數學解題方法—期末報告

第九組

超越數

組員:

410731207 趙鴻儒

410731214 魏玄宇

410731215 陳宥穎

410731231 童震易

410931244 劉芳慈

摘要:

這篇報告我們會介紹超越數，以各式各樣的數開頭，再帶到本報告的重點—超越數。何謂超越數？誰發現超越數？超越數是如何定義又如何證明？還有許多跟超越書相關的內容，我們都會一一做介紹。

超越數的背景:

先說說什麼是代數數，什麼是超越數？

一個數如果是某個整係數多項式方程的根，它就是一個代數數。比如所有的整數，所有的有理數都是代數數。有些無理數也是代數數，比如2和3的平方根，等等。因為它們分別是$x^2 - 2 = 0$和$x^2 - 3 = 0$的根。我們通常能想起來的數大都是代數數。

知道了什麼是代數數，什麼是超越數也就明了了：凡不是代數數的數就是超越數

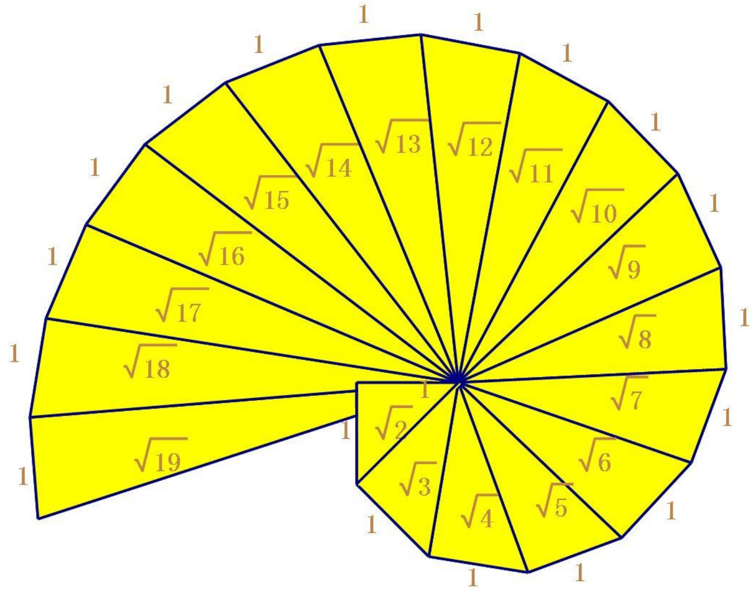
超越數是指不滿足任何整係數(有理係數)多項式方程的實數，即不是代數數的數。

因為歐拉說過：「它們超越代數方法所及的範圍之外。」(1748年)而得名。

超越數的存在是由法國數學家約瑟夫·萊歐維爾（Joseph Liouville, 1809—1882）在1844年最早證明的。關於超越數的存在，萊歐維爾寫出了下面這樣一個無限小數： a=0.110001000000000000000001000…($a = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \ldots$)，並且證明取這個a不可能滿足任何整係數代數方程，由此證明了它不是一個代數數，而是一個超越數。後來人們為了紀念他首次證明了超越數，所以把數a稱為萊歐維爾數。

劉維爾數證明後，許多數學家都致力於對超越數的研究。1873年，法國數學家夏爾·埃爾米特（Charles Hermite，1822—1901）又證明了自然對數

底e的超越性，從而使人們對超越數的認識更為清楚。1882年，德國數學家費迪南德·馮·林德曼證明了圓周率也是一個超越數（完全否定了“化圓為方”作圖的可能性）。



劉維爾的簡介：

生平

約瑟夫·劉維爾（法語：Joseph Liouville，1809年3月24日－1882年9月8日）是19世紀的法國數學家，生於加來海峽省的聖奧梅爾。劉維爾一生從事數學、力學和天文學的研究，涉足廣泛，成果豐富，尤其對雙週期橢圓函數、微分方程式邊值問題、數論中代數數的丟番圖逼近問題和超越數有深入研究。萊歐維爾構造了所謂的「劉維爾數」並證明了其超越性，是第一個證實超越數的存在的人。

劉維爾是家中次子，父親克洛德-約瑟夫·劉維爾（Claud-Joseph Liouville）是陸軍上尉，在拿破崙的軍隊中服役，因此劉維爾的幼年是在叔叔家度過的。戰後，隨父親在圖勒（Toul）定居，讀完小學後在巴黎的聖路易中學就讀。1825年他來到巴黎綜合理工學院學習。兩年後，劉維爾進入

