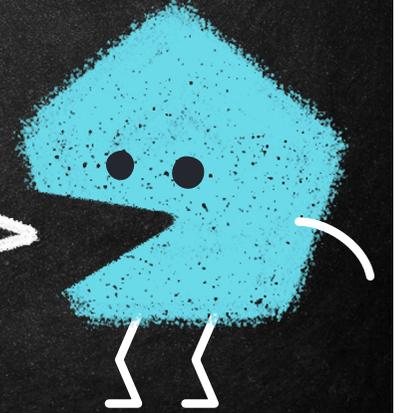
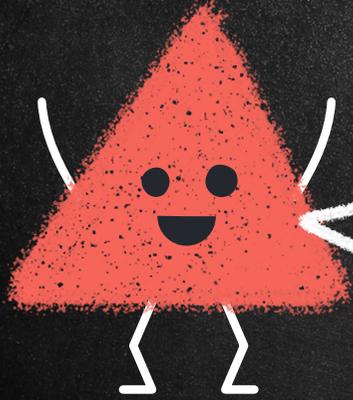
錯誤！

年輕人「本來就該」
買不起台北房



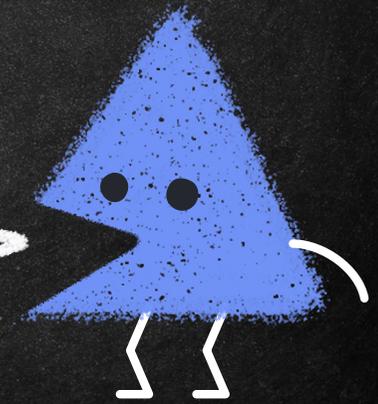
4.

悖論分類



威拉德·范奧曼·奎因的分類

- 真實性悖論 (veridical paradox) :
產生的結果感覺很荒謬，但事實證明是正確的。其推理過程和其結果都沒有問題，不是真正的悖論。如希爾伯特旅館悖論。
- 謬誤悖論 (falsidical paradox) : 其推理過程是有謬誤的，但據此確立的命題不但似乎是荒謬的，而且確實是錯誤的。所以也不是真正的悖論。如芝諾悖論。
- 悖論 (paradox) : 在我們自身的理性中，自身知識體系中的矛盾 (antinomy)。表現為：通過適當地採用公認的推理方式，可以推導出自相矛盾的結果。如，羅素悖論和說謊者悖論。只有這一類是真正意義上的悖論。



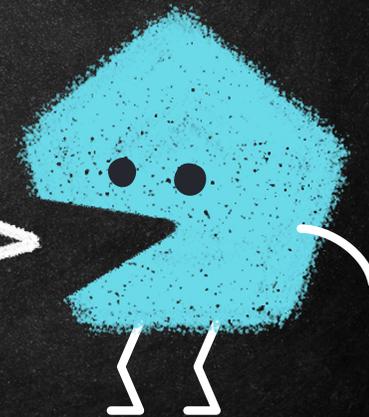
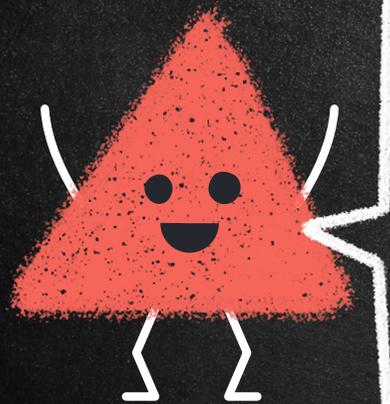
拉姆齊的分類

- 當前標準的悖論分類方法。
- 不包括奎因認為的真實性的悖論和謬誤悖論
- 邏輯悖論 (Logical Paradox) : 邏輯矛盾涉及數學或邏輯術語 (例如類、數), 因此表明存在邏輯問題, 如羅素悖論。
- 語義悖論 (Semantical Paradox) : 語義矛盾除純邏輯術語外還涉及思想、語言、符號等概念, 如說謊者悖論。



5.

