數學解題方法 - 期末報告
超越數

第九組組員：
410731207 趙鴻儒
410731214 魏玄宇
410731215 陳宥穎
410731231 童震易
410931244 劉芳慈

各式各樣的數

數（number）是一個用作計數、標記或用作量度的抽象概念，是比同質或同屬性事物的等級的簡單符號記錄形式。代表數的一系列符號，包括數字、運算符號等統稱為記數系統。在日常生活中，數通常出現在在標記（如公路、電話和門牌號碼）、序列的指標和代碼上。在數學裡，數的定義延伸至包含如如分數、負數、無理數、超越數及複數等抽象化的概念。

代數數Algebraic Numbers

代數數可以定義為「有理係數多項式的複根」或「整係數多項式的複根」。第一個定義可以具體描述為：

設z為複數。如果存在正整數n，以及n+1個有理數q_0，$q_1 \ldots q_n$，並且$q_n \neq 0$，使得:

$$q_n z^n + \ldots + q_1 z + q_0 = 0$$

則稱z是一個代數數。

代數數不一定是實數，實數也不一定是代數數。

實數=有理數∪無理數
複數=代數數∪超越數
無理數=無理數中的代數數∪實數中的超越數
實數的代數數=有理數∪無理數中的代數數

代數數的可數性質

首先定義$z[x]$為所有n次整係數多項式的集合。其次定義 $z_n^k[x]$為係數絕對值的和等於k的n次整係數多項式的集合：

$$z_h^k[x]=\{a_0 + a_1 x \ldots + a_n x^n ; a_0, \ldots a_n \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0, |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| = k\}$$

$z_h^k[x]$中多項式的任何係數至多有2k+1個可能性，最高次項係數至多有2k個可能性，因此這樣的多項式個數不超過2k(2k+1)^n。每個多項式至多有n個根。如果將所有$z_h^k[x]$中多項式的根的集合記為A_n^k，則A_n^k的元素個數不超過2nk(2k+1)^n，即為有限集。

整係數多項式的集合 $z[x]$ 可以寫為常數多項式和 $z_n^k[x]$ 的聯集：

$$z[x] = z \cup z_n^k[x], n \in \mathbb{Z}^+, k \in \mathbb{Z}^+$$

而常數多項式沒有根。所以，任一代數數必然是某個 $z_n^k[x]$中的多項式的根，即屬於 A_n^k。反之任何A_n^k中的元素按定義必然是代數數。因此代數數的集合A也可以寫為所有A_n^k的聯集：

$$A = \bigcup A_n^k, n \in \mathbb{Z}^+, k \in \mathbb{Z}^+$$

而$\mathbb{Z}^+ * \mathbb{Z}^+$ 是可數集。集合A是可數個有限集的聯集，因此是可數的。

由於代數數的集合A是可數集，因此在複數平面上，代數數集合的勒貝格測度為零。在此意義上，可以說「幾乎所有」的複數都不是代數數。

給定一個代數數z，在所有以z為根的有理係數多項式中，存在唯一的一個首一多項式，其次數小於等於任何其他以z為根的多項式。這個多項式稱為極小多項式。如果極小多項式的次數為n，則稱該代數數為n次代數數。一次的代數數就是有理數。

所有的代數數都是可計算數，因此是可定義數。

代數數的例子

任何有理數q都是多項式$X-q$的根，因此每個有理數都是代數數。

所有形同$z=q^{\frac{1}{m}}$的無理數也是代數數，因為它是多項式x^m-q的根。例如$\sqrt{2}$和$\sqrt[3]{3}$是代數數，因為它們分別是方程式x^2-2和x^3-3的根。