國立橋路學校深造，但因健康問題延遲到1830年畢業。

1831年11月，他被巴黎綜合理工學院的教育委員會選為分析與力學課助教。1833年到當時的巴黎中央高等工藝製造學校任教。1836年他取得了博士學位，並創辦了《純粹與應用數學雜誌》(Journal de matématiques pures et appliquées)。兩年後，他回到巴黎綜合理工學院，任教分析與力學。1839年和1840年，他又先後被推舉為巴黎科學院天文學部委員和標準計量局成員，定期參與這兩方面的活動。

1840年後每年夏天劉維爾都在圖爾進行研究、寫作論文和處理雜誌出版方面的問題。11月以後，才回到巴黎，從事教學和行政工作。此時，劉維爾的生活開始穩定下來，開始注重對其他年輕的數學家的培養與交流。1843年到1846年中，劉維爾整理了埃瓦里斯特·伽羅瓦的部分遺稿並刊登在1846年的《純粹與應用數學雜誌》上，使後者在代數方面的獨創性工作得以為世人所知。

1848年，劉維爾當選制憲議會議員，試圖從政。然而1849年他競選國會議員失敗，此後便不再涉足政治。1851年他獲得了法蘭西學院的數學教席。

1882年9月8日，萊歐維爾在巴黎逝世。

成就

劉維爾的學術研究範圍十分廣泛，從數學分析、數論到力學和天文學領域都有成果。他主要的成就在數學方面。

劉維爾對數論問題產生興趣始於費馬大定理。

1840年，他將費馬的問題作了轉化，證明方程式$x^n + y^n = w^n$的不可解性意味著$x^{2n} - y^{2n} = 2x^n$的不可解性。

之後又研究了e的超越性質，建立了有關代數數丟番圖逼近的一個基本定理，並由此構造了劉維爾數，首次證明了超越數的存在性。

從1856年開始，劉維爾基本放棄了其他方面的數學研究，把精力投入到數論領域。在此後的十年中，他在《純粹與應用數學雜誌》上發表了18篇系列註記，未加證明地給出了許多一般公式，為解析數論的形成奠定了基礎；此外還發表了近200篇短篇註記，討論了質數性質和整數表示為二次型的方法等特殊問題。

《純粹與應用數學雜誌》是萊歐維爾在1836年創辦的一份雜誌。直到1876年，劉維爾一直擔任它的主編。《純粹與應用數學雜誌》在國際上享有很好的聲譽，被數學家暱稱為「劉維爾雜誌」。

超越數的例子：

◆ 萊維爾數

它是第一個確認為超越數的數，是於1844年劉維爾發現的。

◆ e

◆ e^{a}

其中a是除0以外的代數數。

◆ π

林德曼-魏爾斯特拉斯定理，1882年，註：因π是超越數而證明尺規作圖中的「化圓為方」的不可實現性。

◆e^{π}

◆$2^{\sqrt{2}}$

更一般地，若a為零和一以外的任何代數數及b為無理代數數則 必為超越數。這就是格爾豐德-施奈德定理。

◆sin1

◆**ln a**

其中a為一不等於1的正有理數。

劉維爾數:

如果一個實數x滿足，對任意正整數n，存在整數p,q，其中q>1有 $0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{p^n}$ 就把x叫做劉維爾數。

劉維爾在1844年證明了所有劉維爾數都是超越數，第一次說明了超越數的存在。

基本性質

劉維爾數一定是無理數若不然，則 $x = \frac{c}{d}, (c, d \in \mathbb{Z}, d > 0)$。

取足夠大的n 使$2^{n-1} > d$，在$\frac{c}{d} \neq \frac{p}{q}$時有

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{c}{d} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{cq - dp}{dq} \right| \geq \frac{1}{dq} > \frac{1}{2^{n-1}q} \geq \frac{1}{q^n}$$

與定義矛盾。

林德曼-魏爾斯特拉斯定理:

林德曼-魏爾斯特拉斯定理（Lindemann–Weierstrass theorem）是一個可以用於證明實數的超越性的定理。它表明，如果$a_1, \ldots, a_n$是代數數，在有理數$\mathbb{Q}$內是線性獨立的，那麼$e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$在$\mathbb{Q}$內是代數獨立的；也就是說，擴張域$\mathbb{Q}(e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n})$在$\mathbb{Q}$內具有超越次數$n$。