數學危機



數學危機

第一次數學危機

- 畢達哥拉斯
—— 凡物皆數
- 腰長為1的等腰
直角三角形的
斜邊長度

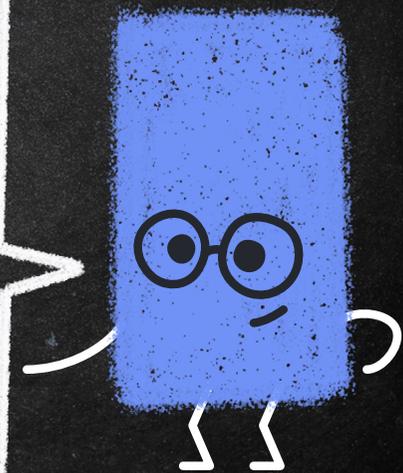


第二次數學危機

- 芝諾悖論——
無限小量問題，
阿基里斯與烏
龜悖論：只要
烏龜先起跑，
阿基里斯就無
法超越牠。

第三次數學危機

- 羅素悖論——
理髮師問題

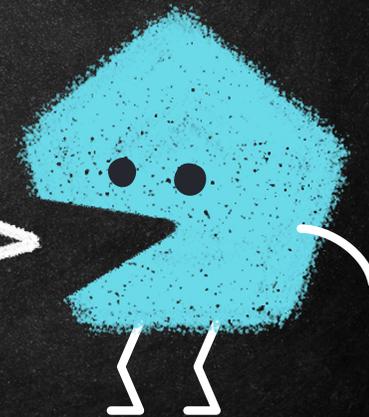
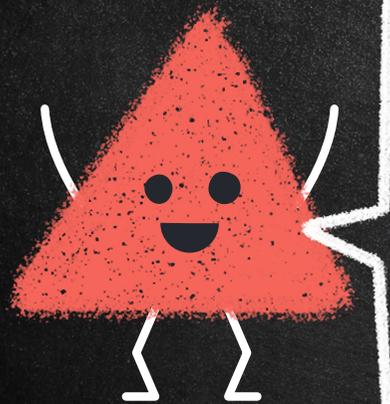


悖論介紹

1.

羅素悖論

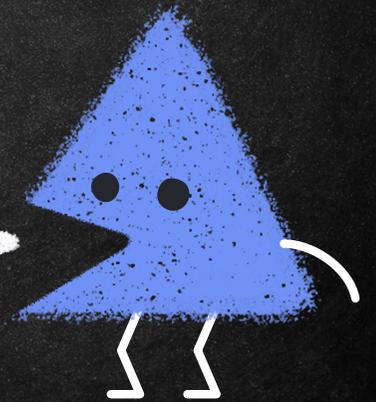
集合論與邏輯的阿基里斯之腱



羅素悖論與數學的統一

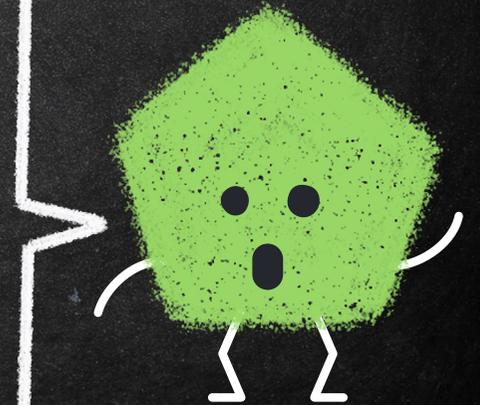
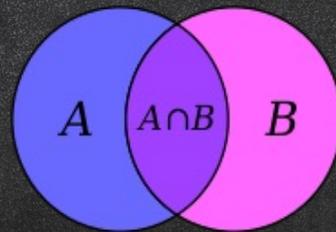
→ 背景1：數學的春天，無數的天才與日新月異的理論與知識

1. 高斯--複變函數、幾何學和收斂級數
2. 非歐幾里得幾何--雙曲幾何、橢圓幾何
(黎曼)---流形
3. 抽象代數--布林代數
4. 微積分--奧古斯丁·路易·柯西、黎曼和卡爾·魏爾斯特拉斯



羅素悖論與數學的統一

- 背景2：日漸成熟的數學體系需要一個通用、統一的基礎與溝通方法。
- 最有利的候選理論：(樸素)集合論
- 集合論簡介：單純以集合、元素、關係做最基礎邏輯推演的理論

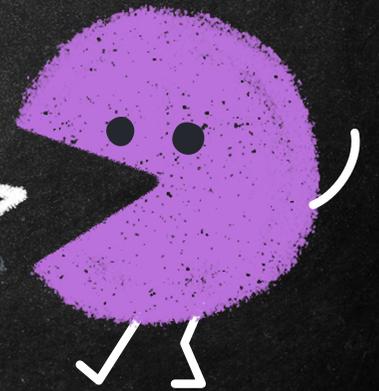


集合論的致命傷

→ 一個奇怪的集合 S

→ S 為 {由所有不包含集合自身的集合所構成的集合}

S 屬於 S 嗎？



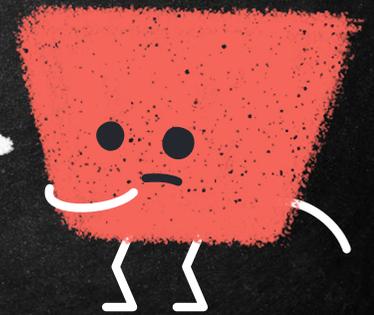
關於 S 的二律背反

→ 如果 S 屬於 S :

