



# International Mathematics TOURNAMENT OF THE TOWNS

FALL 2009

## 第八組

戴世勳411031102

潘柏銓411031103

林亮辰411031107

黃俊穎411031113

李柔樺411031123



# Problem 1.



# Question:

After a gambling session, each of one hundred pirates calculated the amount he had won or lost. Money could only change hands in the following way. Either one pirate pays an equal amount to every other pirate, or one pirate receives the same amount from every other pirate. Each pirate had enough money to make any payment. Prove that after several such steps, it was possible for all the winners to receive exactly what they had won and for all losers to pay exactly what they had lost.





# Question:(中文翻譯)

一百位海盜玩牌賭錢，當牌局結束後，他們用金沙來償還賭債，每位海盜都有足夠的金沙來支付賭債。海盜之間只允許用以下的方式來收付金沙：

- (a) 向所有其它海盜支付相等數量的金沙；
- (b) 向所有其它的海盜收取相等數量的金沙。

請證明經過有限次上述方式收付款後，每位贏錢的海盜都可以準確地收到他應收的款項、每位輸錢的海盜都可以準確地支付他應付的款項。

分析類別:代數





# Problem 2.



# Question:

A non-square rectangle is cut into  $N$  rectangles of various shapes and sizes. Prove that one can always cut each of these rectangles into two rectangles so that one can construct a square and rectangle, each figure consisting of one piece from each of the  $N$  rectangles.



# Question:(中文翻譯)

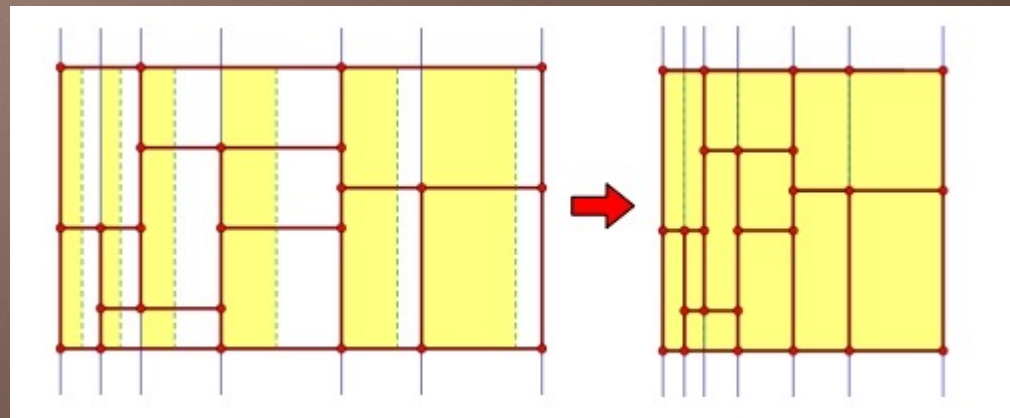
將一個非正方形的矩形紙板切為  $N$  片矩形（不一定要全等）。

請證明我們恆有辦法將這  $N$  片矩形每片都切為兩小片矩形

從每個矩形中各挑選一小片使得這  $N$  片恰可以拼成一個正方形、

挑選剩下的  $N$  片也可以拼成另一個矩形(紙板不可以互相重疊)。

分析類別:幾何





# Problem 3.



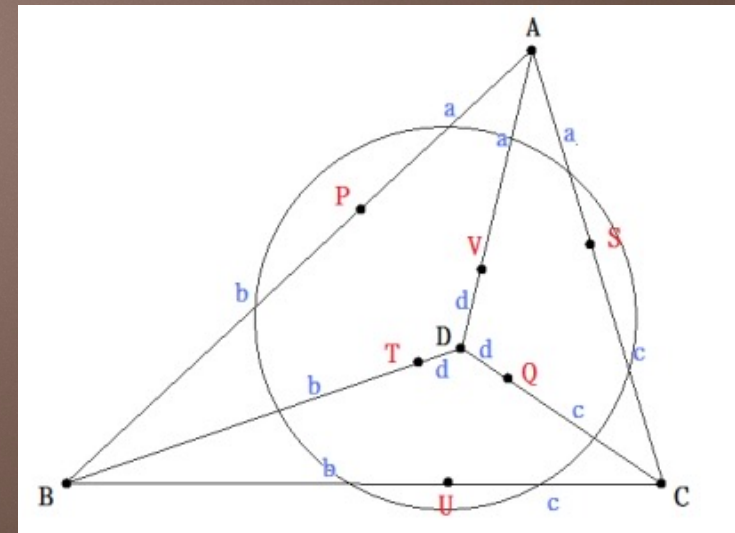
# Question:

Every edge of a tetrahedron is tangent to a given sphere. Prove that the three line segments joining the points of tangency of the three pairs of opposite edges of the tetrahedron are concurrent.

