環球城市數學競賽 2010 秋季賽 高中組

第七組

411031108 魏碩廷　411031119 陳柏諺　411031137 游智宇

411031139 張天傑　411031216 許仲勛

初級卷

1.(代數)—題目

有一台錢幣兌換機可將 M 國錢 S 元兌換成 L 國 1 元，亦可將 L 國1/S元兌換成 M 國錢 1 元，其中 S 是正實數。兌換機吐出的金額採四捨五入至整數元。

(a) 用此機器將若干 L 國錢兌換成 M 國錢，再將所換到的 M 國錢全部換回L 國錢。請問經過一次上述兌換後，是否有可能最後所得的 L 國錢比原來的錢多？

(b) 假設上述的答案為「可能」，將手中所有的錢幣不斷地全部一起反覆兌換。請問所得的錢是否有可能會不斷地增多？

1.(代數)—解答

(a)若 S=1，則明顯可知最後所得的 L 國錢無法比原來的錢多。

若 S>1，則用 L 國錢 n 元，則知最多等值於 M 國錢 nS+a 元，其中 a 為實數且 $0 \le a \le \frac{1}{2}$。若此時用 M 國錢 nS+a 元兌換回 L 國錢，則匯率為 $\frac{nS+a}{S} = n + \frac{a}{S}$。因 S>1，故$\frac{a}{S} <\frac{1}{2}$，即兌換機吐出的金額仍為 n 元，因此不會有任何比原來的錢多的可能。

故知賺錢的機會僅 S<1 時有可能。實際上若取 $S = \frac{1}{2}$，則 1 元 L 國錢可兌換得 $\frac{1}{2}$ 元 M 國錢，故此時兌換機吐出的金額為 1 元 M 國錢，再用這 1 元 M 國錢兌 換即可得 2 元 L 國錢。故答案為可能。

1.(代數)—解答

(b) 由(a) 的討論中可知此時 $S<1$，即 $\frac{1}{S}>1$ ，再由(a) 的討論中知 M 國錢在兌換 時經過一來一往之後不會增加，亦即經過一次如(a)的兌換之後，不會再繼續賺 錢了。
故答案為不可能。

2.(幾何)—題目

有一個凸四邊形 ABCD 的兩條對角線互相垂直，且其相交於點 O。已知三角形 AOB、三角形 COD 的內切圓半徑之和等於三角形 BOC、三角形 DOA 的內切圓半徑之和。

