數學解題方法

第五組-作業1

組員

team member

- **林政勳**
  4 1 0 7 3 1 1 0 4
- **許定閎**
  4 1 0 7 3 1 1 2 0
- **王麒彰**
  4 1 0 7 3 1 1 0 6
- **許瑜芹**
  4 1 0 7 3 1 1 4 8
- **王霆軒**
  4 1 0 7 3 1 1 0 7
- **梁靜玲**
  4 1 0 9 3 1 2 4 5

2012

秋季賽

高中組高級卷

第一題

f i r s t   q u e s t i o n

給一個無窮數列 a_1、a_2、a_3 ...對於每一個正整數 k，總是存在一個正整數t =t(k)使得 $a_k = a_{k+t} = a_{k+2t}$ =...。請問此數列是否必定為循環數列？(即是否 存在一個正整數 T 使得對於任意正整數 k，都會有 $a_k = a_{k+T}$

Given an infinite sequence of numbers a_1、a_2、a_3. . . For each positive integer k there exists a positive integer t=t(k) such that $a_k = a_{k+t} = a_{k+2t}$ . . . Is this sequence necessarily periodic? That is, does a positive integer T exist such that $a_k = a_{k+T}$ h positive integer k?

第二題

s e c o n d   q u e s t i o n

小吉與小丁玩以下的遊戲。初始時，小吉將 1001 顆珠子分為三堆放入三個箱 子內。小丁知道每一個箱子內珠子的數量，他挑選一個 1 到 1001 的整數 N。 接著，小吉從某一個箱子中取出 0 個或數個珠子放進第四個本來就是空的箱 子，使得這四個箱子其中一個、二個或三個箱子內珠子的總數量為 N 顆。小 吉欲使第四個箱子內的珠子越少越好，小丁則希望越多越好。無論小吉如何 操作，請問小丁保證最多可以得到多少顆珠子?

Chip and Dale play the following game. Chip starts by splitting 1001 nuts between three piles, so Dale can see it. In response, Dale chooses some number N from 1 to 1001. Then Chip moves nuts from the piles he prepared to a new (fourth) pile until there will be exactly N nuts in any one or more piles. When Chip accomplishes his task, Dale gets an exact amount of nuts that Chip moved. What is the maximal number of nuts that Dale can get for sure, no matter how Chip acts? (Naturally, Dale wants to get as many nuts as possible, while Chip wants to lose as little as possible).

第三題

The third question

有一輛汽車沿著一個圓形跑道不斷地以順時針方向行駛。在中午時刻，小玉與小珍分別在跑道上兩個不同的地點開始記錄此汽車經過她們的時刻。過了一些時候，她們兩人同時結束記錄工作並比對兩人所記錄的結果。已知汽車至少各經過她們 30 次以上，在小玉的記錄上，每次汽車經過她所需的時間都比上一次快 1 秒鐘；在小珍的記錄上，每次汽車經過她所需的時間都比上一次慢 1 秒鐘。請證明她們記錄工作的時間不少於 1.5 小時。

A car rides along a circular track in the clockwise direction. At noon Peter and Paul took their positions at two different points of the track. Some moment later they simultaneously ended their duties and compared their notes. The car passed each of them at least 30 times. Peter noticed that each circle was passed by the car 1 second faster than the preceding one while Paul’ s observation was opposite: each circle was passed 1 second slower than the preceding one.

第三題解法

The third question

已知兩個人至少都看到車子跑了 29 圈。設小玉看到車子跑一圈的時間依序分別為 m+14、m+13、…、m−14秒；設小珍看到車子跑一圈的時間依序分別為 p−14、 p−13、…、p +14秒。
則知兩人的紀錄上，車子跑完 29 圈的時間分別為 29m 以及 29p。
因為小珍看到的前 15 圈覆蓋了小玉看到的第1~14圈或是第2~15圈，在這兩種情況下，都可得(p-14)+(p-13)+…+p>(m+13)+(m+12)+..+m
同樣的，小玉看到的後 15 圈覆蓋了小珍看到的16~29圈或是 15~28圈，而在這兩種情況下，都可得(m-14)+(m-13)+…+m>(p+13)+(p+12)+..+p

將此兩式相加，我們得到 p+m>392，故29p+29m>392x29=11368
故其中至少有一個人所觀測到的 29 圈時間超過11368/2=5684秒，而 1.5 小時即 為 5400 秒，故命題得證。

第三題類似題

The third question

有一輛摩托車沿著一個正方形廣場不斷地以順時針方向行駛。在中午時刻，小閔與小紅分別在跑道上兩個不同的地點開始記錄此摩托車經過她們的時刻。過了一些時候，她們兩人同時結束記錄工作並比對兩人所記錄的結果。已知摩托車至少各經過她們 26次以上，在小閔的記錄上，每次摩托車經過她所需的時間都 比上一次快 2 秒鐘；在小紅的記錄上，每次摩托車經過她所需的時間都比上一次慢 2 秒鐘。請證明她們記錄工作的時間不少於2小時