一個等價的表述是：如果$a_1, \ldots, a_n$是不同的代數數，那麼指數$e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$在代數數範圍內是線性獨立的。

這個定理由林德曼和魏爾斯特拉斯命名。林德曼在1882年證明了對於任何非零的代數數α，e^α都是超越數，因此推出了圓周率是超越數。魏爾斯特拉斯在1885年證明了一個更一般的結果。

證明**e**和**π**的超越性:

e和π的超越性是這個定理的直接推論。

假設α是一個非零的代數數，那麼$\{\alpha\}$在有理數範圍內是線性獨立的集合，因此根據定理的第一種表述，$\{e^\alpha\}$是一個代數獨立的集合，也就是說，e^α是超越數。特別地，$e^1 = e$是超越數˚

另外，利用定理的第二種表述，我們可以證明，如果α是一個非零的代數數，那麼$\{0, \alpha\}$就是不同的代數數的集合，因此集合$\{e^0, e^\alpha\} = \{1, e^\alpha\}$在代數數範圍內是線性獨立的，特別地，$e^\alpha$不能是代數數，因此一定是超越數。

現在，我們來證明π是超越數。如果π是代數數，$2\pi i$也是代數數（因為$2i$是代數數），那麼根據林德曼-魏爾斯特拉斯定理，$e^{2\pi i}$（參見歐拉公式）也是超越數，這與1是代數數的事實矛盾。

把這個證明稍微改變以下，可以證明如果α是一個非零的代數數，那麼$\sin(\alpha)$、$\cos(\alpha)$、$\tan(\alpha)$和它們的雙曲函數也是超越數。

格爾豐德**-**施奈德定理:

格爾豐德-施奈德定理（Gelfond–Schneider theorem）是一個可以用於證明許多數的超越性的結果。這個定理由蘇聯數學家亞歷山大·格爾豐德和德國數學家西奧多·施耐德在1934年分別獨立證明，它解決了希爾伯特第七問題。

如果α和β是代數數，其中$\alpha \notin \{0,1\}$，且β不是有理數，那麼任何$\alpha^\beta = \exp\{\beta \log \alpha\}$的值一定是超越數。

利用這個定理，和它的平方根為超越數。

超越數的證明意義：

所有超越數構成的集是一個不可數集，也就是說，幾乎所有的實數和複數都是超越數；儘管如此，現今發現的超越數極少，甚至連$\pi + e$是不是超越數也不知道，因為要證明一個數是超越數或代數數是十分困難的。

超越數的證明，給數學帶來了大的變革，解決了幾千年來數學上的難題——尺規作圖三大問題，即倍立方問題、三等分任意角問題和化圓為方問題。隨着超越數的發現，這三大問題被證明為不可能。

可能的超越數：

數e和**π**的大多數和、積、冪等等，例如

$$e + \pi, \pi - e, \pi e, \frac{\pi}{e}, \pi^\pi, e^e, \pi^e, \pi^{\sqrt{2}}, \pi^{\pi^2}$$

尚未得知是有理數、代數無理數或超越數。值得注意的例外是

$$\pi + e^\pi, \pi e^\pi, e^{\pi\sqrt{n}}$$

對於所有正整數n，已被證明是超越數。

歐拉-馬斯刻若尼常數

是一個數學常數，定義為調和級數與自然對數的差值：

$$\gamma = \lim_{n \to \infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)\right] = \int_1^\infty \left(\frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x}\right)dx$$

它的近似值為

γ≈0.577215664901532860606512090082402431042159335

該常數最先由瑞士數學家萊昂哈德·歐拉在1735年發表的文章De Progressionibus harmonicus observationes中定義。歐拉曾經使用C作為它的符號，並計算出了它的前6位小數。1761年他又將該值計算到16位小數。1790年，義大利數學家洛倫佐·馬斯凱羅尼引入了γ作為這個常數的符號，並將該常數計算到小數點後32位。但後來的計算顯示他在第20位的時候出現了錯誤。

目前尚不知道該常數是否為有理數，但是分析表明如果它是一個有理數，那麼它的分母位數將超過10^{242080}。

阿培里常數

在數學中，阿培里常數是一個時常會遇到的常數。在一些物理問題中阿培里常數也會很自然地出現。比如說量子電動力學里，阿培里常數出現在電子的磁旋比展開的第二項與第三項中。

阿培里常數的準確定義是黎曼ζ函數的一個值：ζ(3)

$$\zeta(3)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots$$

它的前45位準確數字為:

ζ(3) = 1.202056903159594285399738161511449990764986292...