黃金比率φ是代數數，因為它是$x^2-x-1=0$的根。

二次無理數，也就是二次方程式$ax^2+bx+c=0$的根，是代數數。

虛數單位 i 也是代數數，因為是$x^2=-1$的根。

*n*次單位根，顧名思義，是$x^n-1=0$的根，因此是代數數。

高斯整數也是代數數，例如高斯整數a+bi是多項式$x^2-2ax+a^2+b^2$的根。

所有規矩數（通過尺規作圖法做出的線段的長度數值）都是代數數。因為建立直角坐標系後可以證明，標準的尺規作圖步驟的每一步都相當於計算一個次數不超過2的多項式方程式，因此能夠通過有限步做出的線段長度必然是有限個有理係數多項式迭代後得到的多項式的根，從而是代數數。

超越數Transcendental Number

在數論中，**超越數**（transcendental number）是指任何一個不是代數數的無理數。只要它不是任何一個有理係數代數方程的根，它即是超越數。最著名的超越數是e以及π。

幾乎所有的實數和複數都是超越數，這是因為代數數的集合是可數集，而實數和複數的集合是不可數集之故。

超越數是代數數的相反，也即是說若x是一個超越數，那麼對於任何整數$a_n, a_{n_{-1}} \ldots, a_0$都符合:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \neq 0, a_n \neq 0$$

超越數的簡介

超越數的背景介紹

先說說什麼是代數數，什麼是超越數？

一個數如果是某個整係數多項式方程的根，它就是一個代數數。比如所有的整數，所有的有理數都是代數數。有些無理數也是代數數，比如2和3的平方根，等等。因為它們分別是x^2-2=0和x^2-3=0的根。我們通常能想起來的數大都是代數數。

知道了什麼是代數數，什麼是超越數也就明了了：凡不是代數數的數就是超越數

超越數是指不滿足任何整係數(有理係數)多項式方程的實數，即不是代數數的數。

因為歐拉說過：“它們超越代數方法所及的範圍之外。”(1748年)而得名。

超越數的背景介紹

超越數的存在是由法國數學家約瑟夫·劉維爾（Joseph Liouville，1809—1882）在1844年最早證明的。關於超越數的存在，劉維爾寫出了下面這樣一個無限小數：
a=0.110001000000000000000001000...
（a=1/10^1! +1/10^2! +1/10^3! +...），並且證明取這個a不可能滿足任何整係數代數方程，由此證明了它不是一個代數數，而是一個超越數。後來人們為了紀念他首次證明了超越數，所以把數a稱為劉維爾數。

劉維爾的簡介

約瑟夫·劉維爾（法語：Joseph Liouville，1809年3月24日－1882年9月8日）是19世紀的法國數學家，生於加來海峽省的聖奧梅爾。劉維爾一生從事數學、力學和天文學的研究，涉足廣泛，成果豐富，尤其對雙週期橢圓函數、微分方程式邊值問題、數論中代數數的丟番圖逼近問題和超越數有深入研究。劉維爾構造了所謂的「劉維爾數」並證明了其超越性，是第一個證實超越數的存在的人。

劉維爾的生平

劉維爾是家中次子，父親克洛德-約瑟夫·劉維爾（Claud-Joseph Liouville）是陸軍上尉，在拿破崙的軍隊中服役，因此劉維爾的幼年是在叔叔家度過的。戰後，隨父親在圖勒（Toul）定居，讀完小學後在巴黎的聖路易中學就讀。1825年他來到巴黎綜合理工學院學習。兩年後，劉維爾進入國立橋路學校深造，但因健康問題延遲到1830年畢業。

1831年11月，他被巴黎綜合理工學院的教育委員會選為分析與力學課助教。1833年到當時的巴黎中央高等工藝製造學校任教。1836年他取得了博士學位，並創辦了《純粹與應用數學雜誌》（Journal de matématiques pures et appliquées）。兩年後，他回到巴黎綜合理工學院，任教分析與力學。1839年和1840年，他又先後被推舉為巴黎科學院天文學部委員和標準計量局成員，定期參與這兩方面的活動。