則根據定義會產生矛盾

→ 如果 S 不屬於 S :

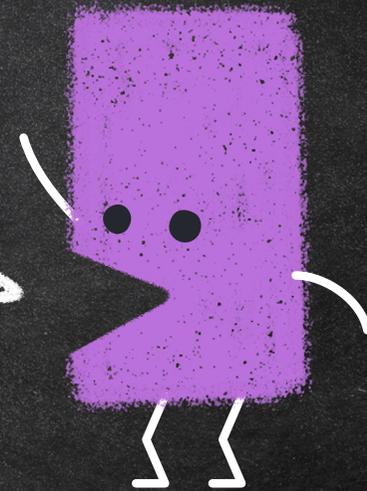
根據定義， s 應該是 S 的一個元素



“

羅素悖論

$$A = \{x | x \notin x\}$$

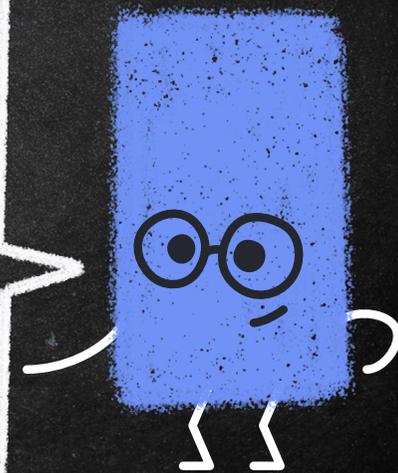


那些與羅素悖論等價的悖論

- 理髮師悖論
- 書目悖論

那些相似的悖論

- 皮諾丘悖論



羅素悖論導致的後果

第三次數學危機

為何羅素推倒了數學的大廈？

讓數學不再完美

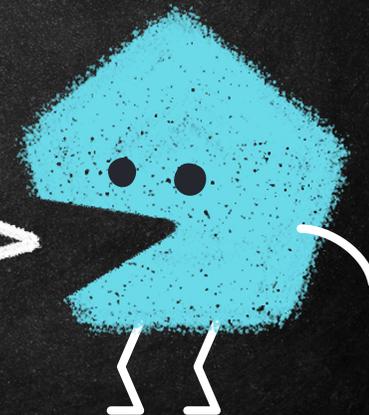
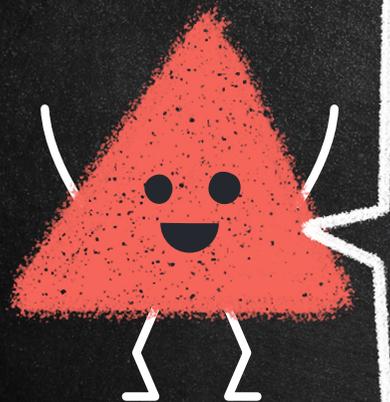
哥德爾不完備定理

哥德爾證明：智力的交響樂

2.