這個常數的倒數也是一個有意義的常數:考慮任意三個隨機抽取的正

整數，它們之間互質的概率正是阿培里常數的倒數。

黎曼ζ函數

寫作$\zeta(s)$ 的定義如下：設一複數 s 使得 $\mathrm{Re}(s) > 1$，則定義：

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

在區域 $\{s : \mathrm{Re}(s) > 1\}$ 上，此無窮級數收斂並為一全純函數。歐拉在1740年考慮過 s 為正整數的情況，後來柴比雪夫拓展到 $s > 1$。波恩哈德·黎曼認識到：ζ函數可以通過解析延拓，把定義域擴展到幾乎整個複數域上的全純函數 $\zeta(s)$。這也是黎曼猜想所研究的函數。

黎曼ζ函數在其他奇整數的取值 ,$\zeta(5)$,$\zeta(7)$（尚未被證明是無理數）

費根鮑姆常數

費根鮑姆常數是分岔理論中重要兩個的數學常數，這兩個常數因數學家費根鮑姆而得名。

第一常數

第一費根鮑姆常數是倍週期分叉中相鄰分叉點間隔的極限比率，用δ表示：

δ=4.66920160910299067185320382..。

第二常數

第二費根鮑姆常數，又叫費根鮑姆減少係數，用α表示：

α=2.502907875095892822283902873..。

這兩個常數所屬的數集至今仍不明確，可以猜測這兩個都是超越數，但實際上現在連這兩個數是否為無理數的證明都沒有。

米爾斯常數

米爾斯常數是使對於所有正整數*n*，二重指數函數A^{3^n}的整數部分都是質數的最小正實數*A*。這個常數以W·H·米爾斯命名，他在1947年證明了這個常數的存在。

米爾斯常數的值是未知的，但如果黎曼猜想成立，它的值大約為：

A≈1.30637788386308069046…

由米爾斯常數所產生的質數稱為米爾斯質數；如果黎曼猜想成立，這個數列的最初幾項為:2, 11, 1361, 2521008887……

通過計算米爾斯質數，我們可以近似計算米爾斯常數為:

$$A \approx a(n)^{\frac{1}{3^n}}$$

Caldwell & Cheng用這個方法計算出米爾斯常數的差不多七千位數。

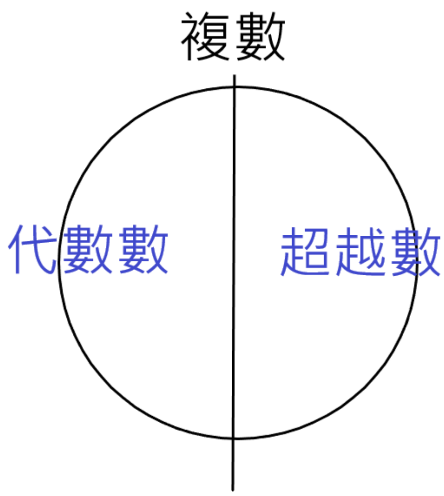
目前還沒有閉合公式可以計算米爾斯常數，甚至不知道它是不是有理數。

相關的延伸:

超越數的證明，給數學帶來了大的變革，解決了幾千年來數學上的難題——尺規作圖三大問題，即倍立方問題、三等分任意角問題和化圓為方問題。

規矩數

指可用尺規作圖方式作出的實數。在給定單位長度的情形下，若可以用尺規作圖的方式作出長度為的線段，則就是規矩數。規矩數的「規」和「矩」



分別表示圓規及直尺，兩個尺規作圖的重要元素。

規矩數一定是代數數(為一整係數代數方程的解)，且以此數為其解的最小多項式其次數為2^n。

此條件為規矩數成立的必要條件。因此若一個數是超越數(非代數數), 或一數對應的最小多項式為三次、五次, 此數必定不是規矩數。

最小多項式

假定 V 是一個 F 上的有限維向量空間。若定義集合 $\mathcal{Z}$ 為「所有使 $f(T)$ 為 0 的非零多項式 f 」:

$$\mathcal{Z} = \{f \in \mathbb{P}(F) \mid f \neq 0 \text{ and } f(T) = 0\}$$

若 $\mathcal{Z}$ 中的多項式 m 滿足下列兩個性質:

