2014

環球城市數學競賽

高　中　組　秋　季　高　級　卷

廖英秀/羅允澤/高新雄/林咏勳/鄭蕙倪/柯彥廷

題目翻譯

(共七題)

01

證 明 任 何 有 內 切 圓 的 多 邊 形 都 有 三 個 邊 可 以 組 成 一 個 三 角 形 。

幾何

02

在環形道路上，有 25 個相隔等距的攤子，每個攤子有一名巡警，編號分別是順序1 到 25。巡警通過沿著道路移動攤位，他們的編號從1到25按順時針的順序。

如果巡警的總距離盡可能縮短，請證明其中一人會留在同一個攤子。

代數

03

Gregory 在黑板上寫下 100 個數字併計算它們的乘積。在每一步中，他將每個數字加 1 併計算它們的乘積。

如果每次移動後的乘積不變，Gregory 最多可以移動多少次？

序列

04

三角形ABC的內圓分別在D、E、F處與BC、CA、AB相切。
假設AD、BE、CF在G點共線，三角形GDE、GEF、GFD的外接圓在D、E、F之外的六個不同點處與ABC的邊相交。

證明這六個點是同圈的。

幾何

Peter準備了一個由m個字母組成的所有可能單詞的列表，每個字母是T、O、W或N，使得每個單詞中Ts和Os的數量相同。Betty準備了一個由2m個字母組成的單詞列表，每個字母是T或O，這樣每個單詞中Ts和Os的數量相同。

誰的列表包含更多的單詞?

序列

令 PQR 是一個給定的三角形。AFBDCE是一個非凸六邊形，內部D、E和F處的角度均為 181°。此外BD+DC=QR,CE+EA=RP,AF+FB=PQ，角度EAF=角度RPQ-1°，角度FBD=角度PQR-1°和角度DCE=角度QRP-1°。

證明BD/DC=CE/EA=AF/FB

幾何

代數

每天政府都會選擇正整數 m 和 n。那天，x 克黃金可以交換 y 克鉑，使得 $mx = ny$。最初，$m = n = 1001$。在隨後的每一天，政府將 m 和 n 中的一個精確地減少 1，並且在 2000 年之後天，兩個數字都等於 1。起初有一人有 1 公斤黃金和鉑金。

在事先不知道第二天 m 和 n 中的哪一個會減少的情況下，請問可以有一定的方式進行一些巧妙的交流，並最終在這 2000 天之後至少得到2公斤黃金和鉑金？

題目講解

(第三題)

03

Gregory 在黑板上寫下 100 個數字併計算它們的乘積。在每一步中，他將每個數字加 1 併計算它們的乘積。

如果每次移動後的乘積不變，Gregory 最多可以移動多少次？

序列

03 講解

假設 a1, a2,...,a100 是實數，其中存在實數 k，使得 (k + a1)(k + a2)⋯(k + a100) = a1a2⋯a100。 將此視為 k 的等式，最多有 100 個實根，其中一個為 0。由此可見，Gregory 最多可以移動 99 步。 如果 Gregory 從 -99 到 0 的數字開始，則可以達到此最大值。初始乘積為 0，並且在接下來的 99 步中保持此值，直到他達到 100！在第 100 步。

序列

相似題

(第三題)

03 相似題

允澤在黑板上寫下80個數字，並計算他們的乘積。在每一步中，他將每個數字加 2 並計算它們的乘積。如果每次移動後的乘積不變，允澤最多可以移動多少次？

序列

03 相似題

假設 a1, a2,...,a80 是實數，其中存在實數 k。
使得 (k + a1)(k + a2)⋯(k + a80) = a1a2⋯ a80。 將此視為 k 的等式，最多有 80 個實根，其中一個乘積為 0。由此可見，允澤最多可以移動 80 步。 如果允澤從 -158 ~ 0 的數字開始，則可以達到此最大值。初始乘積為 0，並且在接下來的步中保持此值，直到他達到 0~158 在第 80 步。

序列

2014

感謝觀看 THANKS