(a) 請證明四邊形 ABCD 有內切圓。

(b) 請證明四邊形 ABCD 對稱於其中一條對角線。

2.(幾何)—解答

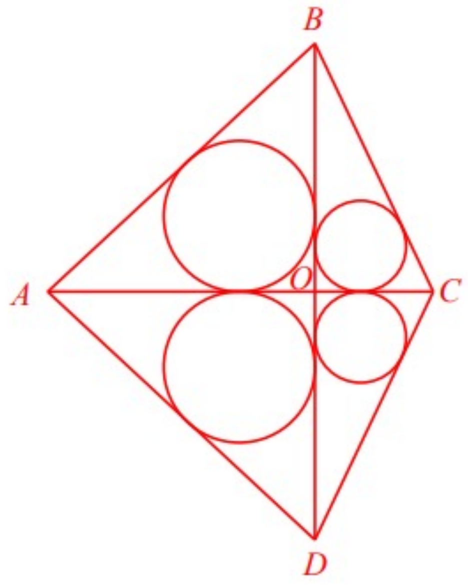
(a) 可知三角形 AOB、三角形 COD 的內切圓半徑之和為

$$\frac{1}{2}(OA+OB-AB)+\frac{1}{2}(OC+OD-CD)$$

而三角形 BOC、三角形 DOA 的內切圓半徑之和為

$$\frac{1}{2}(OB+OC-BC)+\frac{1}{2}(OD+OA-DA)$$

故知 $AB+CD=BC+DA$，此即為四邊形 $ABCD$ 有內切圓的充分必要條件。



2.(幾何)—解答

(b) 可假設四邊形 $ABCD$ 中最長的邊為 DA。由畢氏定理可知：

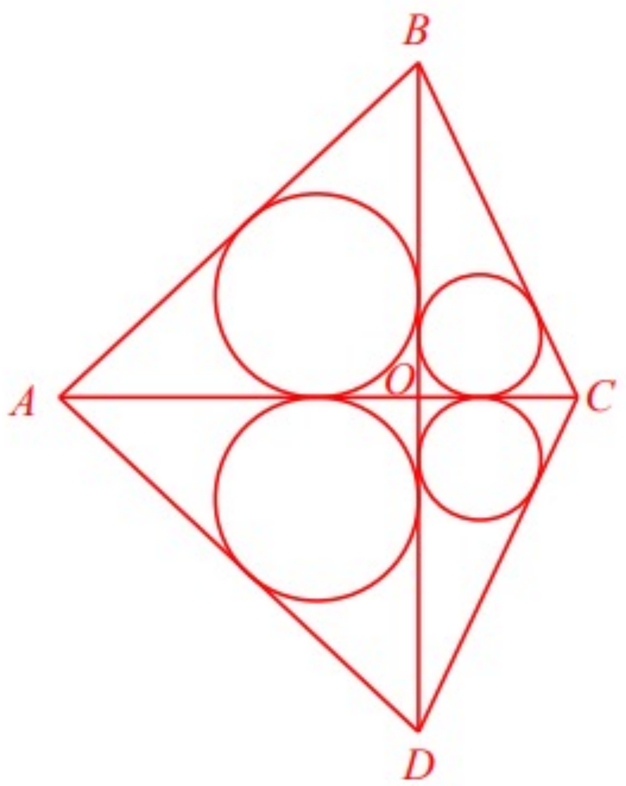
$$AB^2+CD^2=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2=BC^2+DA^2$$

由 $AB+CD=BC+DA$ 知

$(AB+CD)^2=(BC+DA)^2$，故 $AB\times CD=BC\times DA$，因此 $(AB-CD)^2=(DA-BC)^2$。

若 $AB-CD=DA-BC$，則 $AB=DA$ 且四邊形 $ABCD$ 對稱於 AC；

若 $CD-AB=DA-BC$，則 $CD=DA$ 且四邊形 $ABCD$ 對稱於 BD。



3.(數列級數)—題目

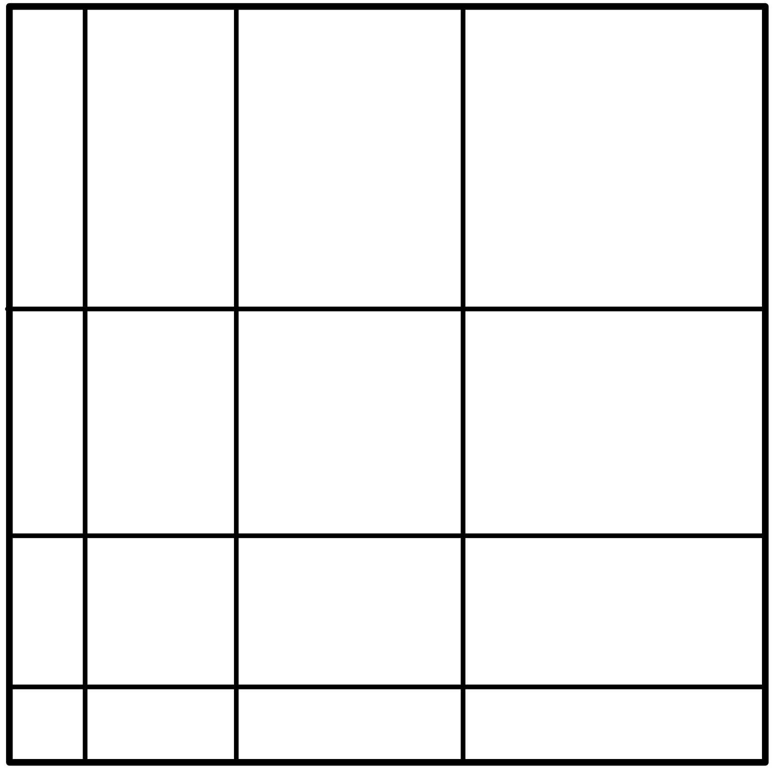
一座警察局位於兩端都可無限延伸僅有的一條直線公路上，一位小偷從警察局偷了一輛汽車。這輛汽車的最大速度等於巡邏警車最大速度的 90%。當大家發現車子被偷了，一位警察打算開巡邏警車去緝捕這位小偷，但他不知道小偷沿著公路朝哪個方向逃跑。請問警察是否保證能緝捕到小偷？請詳述您的理由。(註：此題純為數學問題，不考慮小偷何時偷車、油料多寡、人的壽命、....等各項因素)