劉維爾的生平

1840年後每年夏天劉維爾都在圖爾進行研究、寫作論文和處理雜誌出版方面的問題。11月以後，才回到巴黎，從事教學和行政工作。此時，劉維爾的生活開始穩定下來，開始注重對其他年輕的數學家的培養與交流。1843年到1846年中，劉維爾整理了埃瓦里斯特·伽羅瓦的部分遺稿並刊登在1846年的《純粹與應用數學雜誌》上，使後者在代數方面的獨創性工作得以為世人所知。

1848年，劉維爾當選制憲議會議員，試圖從政。然而1849年他競選國會議員失敗，此後便不再涉足政治。1851年他獲得了法蘭西學院的數學教席。

1882年9月8日，劉維爾在巴黎逝世。

劉維爾的成就

劉維爾的學術研究範圍十分廣泛，從數學分析、數論到力學和天文學領域都有成果。他主要的成就在數學方面。

劉維爾對數論問題產生興趣始於費馬大定理。

1840年，他將費馬的問題作了轉化，證明方程式

$$x^n + y^n = w^n$$

的不可解性意味著

$$x^{2n} - y^{2n} = 2x^n$$

的不可解性。

之後又研究了e的超越性質，建立了有關代數數丟番圖逼近的一個基本定理，並由此構造了劉維爾數，首次證明了超越數的存在性。

劉維爾的成就

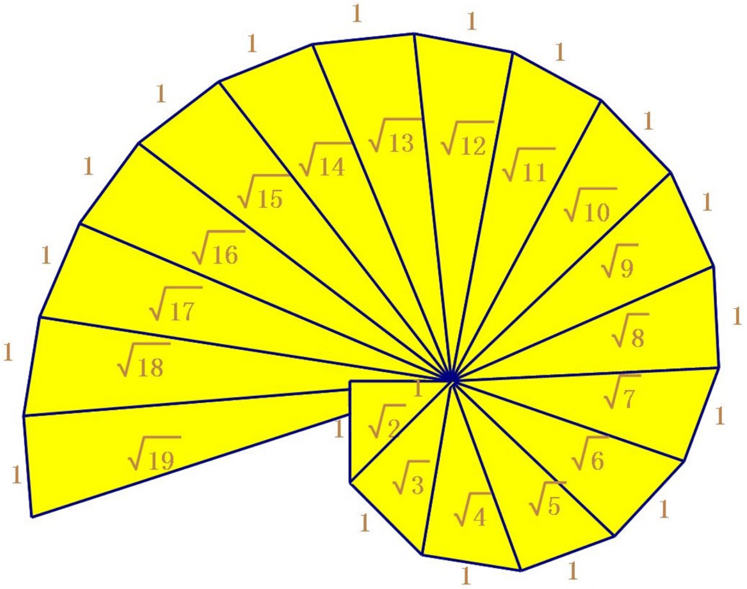
從1856年開始，劉維爾基本放棄了其他方面的數學研究，把精力投入到數論領域。在此後的十年中，他在《純粹與應用數學雜誌》上發表了18篇系列註記，未加證明地給出了許多一般公式，為解析數論的形成奠定了基礎；此外還發表了近200篇短篇註記，討論了質數性質和整數表示為二次型的方法等特殊問題。

《純粹與應用數學雜誌》是劉維爾在1836年創辦的一份雜誌。直到1876年，劉維爾一直擔任它的主編。《純粹與應用數學雜誌》在國際上享有很好的聲譽，被數學家暱稱為「劉維爾雜誌」。

超越數的背景介紹

劉維爾數證明後，許多數學家都致力於對超越數的研究。1873年，法國數學家夏爾·埃爾米特（Charles Hermite，1822—1901）又證明了自然對數底e的超越性，從而使人們對超越數的認識更為清楚。1882年，德國數學家費迪南德·馮·林德曼證明了圓周率也是一個超越數（完全否定了“化圓為方”作圖的可能性）。