希爾伯特 旅館悖論

歸類於「集合論」悖論中



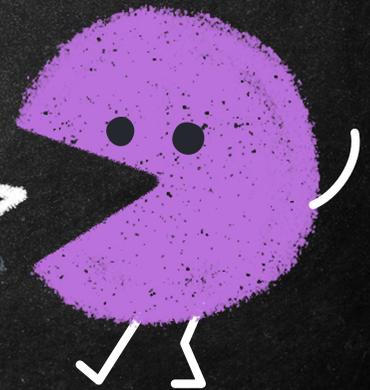
希爾伯特旅館悖論

- 有限個新客人
- 無限個新客人
- 無限個客車且每個客車有無限客人



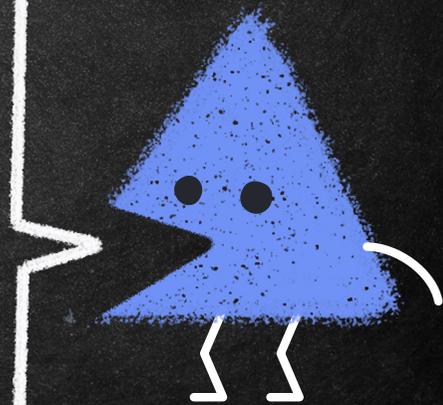
無限客車且 每客車有無限客人

- 先將原本的旅館設為第零號客車
- 將車上的座位都編好代號
- 再將車牌跟座位交叉



希爾伯特旅館悖論

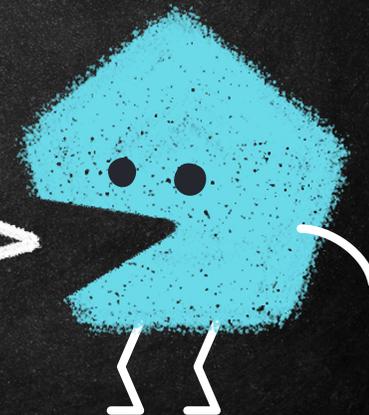
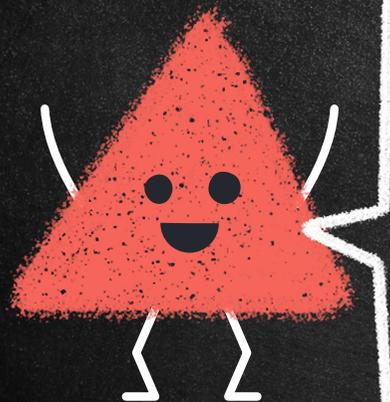
- 在有無限個房間時，「每個房間都客滿」與「無法入住新的客人」兩者其實並不等價。
- 無限集合的性質與有限集合的性質並不相同。
- 對於擁有有限個房間的旅館，其奇數號房間的數量顯然總是小於其房間總數的。然而，在希爾伯特所假想的這一旅館中，奇數號房間數與總房間數是相同的。



3.

睡美人問題

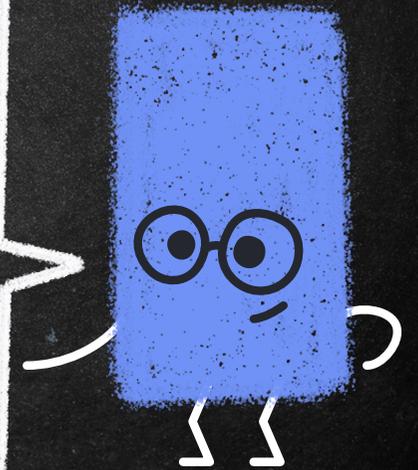
歸類於「概率學」悖論中



睡美人問題

→ 究竟硬幣為正面的機率是多少？

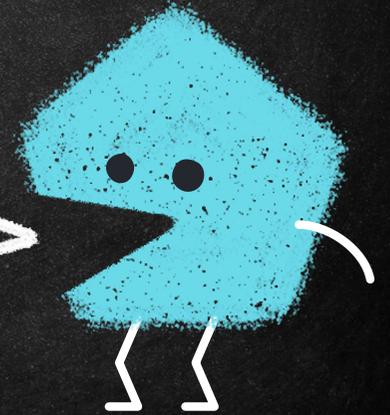
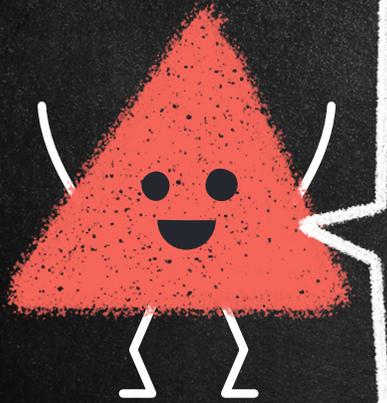
→ 到底 $1/2$ 跟 $1/6$ 究竟誰才是答案？



4.