3.(數列級數)—解答

令巡邏警車的速度為1，則警察可採取以下策略:警察隨意往一個方向追逐一段時間q，接著立即往相反方向追逐一段時間q^2，然後再立即往相反方向追逐一段時間q^3，以此類推。若再令警察追逐至時間q^n時的追逐方向為正向、相反方向為負向,則可知警察追逐至完成時間q^n後,共花費時間$q^n+q^{n-1}+\cdots+$q=$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$，此時移動距離為$q^n-q^{n-1}+\cdots+(-1)^n$q=$\frac{q^{n+1}-(-1)^n q}{q+1}$，故可以得知警察在此方向的平均速度為$\frac{q^{n+1}-(-1)^n q}{q+1}\div\frac{q^{n+1}-q}{q-1}>\frac{q-1}{q+1}$。若要追到小偷,其平均速度必須比小偷的速度快，亦即需要求$\frac{q-1}{q+1}>\frac{9}{10}$，故在q>19時,警察必可緝捕到小偷。

4. (代數)—題目

將一塊大正方形木板以 n - 1 條水平線與 n - 1 條鉛垂線劃分為 n^2 個小矩形。將這些小矩形格子黑白相間塗色。若此大正方形的對角線恰好通過 n 個黑色的正方形。請證明所有黑色的小格子之總面積不小於所有白色小格子之總面積。



4. (代數)—解答

令 n - 1 條鉛垂線所切出的 n 塊鉛垂木條的寬度依序為 a_1 、 a_2 、... 、 a_n ，而 n - 1 條水平線所切出的 n 塊水平木條的寬度依序為 b_1 、 b_2 、... 、 b_n 。可假設位於左下角的小格子為黑色正方形，並由對角線通過 n 個黑色正方形可知 $a_i=b_i$ ， 其中$1\leq i \leq n$。 此時若令黑色格子的面積為正、白色格子的面積為負，則可知長為 a_i 、寬 為 b_j 的小格子之面積為$(-1)^{i+j} a_i b_j$ ，故大正方形木板的「總面積」之值為

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\,a_i b_j=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}a_i\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j}b_j=(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}a_i)^2\geq 0$$

即所有黑色的小格子之總面積不小於所有白色小格子之總面積。

5.(代數、數列)—題目

有一項競賽共有 55 位參賽者，每場比賽都由兩位選手配對進行淘汰賽，且一場賽完後才接著賽下一場，輸者立即被淘汰出局。每場比賽中，兩位配對的選手截至此場比賽前之勝局數量之差都不得超過 1 局。請問此競賽中的獲得冠軍之選手最多共可贏多少局？

5.(代數、數列)—解答

令 a_n 為產生贏得 n 局之贏家所有比過的比賽最少的總人數，即 $a_1 = 2$、 $a_2 = 3$。而在決定贏得第 n 局之贏家時，其中一位參賽者必先贏得 n−1 局、另 一位參賽者贏得 n−2 局，且不會有人同時與這兩位參賽者比賽過，故可知 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ ，此即斐波那契數列，故知 $a_3 = 5$、 $a_4 = 8$、$a_5 =13$、$a_6 = 21$、$a_7 = 34$ 而 $a_8 = 55$。因一共有 55 位參賽者，故知獲得冠軍之選手最多共可贏 8 局。