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$$



例子及證明

超越數的例子

超越數的例子包括：

◆劉維爾數 $\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0.110001000000000000000001000\ldots$

它是第一個確認為超越數的數，是於1844年劉維爾發現的。

◆ e

◆ e^{a} ，其中a是除0以外的代數數。

◆ π ，林德曼-魏爾斯特拉斯定理，1882年，註：因π是超越數而證明尺規作圖中的「化圓為方」的不可實現性。

◆ e^{π}

◆ $2^{\sqrt{2}}$，更一般地，若a為零和一以外的任何代數數及b為無理代數數則 a^{b} 必為超越數。這就是格爾豐德-施奈德定理。

◆ $\sin 1$

◆ $\ln a$，其中a為一不等於1的正有理數。

劉維爾數

如果一個實數x滿足，對任意正整數n，存在整數p,q，其中q>1有

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$$

就把x叫做劉維爾數。

劉維爾在1844年證明了所有劉維爾數都是超越數，第一次說明了超越數的存在。

劉維爾數的基本性質

劉維爾數一定是無理數

若不然，則 $x=\frac{c}{d},(c,d\in\mathbb{Z},d>0)$。

取足夠大的n 使$2^{n-1}>d$，在$\frac{c}{d}\neq\frac{p}{q}$時有

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|=\left|\frac{c}{d}-\frac{p}{q}\right|=\left|\frac{cq-dp}{dq}\right|\geq\frac{1}{dq}>\frac{1}{2^{n-1}q}\geq\frac{1}{q^n}$$

與定義矛盾。

林德曼-魏爾斯特拉斯定理

林德曼-魏爾斯特拉斯定理（Lindemann–Weierstrass theorem）是一個可以用於證明實數的超越性的定理。它表明，如果 $a_1, ..., a_n$ 是代數數，在有理數$\mathbb{Q}$內是線性獨立的，那麼 $e^{\alpha_1}, ..., e^{\alpha_n}$ 在 $\mathbb{Q}$ 內是代數獨立的。

一個等價的表述是：如果 $a_1, ..., a_n$ 是不同的代數數，那麼指數 $e^{\alpha_1}, ..., e^{\alpha_n}$ 在代數數範圍內是線性獨立的。

這個定理由林德曼和魏爾斯特拉斯命名。林德曼在1882年證明了對於任何非零的代數數 α ，e^{α} 都是超越數，因此推出了圓周率是超越數。魏爾斯特拉斯在1885年證明了一個更一般的結果。

證明e和π的超越性

e和π的超越性是這個定理的直接推論。
假設α是一個非零的代數數，那麼{ α }在有理數範圍內是線性獨立的集合，因此根據定理的第一種表述，$\{e^{\alpha}\}$ 是一個代數獨立的集合，也就是說，e^{α} 是超越數。特別地，$e^1 = e$ 是超越數。

另外，利用定理的第二種表述，我們可以證明，如果α是一個非零的代數數，那麼 $\{0, \alpha\}$ 就是不同的代數數的集合，因此集合 $\{e^0, e^{\alpha}\} = \{1, e^{\alpha}\}$ 在代數數範圍內是線性獨立的，特別地，e^{α} 不能是代數數，因此一定是超越數。

現在，我們來證明π是超越數。如果π是代數數，$2\pi i$（因為 $2i$ 是代數數），那麼根據林德曼-魏爾斯特拉斯定理，$e^{2\pi i}$ 也是超越數(參考歐拉公式)，這與1是代數數的事實矛盾。

歐拉公式（英語：Euler's formula，又稱尤拉公式）

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

把這個證明稍微改變以下，可以證明如果α是一個非零的代數數，那麼sin(α)、cos(α)、tan(α)和它們的雙曲函數也是超越數。

格爾豐德-施奈德定理

格爾豐德-施奈德定理（Gelfond–Schneider theorem）是一個可以用於證明許多數的超越性的結果。這個定理由蘇聯數學家亞歷山大·格爾豐德和德國數學家西奧多·施耐德在1934年分別獨立證明。