1. **m 的最高次項係數為 1**:即 *monic*。

2. **次數是裡面最小的**:

$$\deg m \leq \deg f \quad \forall f \in \mathcal{Z}$$

則稱 m 為 T 的極小多項式。

尺規作圖

利用尺規作圖可以將二線段的長度進行四則運算, 也可以求出一線段長度的平方根

因此符合以下任一條件的均為規矩數

1. 整數

2. 所有有理數

3. 規矩數a的平方根, 又或是2^n次方根

4. 有限個規矩數相加、相減、相乘、相除(除數不得為0)的結果 。

定義了直尺和圓規的特性後, 所有的作圖步驟都可以歸化為五種基本的步驟, 稱為作圖公法

1. 通過兩個已知點, 作一直線。

2. 已知圓心和半徑, 作一個圓。

3. 若兩已知直線相交, 確定其交點。

4. 若已知直線和一已知圓相交, 確定其交點。

5. 若兩已知圓相交，確定其交點。

倍立方問題

相關傳說

傳說中， 這問題的來源， 可追溯到公元前429年。一場瘟疫襲擊了希臘提洛島(Delos)，造成四分之一的人口死亡。島民們去神廟請示阿波羅的旨意，神諭說：要想遏止瘟疫， 得將阿波羅神殿中那正立方的祭壇加大一倍。人們便把每邊增長一倍，結果體積當然就變成了8倍，瘟疫依舊蔓延；接著人們又試著把體積改成原來的2倍，但形狀卻變為一個長方體……第羅斯島人在萬般無奈的情況下，只好鼓足勇氣到雅典去求救於當時著名的學者柏拉圖。

不可能性的證明

證明使用反證法。倍立方問題是指已知單位長度1

要作出$\sqrt[3]{2}$的長度。反設可以作出$\sqrt[3]{2}$，說明它是一個規矩數。

$z=\sqrt[3]{2}$的多次項是：

$Z^3-2=0$

不是2的冪次，這與先前的結論矛盾。所以，用尺規方法無法作出一個立方體，使得它的體積是已知立方體的兩倍

三等分任意角

問題闡述

任意給定一個角，是否能夠通過以上說明的五種基本步驟，於有限次內作出另一個角，等於這個角的三分之一？

提示

任何可以用尺規作圖作出的點，其座標對應一個規矩數，它的最小多項式次數為2^n

不可能性的證明

用反證法證明三等分任意角是不可能的。反設可以用尺規作圖將任意角三等分，代表對任意角度是θ的角，均可以由尺規作圖得到角度為$\frac{\theta}{3}$的角

在已知單位長度和$\cos\theta$的時候能做出$\cos\frac{\theta}{3}$的長度。設L是包含了$\cos\theta$和單位長度1的域。用尺規作圖可以得到$z=\cos\frac{\theta}{3}$

然而根據三倍角公式：

$$\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3} = 4z^3 - 3z$$。

然而3不是2的冪次，這和之前的結論矛盾。如此便說明，無法用尺規作圖將任意角三等分

化圓為方

問題闡述
給定一個圓，是否能夠通過以上說明的五種基本步驟，於有限次內作出一個正方形，使得它的面積等於圓的面積

資料參考來源:

約瑟夫·萊歐維爾

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E7%BA%A6%E7%91%9F%E5%A4%AB%C2%B7%E5%88%98%E7%BB%B4%E5%B0%94

超越數

https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/%E8%B6%85%E8%B6%8A%E6%95%B8

萊歐維爾數

https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/%E5%88%98%E7%BB%B4%E5%B0%94%E6%95%B0

規矩數

https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/%E8%A6%8F%E7%9F%A9%E6%95%B8

倍立方

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%80%8D%E7%AB%8B%E6%96%B9

三等分

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E4%B8%89%E7%AD%89%E5%88%86%E8%A7%92

圓

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%8C%96%E5%9C%93%E7%82%BA%E6%96%B9