高級卷

1.(幾何)—題目

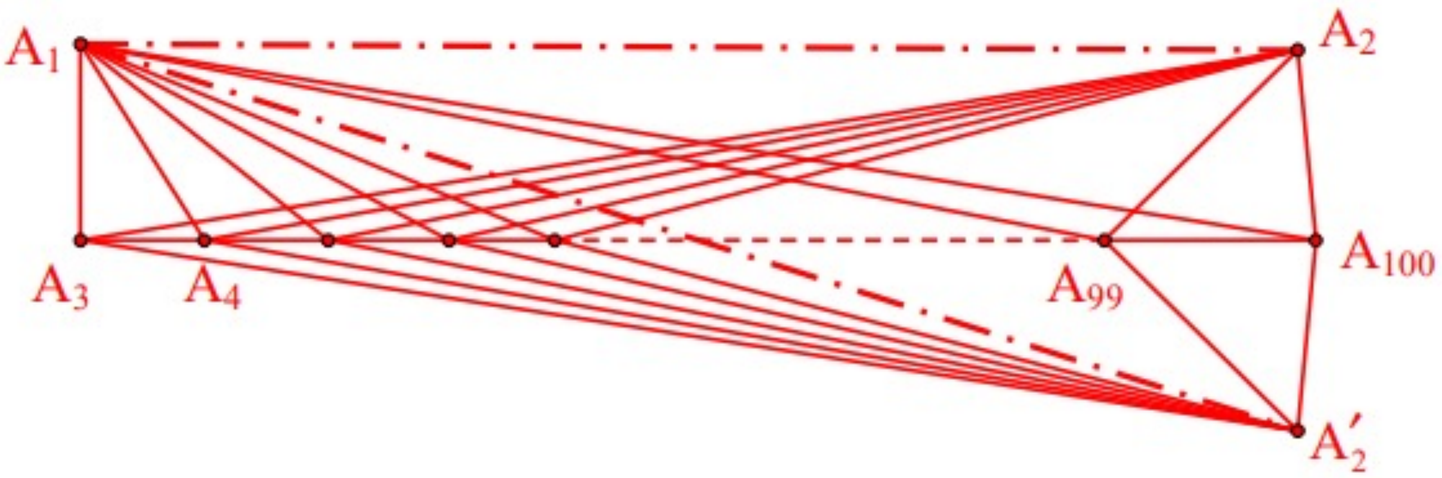
平面上有 A_1, A_2, ……, A_{100} 一百個點，丈量出這些點兩兩之間的距離，並在紙上記錄出所有 4950 個距離 $D(A_i, A_j)=d_{ij}$。

(a) 僅有一個記錄 $D(A_1, A_2)=d_{12}$被擦除。請問利用剩下來的資料是否保證可以正確地重新填回這個資料？

(b) 假設任意三點不在同一直線上，其中有 k 個記錄被擦除，請問保證可以正確地重新填回所有資料的最大 k 值是什麼？

1.(幾何)—解答

(a) 無法保證。若 A_3、A_4、⋯、 A_{100}這 98 個點在同一直線上而 A_1、 A_2 在線外， 如下圖所示：



則 $D(A_1, A_2)=d_{12}$被擦除後而其他記錄均保留時，無法判定 A_2的位置，故無法確定 $D(A_1, A_2)=d_{12}$之值。

1.(幾何)—解答

(b) 最大 k 值是 96。 假設有 97 個記錄被擦除。若這些被擦除的記錄都與點 A 有關，則我們僅知道 AB、AC 的長度，其中 B、C 為其餘 99 個點中的兩個點。因任意三點不在同一直 線上，故 A 不在 BC 上，此時我們無法得知 A 在直線 BC 的哪一側，故無法正確 地重新填回所有的資料。 。

1.(幾何)—解答

現假設最多 96 個記錄被擦除。建構一個以這 100 個點為頂點的圖，若兩個點 之間的距離記錄被擦除，則將這兩個頂點用一條邊連接它們。可知此圖最多有 96 條邊，且可知此圖至少有四個組成部分。從四個部分裡各挑選出一個頂點 A、 B、C、D，則這四個點兩兩之間的距離都是未被擦除的，故可確定這四個點的 相對位置。對於任何一個其它的頂點 P 而言，它只能與這四個點中的某一個頂 點位於相同的組成部分中，也因此可知 P 與 A、B、C、D 中的三點的距離是未 被擦除的，利用這些記錄這就足以確定點 P 與 A、B、C、D 的相對位置。如此 繼續操作下去，便可正確地重新填回所有的資料