表述： 如果α和β是代數數，其中 $\alpha \notin \{0,1\}$ ，且β不是有理數，那麼任何

$\alpha^\beta = \exp\{\beta \log \alpha\}$ 的值一定是超越數。

利用這個定理， $2^{\sqrt{2}}$ 和它的平方根 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 為超越數。

如果沒有α，β是代數數的限制，這個定理未必成立。例如：

令 $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 為超越數（由本定理可得知）， $\beta = \sqrt{2}$ 為代數數，則

$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ ，是代數數。

超越數的證明意義

所有超越數構成的集是一個不可數集，也就是說，幾乎所有的實數和複數都是超越數；儘管如此，現今發現的超越數極少，甚至連 $\pi + e$ 是不是超越數也不知道，因為要證明一個數是超越數或代數數是十分困難的。

超越數的證明，給數學帶來了大的變革，解決了幾千年來數學上的難題——尺規作圖三大問題，即倍立方問題、三等分任意角問題和化圓為方問題。隨着超越數的發現，這三大問題被證明為不可能。

可能的超越數

數e和π的大多數和、積、冪等等，例如

$$e+\pi,\ \pi-e,\ \pi e,\ \frac{\pi}{e},\ \pi^{\pi},\ e^{e},\ \pi^{e},\ \pi^{\sqrt{2}},\ \pi^{\pi^{2}}$$

尚未得知是有理數、代數無理數或超越數。值得注意的例外是

$$\pi+e^{\pi},\ \pi e^{\pi},\ e^{\pi\sqrt{n}}$$

對於所有正整數n，已被證明是超越數。

歐拉-馬斯刻若尼常數

是一個數學常數，定義為調和級數與自然對數的差值：

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \right] = \int_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x} \right) dx$$

它的近似值為

$\gamma \approx 0.57721566490153286060651209008240243104215933 5$

歐拉-馬斯刻若尼常數

該常數最先由瑞士數學家萊昂哈德·歐拉在1735年發表的文章

De Progressionibus harmonicus observationes中定義。歐拉曾經使用C作為它的符號，並計算出了它的前6位小數。1761年他又將該值計算到16位小數。1790年，義大利數學家洛倫佐·馬斯凱羅尼引入了γ作為這個常數的符號，並將該常數計算到小數點後32位。但後來的計算顯示他在第20位的時候出現了錯誤。

目前尚不知道該常數是否為有理數，但是分析表明如果它是一個有理數，那麼它的分母位數將超過10^{242080}。

阿培里常數

在數學中，阿培里常數是一個時常會遇到的常數。在一些物理問題中阿培里常數也會很自然地出現。比如說量子電動力學里，阿培里常數出現在電子的磁旋比展開的第二項與第三項中。

阿培里常數的準確定義是黎曼ζ函數的一個值：ζ(3)

$$\zeta(3)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots$$

它的前45位準確數字為：

ζ(3) = 1.202056903159594285399738161511449990764986292...
這個常數的倒數也是一個有意義的常數：考慮任意三個隨機抽取的正整數，它們之間互質的概率正是阿培里常數的倒數。

黎曼ζ函數

寫作$\zeta(s)$ 的定義如下： 設一複數 s 使得 $\mathrm{Re}(s) > 1$，則定義：

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

在區域 $\{s : \mathrm{Re}(s) > 1\}$ 上，此無窮級數收斂並為一全純函數。歐拉在1740年考慮過 s 為正整數的情況，後來柴比雪夫拓展到 $s > 1$。波恩哈德·黎曼認識到：ζ函數可以通過解析延拓，把定義域擴展到幾乎整個複數域上的全純函數 $\zeta(s)$。這也是黎曼猜想所研究的函數。