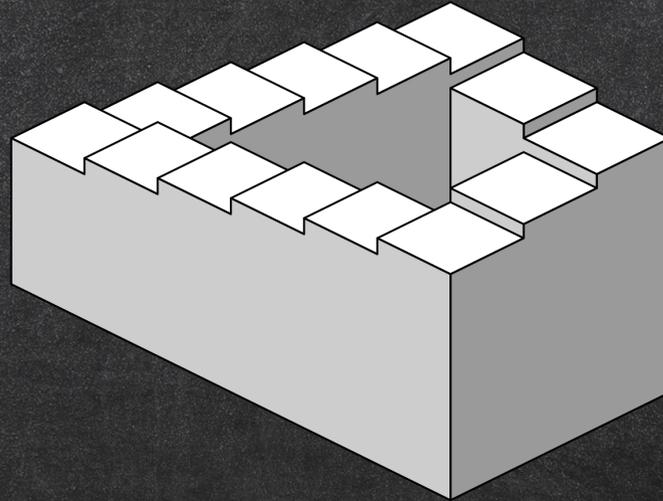
潘洛斯階梯

歸類於「幾何學」悖論中



潘洛斯階梯

→ 一個始終向上或向下但卻無限循環的階梯，可以被視為潘洛斯三角形的一個變體，在此階梯上永遠無法找到最高的一點或者最低的一點



視錯覺

是三維世界裡需要在一定角度下才能看到的樓梯。在三維世界中不可能出現，這種不可能出現的物體來自於將三維物體描繪於二維平面時出現的錯視現象。



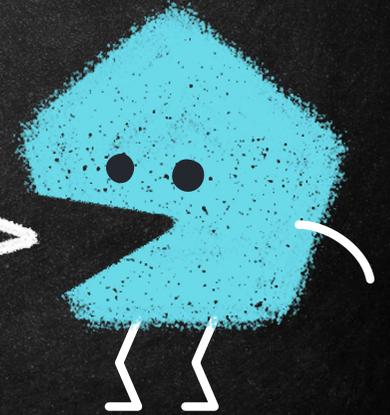
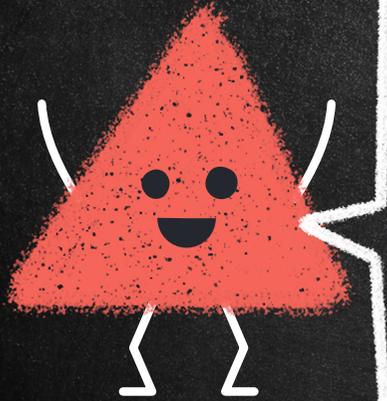
電影：全面啟動

從一個特定的視角，將下圖藍色線重疊，就能在視覺上實現潘洛斯階梯了，它只是二維圖形，不存在高度這個維度。圖中那四條藍色線，在這個特定視角成了點，這就是空間的轉換導致的視覺效果。

5.

意外絞刑悖論

歸類於「博弈論」悖論中

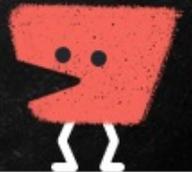


意外絞刑悖論

一位司法大臣宣布，將於出乎囚犯意料之外的一天，對某一位死囚處以絞刑，並會在前一天事先宣布。

該死囚開始邏輯推論：從禮拜一到禮拜天都可能處死我，所以哪一天都算是出乎我的意料之外。可是假設我順利的活到了禮拜六，就確定在禮拜天把我殺了？這樣的話，就在意料之中。禮拜天已經被排除了，如果活到禮拜五，我又可以確信不會在禮拜六處刑，如果禮拜六要殺我，也算是我的意料之中。繼續往前推的話，他不能在任何一天把我絞死。」

可是到了禮拜三，他卻得到了次日要把他送上絞刑架的消息。事實上，這是他沒有預料到的。



意外絞刑悖論

死囚的推論幾乎都是假設。事實上在禮拜天以外的任何一日處死他，對他來說都是意料之外的。

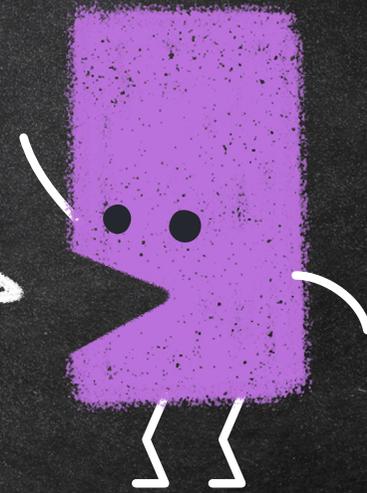


老虎悖論

國主要處決一個死囚，但給他一個免死的機會，如果可以證明我在說謊就把你放了。國王把囚犯帶到一個房間，該房間有五道緊閉的門，其中一道門後面關著一隻老虎。國王對囚犯說：「這五道門各有次序，你必須由第一道至第五道依序打開，其中一道門後有老虎，會把你咬死。但我可以肯定的是，在你沒有打開那道有老虎的門之前，你萬萬料想不到老虎在哪一道門的後面。」顯然，如果死囚預料到老虎在哪道門後面，就證明國王在撒謊。死囚開門前進行了邏輯學的分析：假如老虎在第五道門，那把前四道門打開，都沒發現老虎，那肯定猜到老虎在第五道門中，因國王說過死囚料想不到老虎在哪一道門，那國王的話就錯了。所以，國王不會把老虎放在第五道門。同理，老虎也不在第四道門中，否則囚犯打開三道門之後，老虎就一定是在第四道門，這樣他就猜出老虎在哪了；以此類推，老虎不存在。於是死囚心安地依次開門，結果老虎從第二道門中跳了出來，把囚犯咬死了。國王說：「我不是跟你說了，老虎在哪道門，你萬萬料想不到麼？」