## 中文翻譯:

有一個圓球與一個四面體的每條稜都相切，用直線連接任兩個不相鄰的稜上之切點。請證明這三條直線共點。

分析類別:幾何





# Problem 4.



# Question:

Denote by  $[n]!$  the product of  $1, 11, \dots, 11\dots 1$ , where the last factor has  $n$  ones. Prove that  $[n + m]!$  is divisible by  $[n]![m]!$ .

## 中文翻譯:

用記號  $[n]!$  表示  $1 \times 11 \times 111 \times \underbrace{111\dots 111}_{n\text{個}1}$  (共有  $n$  個數相乘)。請證明

$[n+m]!$  可被  $[n]! \times [m]!$  整除。

分析類別:組合

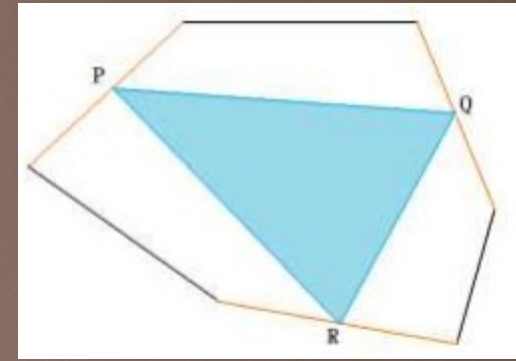


# Problem 5.



# Question:

Let  $XYZ$  be a triangle. The convex hexagon  $ABCDEF$  is such that  $AB$ ,  $CD$  and  $EF$  are parallel and equal to  $XY$ ,  $YZ$  and  $ZX$ , respectively. Prove that the area of the triangle with vertices at the midpoints of  $BC$ ,  $DE$  and  $FA$  is not less than the area of triangle  $XYZ$ .



## 中文翻譯:

在三角形  $XYZ$  與凸六邊形  $ABCDEF$  中，線段  $AB$ 、 $CD$ 、 $EF$  分別平行且相等於線段  $XY$ 、 $YZ$ 、 $ZX$ 。請證明以  $BC$ 、 $DE$ 、 $FA$  邊的中點為頂點的三角形之面積不小於三角形  $XYZ$  的面積。

分析類別:幾何



# Problem 6.



# Question:

Olga and Max visited a certain Archipelago with 2009 islands. Some pairs of islands were connected by boats which run both ways. Olga chose the first island on which they land. Then Max chose the next island which they could visit. Thereafter, the two took turns choosing an accessible island which they had not yet visited. When they arrived at an island which was connected only to islands they had already visited, whoever's turn to choose next would be the loser. Prove that Olga could always win, regardless of the way Max played and regardless of the way the islands were connected.



# Question:(中文翻譯)

Olga 與 Max 兩人打算一起去有 2009 個小島的列島旅遊。小島間的交通只能依靠船舶相連，有些小島之間具有往返的交通船，有些則無。Olga 和 Max 兩人進行以下遊戲：任何小島不可以造訪二次或二次以上，由 Olga 先選擇一個小島著陸，接著由 Max 選擇到一個未曾造訪過的小島旅遊，依此規則兩人輪流選擇。無法再繼續符合遊戲規則的行程(沒有小島可選擇或無交通船可從當時所在的小島通往所選擇的小島)者為輸方。請證明無論這些小島間船運的路線系統如何，也無論 Max 如何應對，Olga 永遠有數學策略可以獲勝。

分析類別:圖論



# Problem 7.



# Question:

At the entrance to a cave is a rotating round table. On top of the table are  $n$  identical barrels, evenly spaced along its circumference. Inside each barrel is a herring either with its head up or its head down. In a move, Ali Baba chooses from 1 to  $n$  of the barrels and turns them upside down. Then the table spins around. When it stops, it is impossible to tell which barrels have been turned over. The cave will open if the heads of the herrings in all  $n$  barrels are all up or are all down. Determine all values of  $n$  for which Ali Baba can open the cave in a finite number of moves.