類似題解法

The third question

已知兩個人至少都看到車子跑了 25 圈。設小閔看到車子跑一圈的時間依序分別為 m+24、m+22、…、m−24秒；設小紅看到車子跑一圈的時間依序分別為 p−24、 p−22、…、p+24秒。
則知兩人的紀錄上，車子跑完 25 圈的時間分別為 25m 以及 25p。
因為小紅看到的前 13圈覆蓋了小閔看到的第1~12圈或是第2~13圈，而在這兩種情況下，都可得(p-14)+(p-13)+…+p>(m+13)+(m+12)+..+m
同樣的，小閔看到的後13圈覆蓋了小紅看到的第14~25圈或是第13~24圈，而在這兩種情況下，都可得(m-24)+(m-22)+……+m > (p+22)+(p+20)+……+p

將此兩式相加，我們得到，p+m > 576，故25p+25m > 576×25=14400。其中至少有一個人所觀測到的25圈時間超過14400/2=7200秒，而2小時即為7200秒，故命題得證。

第四題

The fourth question

點 I 為△ ABC 之內心，一個通過點 B 與點 I 的圓交 AB 於點 D 且交 BC 於點 E。點 K 為 DE 之中點，請證明∠AKC > 90。

In a triangle ABC two points, C1 and A1 are marked on the sides AB and BC respectively (the points do not coincide with the vertices). Let K be the midpoint of A1C1 and I be the incentre of the triangle ABC. Given that the quadrilateral A1BC1I is cyclic, prove that the angle AKC is obtuse.

第五題

The fifth question

小明與小平玩以下的遊戲。首先，小明選定一個正整數 a，然後讓小平猜。 小平只知道小明選定的數之數碼和為 2012。每一次小平可以選一個正整數 x， 接著小明必須說出|x - a|的數碼和。請問至少要經過多少次小平才保證可以猜 出小明所選的數?

Peter and Paul play the following game. First, Peter chooses some positive integer a with the sum of its digits equal to 2012. Paul wants to determine this number; he knows only that the sum of the digits of Peter’s number is 2012. On each of his moves Paul chooses a positive integer x and Peter tells him the sum of the digits of |x − a|. What is the minimal number of moves in which Paul can determine Peter’s number for sure?

第六題a

The sixth question -a

給定一個圓球 O 及其內部一點 A，點 A 不須與 O 重合。

(a) 通過點 A 畫三條互相垂直的直線交此球於六個點。請證明這六個點的質量中心與所選的三條直線無關。(註：空間中座標為(x_i, y_i, z_i)的 n 個點的質量中心為 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n},\frac{y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n}{n},\frac{z_1+z_2+z_3+\ldots+z_n}{n})$ 。)

(a) A point A is marked inside a sphere. Three perpendicular lines drawn through A intersect the sphere at six points. Prove that the centre of gravity of these six points does not depend on the choice of such three lines.

第六題b

The sixth question -b

給定一個圓球 O 及其內部一點 A，點 A 不須與 O 重合。

(b)畫一個中心為點 A 的正二十面體。從 A 向此正二十面體的各頂點畫射線 交此球於 12 個點。請證明這 12 個點的質量中心與所選的正二十面體無 關。(一個正二十面體是由 20 個正三角形所構成的正多面體，每一個頂點 皆為 5 條稜的交點)

(b) An icosahedron with the centre A is placed inside a sphere (its centre does not necessarily coincide with the centre of the sphere). The rays going from A to the vertices of the icosahedron mark 12 points on the sphere. Then the icosahedron is rotated about its centre. New rays mark new 12 points on the sphere. Let O and N be the centres of mass of old and new points respectively. Prove that O = N.

第七題

The seventh question

有 1000000 位士兵排成一長列，軍官將此列隊伍分割為人數不一定相同的 100 個的小段，接著此軍官將這些小段依照某種順序重新排成一長列，重排時在 每一個小段內的士兵都不改變他在這一小段內的順序。軍官繼續重複以上的 操作且每次操作所分割各小段的人數與順序都與第一次的操作相同；重新排 成一長列時的順序也都與第一次的操作相同。現記錄下每一位原來位於第一 小段內的士兵經過多少次操作後又重回到第一段中的次數，請證明這些操作 的次數最多只能有 100 個相異的數。

There are 1 000 000 soldiers in a line. The sergeant splits the line into 100 segments (the length of different segments may be different) and permutes the segments (not changing the order of soldiers in each segment) forming a new line. The sergeant repeats this procedure several times (splits the new line in segments of the same lengths and permutes them in exactly the same way as the first time). Every soldier originally from the first segment recorded the number of performed procedures that took him to return to the first segment for the first time. Prove that at most 100 of these numbers are different.

感謝觀看

thanks for watching