

# 環球城市數學競賽(2015年)

## 高中組秋季高級卷

### 第二組

組員:411031116楊子毅 411031117劉秉翰  
411031118張銓敏 411031121戴士晟  
411031125陳宣睿 411031128蔣一豪

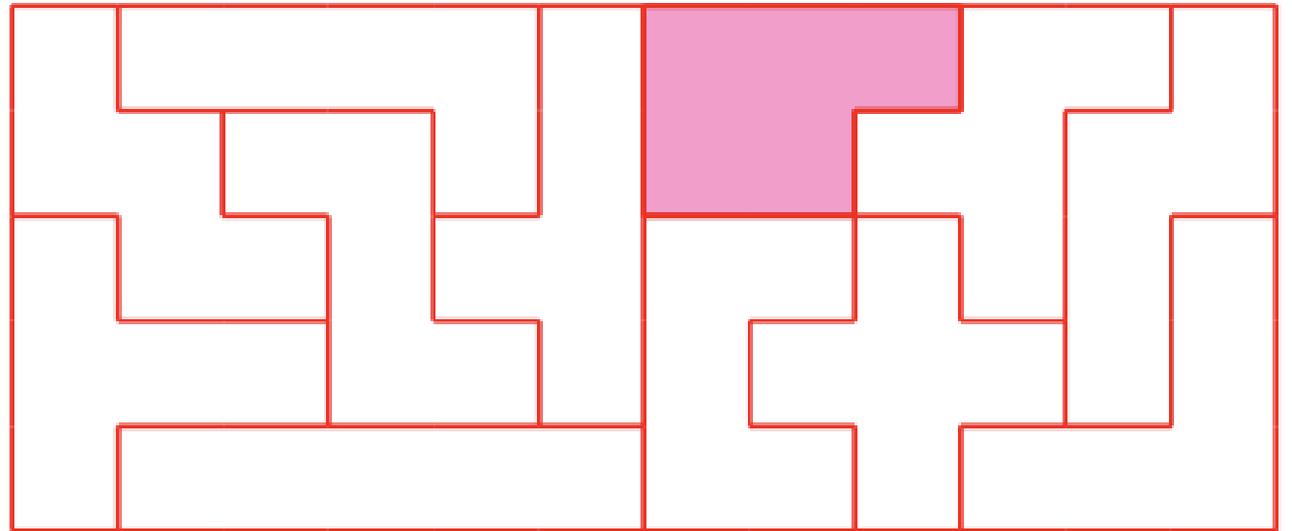
# 分類:等比數列

- **1.** 一個有 **37** 個正整數的等比數列，它的首項與末項互質。請證明此數列中的第 **19** 項是某個整數的 **18** 次方。

## 分類:幾何

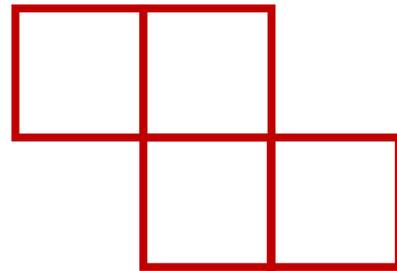
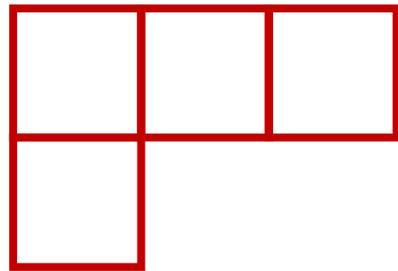
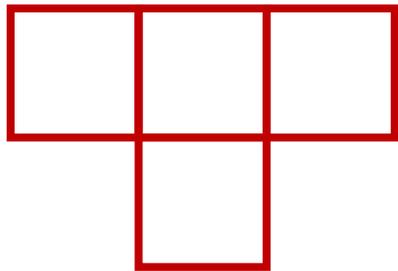
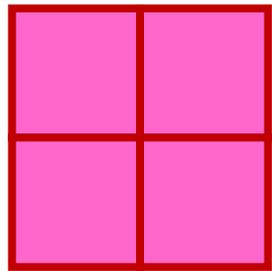
- 2. 將一個 $10 \times 10$ 的棋盤劃分為 20 個面積相等的子棋盤，這些子棋盤互相鄰接在一起的共同邊總共有 80 單位正方形邊長。請證明所有這 20 個子棋盤都互相全等。