黎曼ζ函數在其他奇整數的取值，$\zeta(5),\zeta(7)$（尚未被證明是無理數）

費根鮑姆常數

費根鮑姆常數是分岔理論中重要兩個的數學常數，這兩個常數因數學家費根鮑姆而得名。

第一常數

第一費根鮑姆常數是倍週期分叉中相鄰分叉點間隔的極限比率，用δ表示：

$$\delta=4.669201609102990671853203 8..$$。

第二常數

第二費根鮑姆常數，又叫費根鮑姆減少係數，用α表示：

$$\alpha=2.502907875095892822283902873..$$。

這兩個常數所屬的數集至今仍不明確，可以猜測這兩個都是超越數，但實際上現在連這兩個數是否為無理數的證明都沒有。

米爾斯常數

米爾斯常數是使對於所有正整數***n***，二重指數函數 A^{3^n}

的整數部分都是質數的最小正實數***A***。這個常數以**W·H·**米爾斯命名，他在**1947**年證明了這個常數的存在。

米爾斯常數的值是未知的，但如果黎曼猜想成立，它的值大約為：

A≈1.30637788386308069046…

由米爾斯常數所產生的質數稱為米爾斯質數；如果黎曼猜想成立，這個數列的最初幾項為：**2, 11, 1361, 2521008887……**

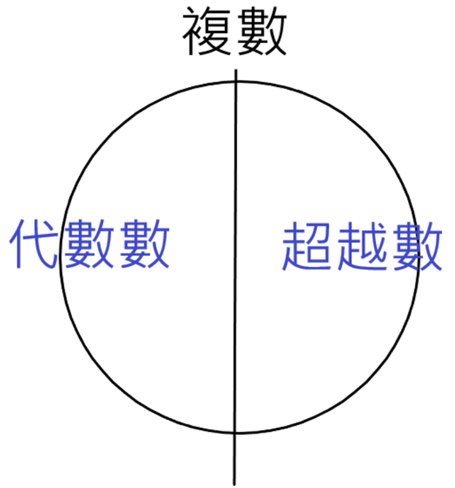
通過計算米爾斯質數，我們可以近似計算米爾斯常數為：$A \approx a(n)^{\frac{1}{3^n}}$

Caldwell & Cheng用這個方法計算出米爾斯常數的差不多七千位數。

目前還沒有閉合公式可以計算米爾斯常數，甚至不知道它是不是有理數

相關的延伸

超越數的證明，給數學帶來了大的變革，解決了幾千年來數學上的難題——尺規作圖三大問題，即倍立方問題、三等分任意角問題和化圓為方問題。



規矩數

是指可用尺規作圖方式作出的實數。在給定單位長度的情形下，若可以用尺規作圖的方式作出長度為的線段，則就是規矩數。規矩數的「規」和「矩」分別表示圓規及直尺，兩個尺規作圖的重要元素。

規矩數一定是代數數（為一整係數代數方程的解），且以此數為其解的最小多項式其次數為 2^n 。

此條件為規矩數成立的必要條件。因此若一個數是超越數（非代數數），或一數對應的最小多項式為三次、五次，此數必定不是規矩數。

最小多項式

假定 V 是一個 F 上的有限維向量空間。若定義集合 $\mathcal{Z}$ 為「所有使 $f(T)$ 為 0 的非零多項式 f」：

$$\mathcal{Z} = \{f \in \mathbb{P}(F) \mid f \neq 0 \text{ and } f(T) = 0\}$$

若 $\mathcal{Z}$ 中的多項式 m 滿足下列兩個性質：

1. **m 的最高次項係數為 1**：即 *monic*。

2. **次數是裡面最小的**：

$$\deg m \leq \deg f \quad \forall f \in \mathcal{Z}$$

則稱 m 為 T 的極小多項式。

尺規作圖

利用尺規作圖可以將二線段的長度進行四則運算，也可以求出一線段長度的平方根

因此符合以下任一條件的均為規矩數

1. 整數
2. 所有有理數
3. 規矩數a的平方根，又或是2^n 次方根
4. 有限個規矩數相加、相減、相乘、相除（除數不得為0）的結果 。

尺規作圖

定義了直尺和圓規的特性後，所有的作圖步驟都可以歸化為五種基本的步驟，稱為作圖公法

1. 通過兩個已知點，作一直線。
2. 已知圓心和半徑，作一個圓。
3. 若兩已知直線相交，確定其交點。
4. 若已知直線和一已知圓相交，確定其交點。
5. 若兩已知圓相交，確定其交點。