2.(代數)—題目

在一個圓形跑道上，2n 位自行車選手同時從同一點同向以不同的均勻速度出發。若兩位自行車選手在同時刻再度位於同地點，則稱之為「相遇」。已知沒有三位或三位以上的自行車選手同時刻相遇在同一點。任兩位自行車選手都至少再相遇過一次，請證明在最後一對選手第一次相遇之際，每位自行車選手與其他選手相遇次數之總和至少 n^2 次。

2.(代數)—解答

令自行車手C_i的速度為v_i使得$v_1<v_2<\cdots<v_{2n}$，其中$1\le i\le 2n$。

再令 $u=\min\{v_2-v_1, v_3-v_2, \cdots, v_{2n}-v_{2n-1}\}$，則知若$j>i$時，$v_j-v_i\ge(j-i)u$。

接著令圓形跑道的長度為d，則可知從最後一對選手在每經過時間$\dfrac{d}{u}$則相遇一次，而車手C_i與C_j每經過時間$\dfrac{d}{v_j-v_i}$則相遇一次。

由$v_j-v_i\ge(j-i)u$可知$(j-i)\dfrac{d}{v_j-v_i}\le\dfrac{d}{u}$，故知車手$C_i$與$C_j$在每經過時間$\dfrac{d}{u}$，必至少相遇$j-i$次。而對於車手$C_i$來說，必分別與車手$C_1$、$C_2$、⋯、$C_{i-1}$相遇$1+2+\cdots+(i-1)$次且分別與車手$C_{i+1}$、$C_{i+2}$、⋯、$C_{2n}$相遇$1+2+\cdots+(2n-i)$次，合計與其他車手至少相遇$\dfrac{i(i-1)+(2n-i)(2n-i+1)}{2}=(i-n)(i-(n+1))+n^2\ge n^2$次。

3.(幾何)

任意給定一個多邊形，將每一個邊長除以其他所有邊長之總和，再將所得之所有分數值相加，請證明所得之和小於 2。

解答：

令多邊形的邊長為 a_1、a_2、…、a_n 並滿足 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n < p - a_n$，其中 $p = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，則由 $p > 2a_n$ 可得：

$$\frac{a_1}{p-a_1} + \frac{a_2}{p-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{p-a_n} \le \frac{a_1}{p-a_n} + \frac{a_2}{p-a_n} + \cdots + \frac{a_n}{p-a_n} \le \frac{p}{p-a_n} < 2$$ 。

4.(代數)—題目

兩位魔法師在海平面上方 100 公尺處互相鬥智。他們輪流施行咒語，而每次咒語之形式都如：「將我的高度降 a 公尺並將我的對手的高度降 b 公尺。」其中 a、b 為實數且 $0<a<b$，不同的咒語有不同的 a 與 b 值。兩人所採用咒語的集合相同，這些咒語可用任何順序施行，且同一咒語可施行許多次。如果施行完某個咒語後，能使他自己仍保持在水面之上方而他的對手則在水面之下方，便稱這一位魔法師獲勝。

(a) 請問是否存在一組咒語之數量為有限多個的集合，使得後手的魔法師保證有策略可以獲勝？

(b) 請問是否存在一組咒語之數量為無限多個的集合，使得後手的魔法師保證有策略可以獲勝？

4.(代數)—解答

(a) 這是不可能存在的。若存在有限多個咒語的集合，則可以找到一個兩人間的 高度差 b−a 是最大值的情況。若先手的魔法師先講了這句咒語，後手的魔法 師能做的最佳選擇便是講一樣的咒語而使兩人的相對高度維持一樣的情況。 由此可知將會是後手的魔法師先降到水面而使先手獲勝。

4.(代數)—解答

(b) 這是可以存在的。可令第 n 句咒語為 a = 1/n、 b = 100− 1/n。由對稱性可假設是 先手的魔法師施行了第 n 句咒語，此時先手的魔法師在海平面上方 100− 1/n公 尺處而後手的魔法師在海平面上方 1/n 公尺處，接著只要後手的魔法師施行第 n+1 句咒語，則自己位於海平面上方 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ 先手的魔法師