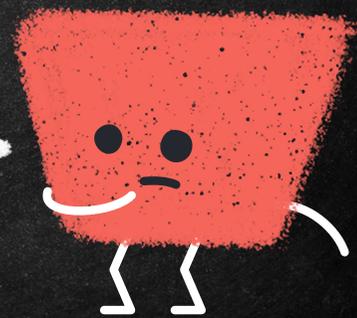
“

悖論分析



第一步錯

首先必須定義怎樣算國王所謂的「知道」或「意料」，如果投機猜測算的話，那國王不論怎樣放都不能保證不被猜中，所以帶投機成分的猜測不能算「知道」，設「知道」定義為「在即有事實下的邏輯推理」，那麼囚犯不僅要正確預測老虎，還要對其預測給出嚴格的邏輯證明才行。本例中不考慮沒有老虎的情況，即囚犯已知必有一頭老虎。作為囚犯，他在每次打開一個門前都會進行邏輯推理，如果能推出老虎是在即將打開的門裡就贏了，如果不能推出，他就只能打開這個門，如果打開後沒有老虎就繼續推理下一個門是否有老虎，依此類推。



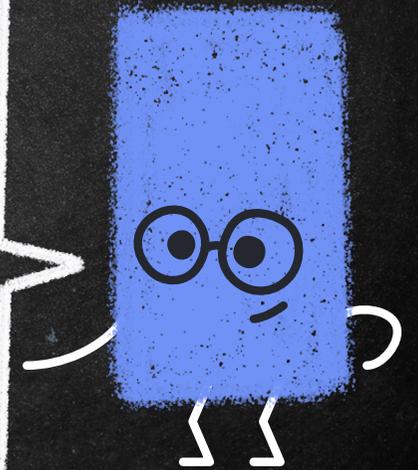
第一步錯

然後，把問題從5個門，簡化為只有2個門，囚犯會在打開第一個門之前，對第一個門裡是否有老虎做邏輯推理：由於囚犯要引用國王的思路，故須先考慮國王思路是否是會錯。

1. 如果相信國王是不會錯的，那麼你不可能推測出第一個門裡有沒有，因為如果推測出就說明國王會錯，所以在這個前提下不可能知道。囚犯無法推測出第一個門裡有沒有老虎，必然要打開第一個門。

2. 如果相信國王是會錯的：

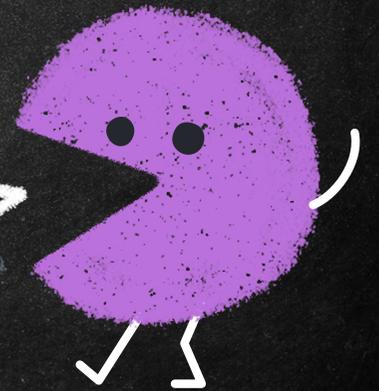
囚犯首先認為國王放第二個門是錯的，但國王既然是會錯的，他為何不會按囚犯認為錯誤的思路放第二個門呢？所以國王的思路就沒法唯一的推測了。囚犯失去國王的思路做論據，無法推測出第一個門裡有沒有老虎，必然要打開第一個門。



第一步錯

因此國王應且只應放到第一個門中，則國王必勝。

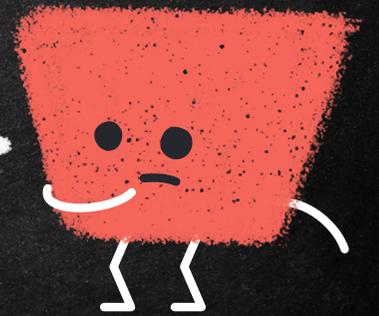
推廣到 n 個門的情況，只要國王不把老虎放到最後一個門，則國王必勝，囚犯必敗。



第二步錯

故事中的囚犯最後決定相信「沒有老虎」。但，國王並不知道囚犯是否會這樣，所以的確不可能把老虎放在第五扇門。如果囚犯決定相信「一定有老虎」，那麼在前四扇門都沒有老虎之後，第五扇門後的老虎的確就變成「可預料的」了。

既然老虎在第五扇門的話，牠一定是「可預料的」，那麼當你已經開了三扇空門時，情況是怎麼樣？我們可以試著寫成邏輯式子：前提一、老虎不可預料。前提二、老虎如果在第五扇門時，可預料。前提三、老虎不在第五扇門時，就一定在第四扇門。前提四、老虎如果在第四扇門時，可預料。結論：前提互相矛盾。