1.  $(10 \times 10) \div 20 = 5$  算出每塊面積為多少。
2.  $(40 + 2 \times 80) \div 20 = 10$  算出每塊邊長為多少。
3. 比對下表(只有粉紅色那塊符合第2點)
4. 由兩塊粉色圖塊組成  $2 \times 5$  的矩形，故20塊這樣的圖塊可以組成  $10 \times 10$  的正方形。



類似題:將一個 $8 \times 8$ 的棋盤劃分為 16 個面積相等的子棋盤，這些子棋盤互相鄰接在一起的共同邊總共有 48 單位正方形邊長。請證明所有這 16 個子棋盤都互相全等。

1.  $(8 \times 8) \div 16 = 4$  算出每塊面積為多少。
2.  $(32 + 2 \times 48) \div 16 = 8$  算出每塊邊長為多少。
3. 比對下表(只有粉紅色那塊符合第2點)
4. 16塊這樣的圖塊可以組成  $8 \times 8$  的正方形。

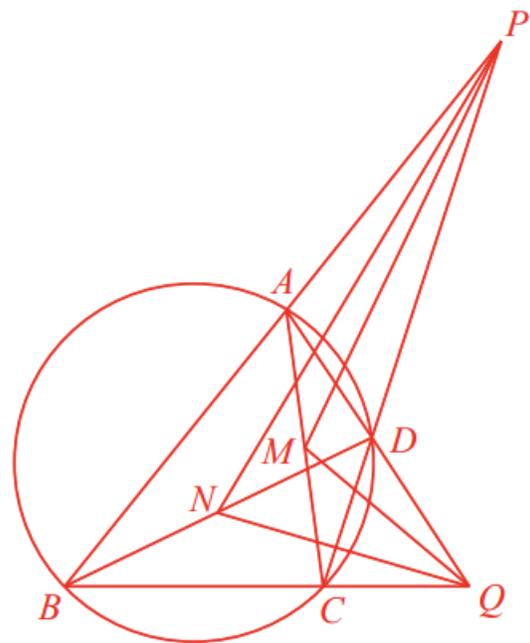


## 分類:多項式

- **3.** 一個非常數多項式之係數都是絕對值不大於 **2015** 的整數。請證明此多項式的每一個正根都大於  **$1/2016$** 。

## 分類:幾何

- 4. 延長一個內接於圓的四邊形之兩雙對邊，令它們分別交於點  $P$ 、 $Q$ 。若此四邊形的兩對角線之中點分別為點  $M$ 、 $N$ ，請證明  $\angle PMQ + \angle PNQ = 180^\circ$ 。



# 分類:算子理論

- 5. 在黑板上寫下幾個相異實數。小平想要造出一個表達式用以恰好顯示這幾個數值。他可以在表達式中任意使用實數、括號以及運算符號 $+$ 、 $-$ 、 $\times$ ，他同時也可以使用特殊符號 $\pm$ 。當在計算表達式的值時，在遇到所有 $\pm$ 時，都必須計算 $+$ 與 $-$ 號的所有組合情形。例如，表達式 $5 \pm 1$ 所得出的值為 $\{4, 6\}$ 而 $(2 \pm 0.5) \pm 0.5$ 所得出的值為 $\{1, 2, 3\}$ 。請問小平能否作出一個表達式，
  - (a) 如果黑板上的數為 $1, 2, 4$ ？
  - (b) 如果黑板上的數為任意 $100$ 個的相異實數？

# 分類:空間坐標系

- **6.** 小貝有一個直徑為 **20 cm** 的球。利用一把長刀，小貝進行了兩兩互相垂直的三次切割，每次都切  **$h$  cm** 深，每次都在切面上產生了一條高度為  **$h$  cm** 的圓弧。請問是否必定會將此圓切為二片或二片以上，如果(a)  **$h = 17$  cm** (b)  **$h = 18$  cm** ？

# 分類:排列組合

- 7. 有  $n$  位身高都互不相同的小朋友排成一列。每次操作都先將此列的小朋友分為最少的群體，使得每個群體內的小朋友之身高都是漸升的順序，這些群體可能只有一位小朋友。接下來將每個群體的順序倒轉，使它們的身高變為漸減的。請證明經過  $n - 1$  次的操作後，保證可將所有小朋友排成身高漸減的順序。

謝謝大家