必因 $(100-\frac{1}{n})-(100-\frac{1}{n+1})=-\frac{1}{n(n+1)}<0$ 而位於水面之下方，即後手獲勝。

5.(幾何)—題目

四邊形 ABCD 內接於圓 O，其對角線 AC 與 BD 均不通過圓心 O。假設三角形AOC 外接圓的圓心落在直線 BD 上，請證明三角形 BOD 之外接圓的圓心落在直線 AC 上。

5.(幾何)—解答

令 P 為三角形 OAC 的外接圓圓心。則可知 PO 與 AC 垂直，並令 PO 與 AC 交點為 X。過 O 做 BD 的垂直線 交 BD 於 Y、交 AC 於 Q。則只需驗證 Q 即為三角形 OBD 的外接圓之圓心。

5.(幾何)—解答

由畢氏定理可得：

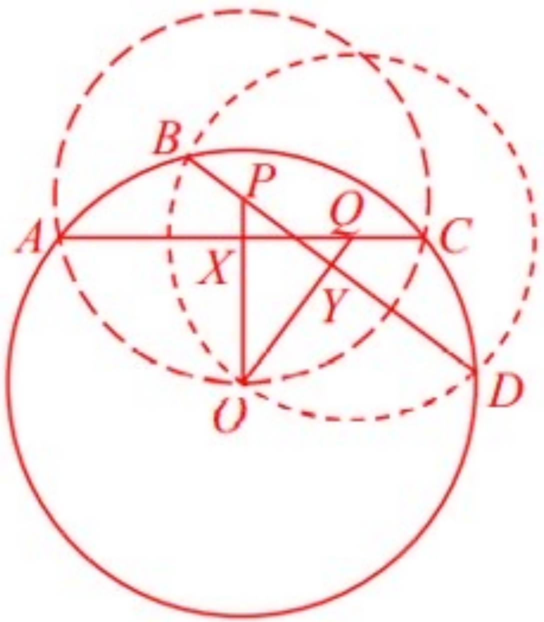
$QD^2 = QY^2 + DY^2$

$= QY^2 + (OD^2 - OY^2) = QY^2 + OA^2 - (OP^2 - PY^2)$

$= OA^2 - AP^2 + PQ^2 = QX^2 + OA^2 - (AP^2 - PX^2)$

$= QX^2 + (OA^2 - AX^2) = QX^2 + OX^2$

$= QO^2$



故知 QB=QD=QO，因此 Q 即為三角形 OBD 的外接圓之圓心。

6.(鴿籠)—題目

在 1000×1000 方格表的每個小方格內都填入一個 0 或 1。請證明我們保證可以從此方格表中找到 10 列，使得這 10 列中的每一行都至少有一個小方格內的數是 1；或者可以找到 10 行，使得這 10 行中的每一列中都至少有一個小方格內的數是 0。

6.(鴿籠)—解答

令S (p , r)代表以下命題： 在 a×b 方格表的每個小方格內都填入一個 0 或 1，其中ab ≤ p ，則存在 r 列，得這 r 列中的每一行都至少有一個小方格內的數是 1；或者可以找到 r 行， 使得這 r 行中的每一列中都至少有一個小方格內的數是 0。 則本題即為驗證 2 S(1000 ,10)成立。

現先驗證以下引理：

【引理 1】若 q>p，則由S (p , r)可推得S (q , r)。 此由命題定義即可得知。

6.(鴿籠)—解答

【引理 2】由S (p , r)可推得S (4p , r+1)。

<證> 已知S (p , r)。 現給定一個 a×b 方格表，其中ab ≤ 4p ，且此方格表所有的 b 個列中，0 的個數最少的那列共有 y 個 0、以及所有的 a 個行中，1 的個數最少的那 行共有 x 個 1。則知此方格表至少有 by 個 0、ax 個 1，即 ax +by ≤ab