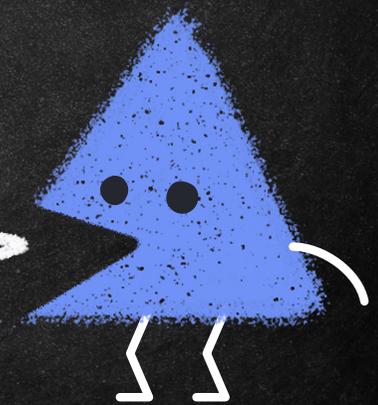
第二步錯

這時的邏輯推理中，既然前提互相矛盾，必定有一個以上不成立，那麼可能性就是以下四個其中之一、或是更多：

1. 老虎可預料。
2. 老虎如果在第五扇門時，不可預料。
3. 老虎不在第五扇門時，也不一定在第四扇門。
4. 老虎如果在第四扇門時，不可預料。

二和四自身是矛盾命題，不考慮，三會導致老虎變成薛定諤貓，也就是既存在亦非存在的狀態（囚犯把老虎往前門推是錯誤的，因為前提中包含「已經開了三扇空門」）。所以可能性只有一個：老虎可預料。但若老虎可預料，那麼顯示國王說謊，如果國王可能說謊，那麼老虎也真的有可能消失了。

這時的正確結論是：國王一定說謊，但他的謊言可能是「老虎可預料」，卻也可能是「根本沒老虎」，囚犯只是偏心於一個可能性，結果幫國王圓謊罷了。



最後一步錯

如果「不可預料」並不是一種保證，而只意味「高機率」，「有老虎」才是保證，那麼情況又整個改觀。可以列成以下狀況：

如果囚犯連猜五次「老虎不在」，則不可預料率100%，當然是最糟的狀況。

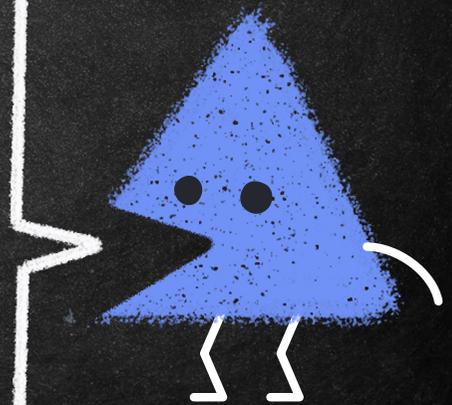
如果囚犯連猜五次「老虎在」，這時應將不可預料率一樣視為100%。假設國王隨便放，因為平均猜錯次數是兩次，亦即猜錯一次要加不可預料率50%才公平。



最後一步錯

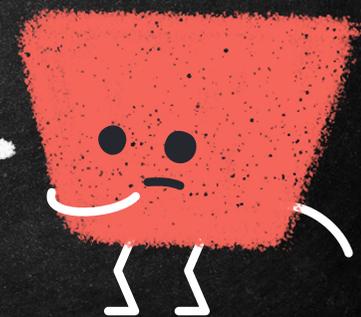
假設國王隨便放，這時囚犯採用的策略，以：

1. 先兩次不猜，再連續猜老虎在：
成功率0、0、100、50、0，平均30最高分
2. 先三次不猜，再連續猜老虎在：
成功率0、0、0、100、50，平均也是30最高分
3. 但以上兩種高分解，前兩扇門都是安全門，
必須混合下列解答靈活運用
4. 如果第一次就猜老虎在：
成功率100、50、0、-50、-50，平均只有10分
5. 如果第二次就猜老虎在：
成功率0、100、50、0、-50，平均也有20分
6. 為了便於計算，假設這四種策略囚犯都平均運用，綜合以上，老虎放在不同門的平均不可預料率，75%、87.5%、75%、50%、100%



最後一步錯

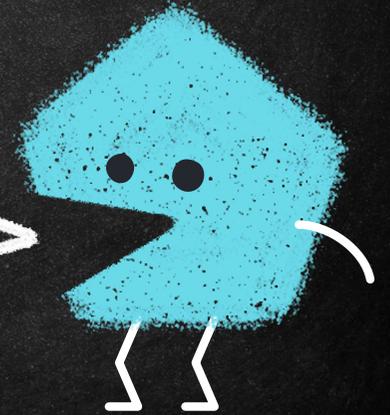
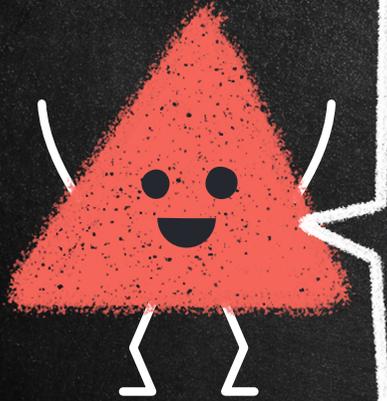
很明顯了，這時國王的對應策略，如果把老虎放在失分最低的第五扇門，可能被囚犯豪賭賭中，所以把老虎放在失分次低的第二扇門會是最佳選擇，只要把囚犯的猜中率壓在20%以下，都可以毫無愧色說是有很高的不可預料率。



6.