倍立方問題

相關傳說

傳說中，這問題的來源，可追溯到公元前429年。一場瘟疫襲擊了希臘提洛島（Delos），造成四分之一的人口死亡。島民們去神廟請示阿波羅的旨意，神諭說：要想遏止瘟疫，得將阿波羅神殿中那正立方的祭壇加大一倍。人們便把每邊增長一倍，結果體積當然就變成了8倍，瘟疫依舊蔓延；接著人們又試著把體積改成原來的2倍，但形狀卻變為一個長方體……第羅斯島人在萬般無奈的情況下，只好鼓足勇氣到雅典去求救於當時著名的學者柏拉圖。

倍立方問題

不可能性的證明

證明使用反證法。倍立方問題是指已知單位長度1
要作出$\sqrt[3]{2}$ 的長度。反設可以作出 $\sqrt[3]{2}$ 說明它是一個規矩數。

$z = \sqrt[3]{2}$的最小多項式是：

$$z^3 - 2 = 0$$

不是2的冪次，這與先前的結論矛盾。所以，用尺規方法無法作出一個立方體，使得它的體積是已知立方體的兩倍

三等分任意角

問題闡述

任意給定一個角，是否能夠通過以上說明的五種基本步驟，於有限次內作出另一個角，等於這個角的三分之一？

提示

任何可以用尺規作圖作出的點，其座標對應一個規矩數，它的最小多項式次數為 2^n

三等分任意角

不可能性證明

用反證法證明三等分任意角是不可能的。反設可以用尺規作圖將任意角三等分，代表對任意角度是θ 的角，均可以由尺規作圖得到角度為$\frac{\theta}{3}$ 的角

在已知單位長度和$\cos\theta$的時候能做出$\cos\frac{\theta}{3}$的長度。設L是包含了$\cos\theta$和單位長度1的域。用尺規作圖可以得到$z=\cos\frac{\theta}{3}$

三等分任意角

不可能性證明

然而根據三倍角公式：

$$\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3} = 4z^3 - 3z。$$

然而3不是2的冪次，這和之前的結論矛盾。如此便說明，無法用尺規作圖將任意角三等分

化圓為方

問題闡述

給定一個圓，是否能夠通過以上說明的五種基本步驟，於有限次內作出一個正方形，使得它的面積等於圓的面積

資料參考來源

◆ 約瑟夫·萊歐維爾

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E7%BA%A6%E7%91%9F%E5%A4%AB%C2%B7%E5%88%98%E7%BB%B4%E5%B0%94

◆ 超越數

https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/%E8%B6%85%E8%B6%8A%E6%95%B8

◆ 萊歐維爾數

https://zh.m.wikipedia.org/zhtw/%E5%88%98%E7%BB%B4%E5%B0%94%E6%95%B0

◆ 勒貝格測度

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%8B%92%E8%B4%9D%E6%A0%BC%E6%B5%8B%E5%BA%A6

資料參考來源

◆ 規矩數

https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/%E8%A6%8F%E7%9F%A9%E6%95%B8

◆ 倍立方

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%80%8D%E7%AB%8B%E6%96%B9

◆ 三等分

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E4%B8%89%E7%AD%89%E5%88%86%E8%A7%92

◆ 圓

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%8C%96%E5%9C%93%E7%82%BA%E6%96%B9

感謝聆聽