再由算幾不等式可得知 $\sqrt{(ax)(by)} \le \frac{ax+by}{2}$

故有 $\sqrt{(ax)(by)} \le \frac{ab}{2}$，即 xy ≤ ab/4。

6.(鴿籠)—解答

任取一列有 y 個 0，稱之為 C 列、任取一行有 x 個 1，稱之為 R 列。接著取出在 C 列中為 0 的行，共 y 行，以及取出在 R 行中為 1 的列，共 x 列。位於這 y 行 x 列交會的方格構成一個 $x \times y$ 的子方格表，且知 $xy \leq ab/4 \leq p$， 故由S (p , r)知子方格表裡存在 r 列，使得這 r 列中的每一行都至少有一個 小方格內的數是 1；或者可以找到 r 行，使得這 r 行中的每一列中都至少 有一個小方格內的數是 0。將這 r 列與 C 列一起考慮即知原始 $a \times b$ 方格表 中有 r+1 列，其每一行都至少有一個小方格內的數是 1；再將這 r 行與 R 行一起考慮即知原始 $a \times b$ 方格表中有 r+1 行，其每一列都至少有一個小方 格內的數是 0。故S (4p , r+1) 得證。

6.(鴿籠)—解答

【引理 3】由S(16, 2) 為真。 <證> 此時只需驗證 1×16、2×8、3×5、4×4、5×3、8×2 與 16×1 這幾個方格表的 情況，因其餘滿足ab ≤16的方格表皆為以上這七個方格表裡其中一個的 子方格表，再由【引理 1】即可得證。

(i) 1×16 方格表：有 1 就選 1 所在之列，反之即為此行。

			1												

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6.(鴿籠)—解答

(ii)　2×8 方格表：若有二個 1 在同一列就選該列，反之將此二行都選取， 每列都至少一個 0。

1							
1							

0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1

6.(鴿籠)—解答

(iii) 3×5 方格表：

(a) 有兩個 1 在同一列：不妨假設該列為以下情形：

0				
1				
1				

(b) 不然，便是不多於五個 1。由鴿籠原理知某一行至少有四個 0，不妨設為以下情形：

0	0	0	0	

6.(鴿籠)—解答

(iv) 4×4 方格表：若有任一列有三個 1 或任一行有三個 0，則仿 3×5 方格表(a)的證明即可取出；不然便是每行每列中都有二個 0、二個 1。仿造【引理 2】的構造手法可取出 2×2 的子方格表，由方格位置可有以下兩類情況：

0	1	1	0
1			
0			
1			

1	0	1	0
0			
1			
0			

6.(鴿籠)—解答

故由【引理 1】、【引理 2】、【引理 3】可知：

S(16, 2) =>S(64, 3) =>S(256, 4) ⋯...=>S(1048576,10) =>S(1000^2 ,10)

7.(幾何)—題目

將一個正方形切為若干個全等的矩形，這些矩形的邊長都是整數。一個矩形若與正方形由左上至右下的對角線至少有一個交點，則我們稱此矩形為「核心矩形」。請證明這條對角線平分這些「核心矩形」的總面積。

7.(幾何)—解答

令這些全等的矩形為 $m\times n$ 或 $n\times m$。接著依以下方式標示上數字：

(i) 可將大正方形視為由單位小正方形所組成的，並在由左上至右下的主對 角線所經過的單位小正方形上標示 0、在左上至右下的主對角線上方且與 這條主對角線緊鄰且平行的 $m+n-1$ 條斜線所經過的單位正方形上標示 1、在左上至右下的主對角線下方且與這條主對角線緊鄰且平行的 $m+n-1$ 條斜線所經過的單位正方形上標示 -1。此時對於每一個核心矩形裡的 單位小正方形都標示上了數字，且其數值之總和即為矩形在主對角線上 方的面積減去矩形在主對角線下方的面積之值。

7.(幾何)—解答

(ii) 而對於非核心矩形來說，至少會有一個單位小正方形沒有標示上數字，因此我們現在繼續依序以平行左上至右下的主對角線之斜線來標示數字下去。擺放一個 m×n 或 n×m 的矩形使得我們想要標示數字的單位小正方 形為這一個矩形內唯一一個尚未標示數字的單位小正方形，接著便在此 單位小正方形內標示上一個數字使得這一個矩形內所有的單位小正方形 標示上的數字之總和為 0。因為在(i)中在同一條平行左上至右下的主對角 線之斜線所標示上的數字都相同，故擺放一個 m×n 或 n×m 的矩形之方向 是無關緊要的。