雙面真理說

歸類於「邏輯」悖論中



雙面真理說

在同一時間和同一意義上同時是「真」以及「假」的悖論

以數學方式表示：若有個proposition(命題P)，則此命題P為真，且 $\sim P$ 也為真

經典例子：



JOHN



OH!
JOHN已經進來了

真還是假？



額外延伸：說謊者悖論



我說的話是謊話。

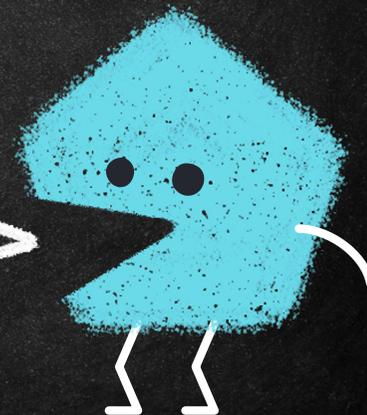
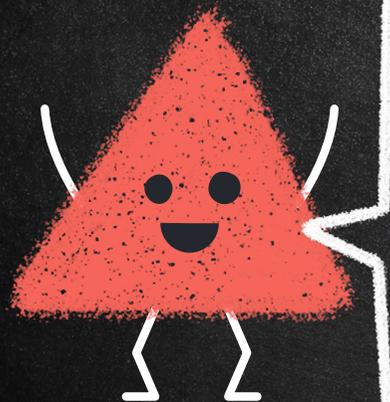
如果他確實在說謊，那麼他所說的就是真的，
但如果他所說的就是真的，那麼他就是在說謊

如果他不在說謊，則他說的話為假，
但如果他不在說謊，則他說的話就是真的

7.

半費之訟

歸類於「邏輯」悖論中



半費之訟



普羅塔哥拉斯

我先只收你一半學費，剩下的學費等你畢業後的第一場官司幫人贏了之後再給我即可。



歐提勒士

我要去從政

歐提勒士畢業了，但是他並不打算在職場中給別人打官司，他想要去從政



普羅塔哥拉斯

我要起訴你！



歐提勒士

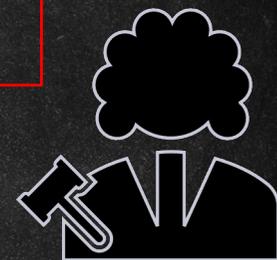
我先只收你一半學費，剩下的學費等你畢業後的第一場官司幫人贏了之後再給我即可！



普羅塔哥拉斯

如果我打贏官司，那按法庭判決，被告理應付我另一半學費。
如果我打輸了官司，那按照合同，被告也應付我另一半學費。

因而，無論這場官司是贏是輸，被告歐提勒士都應付我另一半學費。



哦我是法官啦



歐提勒士

如果我打贏官司，那按法庭判決，被告我不應付你另一半學費。
如果我打輸了官司，那按照合同，被告我不應付你另一半學費。

因而，無論這場官司是贏是輸，我都不應該付給你我的另一半學費。

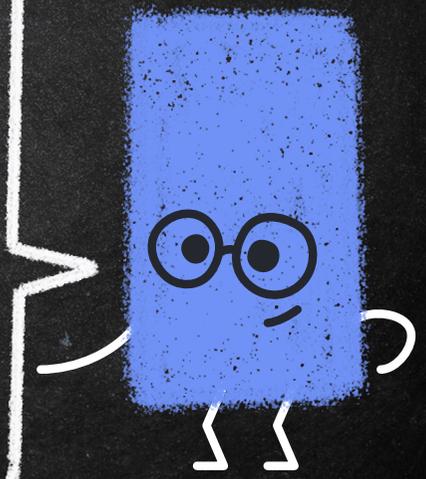
悖論為何出現？

人類所掌握的知識不一定全面、嚴謹

研究悖論的意義？

促進人類認知能力和對科學發展起到積極作用

電影介紹



~感謝聆聽~