7.(幾何)—解答

右側為在 12×12 中，m=2、n=3 的例子：

每一條平行左上至右下的主對角線之斜線上所標示的數字都恰為與其以該主 對角線為對稱軸對稱的另一條斜線上所標示上的數字的相反數。故可知原始的大正方形裡所有的數字之總和為 0，且每一個非核心矩形裡所有的數字之總 和也為 0，因此所有的核心矩形之數字之總和必為 0，此即表示左上至右下的 主對角線平分這些「核心矩形」的總面積。

0	1	1	1	1	-5	7	-5	1	1	1	-5
-1	0	1	1	1	1	-5	7	-5	1	1	1
-1	-1	0	1	1	1	1	-5	7	-5	1	1
-1	-1	-1	0	1	1	1	1	-5	7	-5	1
-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	-5	7	-5
5	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	-5	7
-7	5	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	-5
5	-7	5	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1
-1	5	-7	5	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1
-1	-1	5	-7	5	-1	-1	-1	-1	0	1	1
-1	-1	-1	5	-7	5	-1	-1	-1	-1	0	1
5	-1	-1	-1	5	-7	5	-1	-1	-1	-1	0

相似題

相似題

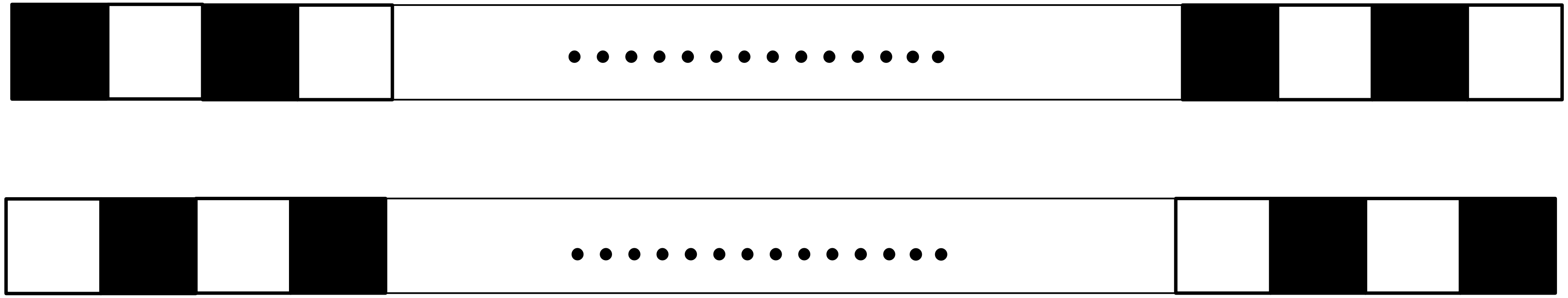
將一塊大正方形木板以 n - 1 條水平線與 n - 1 條鉛垂線劃分為 n^2 個正方形。將這些正方形格子黑白相間塗色。試證明當n為偶數時，黑色正方形數量與白色正方形數量相等；當n為奇數時，黑色正方形數量與白色正方形數量相差1。

相似題

(a)若n為偶數，假設左下角為黑色矩形，每個橫排會是黑白黑白……或是白黑白黑……可以發現會有$\frac{n}{2}$個黑色和$\frac{n}{2}$個白色

第n排

第1排



相似題

大正方形總共有n個橫排，總共有n $\times \frac{n}{2}=\frac{n^2}{2}$ 個黑色正方形，n$\times \frac{n}{2}=\frac{n^2}{2}$個白色正方形。故黑色正方形數量與白色正方形數量差為$\frac{n^2}{2}-\frac{n^2}{2}$=0

相似題

(b)若n為奇數，先以(n-1)(n-1)畫一個正方形，假設左下角為黑色矩形，因為n為奇數，所以n-1為偶數，由(a)的證明可知(n-1)(n-1)正方形中的黑白正方形數量相等。這時我們在兩邊各補上一條1×(n-1)長方形，並依規則上色。會發現一條當中會有$\frac{n-1}{2}$黑色及$\frac{n-1}{2}$白色，兩條就會n-1個黑色和n-1個白色。會發現兩條黑色及白色正方形數量一樣。最後會剩下最最左下角會有一個黑色正方形，故得證黑色正方形迷兩與白色爭方形數量差1