# Question:(中文翻譯)

阿里巴巴寶庫的山洞入口有一圓形轉盤，它是開啟山洞門的機關。轉盤的圓周上有  $N$  個完全相同的桶子，任何相鄰桶子的距離都相等。在每一個桶子內各放置有一隻頭朝上或頭朝下的青魚。阿里巴巴每次操作都可以選擇任何位置、任何數量的桶子(數量從 1 個到  $N$  個)全部上下翻轉。當每次操作結束，圓盤立即開始轉動，如果所有桶內的青魚頭全部朝上或全部朝下，則山洞門就會打開。否則當圓盤停止轉動後，任何人都無法再辨認哪些桶子曾被翻轉過。無論這些青魚如何擺置，若阿里巴巴必有數學策略保證可以打開山洞門，請問所有可能的  $N$  值是什麼？

分析類別:代數



# 證明分成兩個部分：

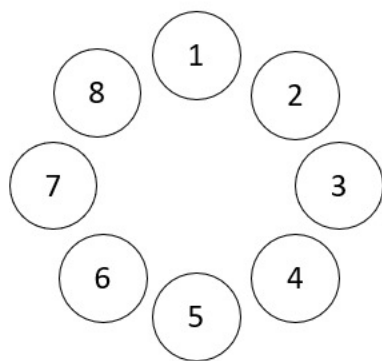
1. 當  $n = 2^k$  時此題有解

2. 當  $n \neq 2^k$  時此題有解

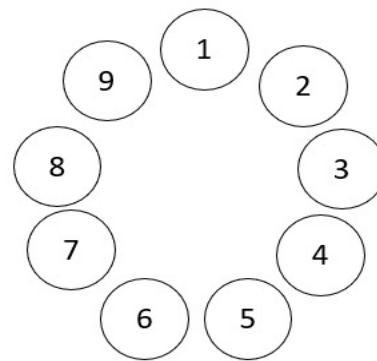
歸納法

顯然  $n=2$

假設  $n=2^k$



考慮  $n = 2^{k+1}$  的



現稱轉盤上的端是和他對面的那個是「對」的。共有  $2^k$  個鑰匙對。

我們想做到以下這兩種任務：

1. 在一系列的操作中存在某一刻，每一對鑰匙對都是一樣的。
2. 把一對鑰匙對當成一個鑰匙，然後依照已知的解法扭這些鑰匙。



## 假如第一個任務已經完成

如果阿里巴巴原本在對抗 $2^k$ 個鑰匙時  
某一步扭的是第 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$ 、 $\dots$ 、 $a_i$ 個

阿里巴巴只要扭第 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$ 、 $\dots$ 、 $a_i$ 個以及  
第 $a_{1+2^k}$ 、 $a_{2+2^k}$ 、 $a_{3+2^k}$ 、 $\dots$ 、 $a_{i+2^k}$ 個

在致力於達成第一個任務的過程中

為了要把握住第一個目標達成的瞬間，也就是每一對鑰匙都相同那稍縱即逝的剎那  
就必須在每一步的操作之後「檢查」是不是每一對鑰匙都一樣。

如何檢查呢？

我們只要在每一步操作後，都自以為是地假裝現在每一對都是一樣的，直接進行第二個任務。  
要是門開了，就開了。

要是門沒有打開，就代表有些「鑰匙對」不一樣，那我們就裝作沒事，繼續執行下一個操作。



證明 $n \neq 2^k$ 時無法在有限步之內達成目標

假如 $n$ 是奇數，在每一次轉動中，我們可以先看阿里巴巴下一步準備要轉哪個鑰匙  
至於如何把每一對鑰匙轉成一樣的呢？

在這其中一定有兩個相鄰的位置，阿里巴巴在下一步都有轉，或是都沒有轉；

可定義一個新的、大小為 $2^k$ 轉盤

~~我們再回頭來看現在轉盤上的鑰匙，因為阿里巴巴還沒有成功~~

將某一定對鑰匙對「兩個相鄰的鑰匙」對應到新轉盤上的一個方向對的鑰匙

於是對應到兩個相鄰的鑰匙準那相鄰的位置，這樣阿里巴巴下一步轉鑰匙後，

顯然新轉盤的規則和之前遇到的轉盤一模一樣。

於是如果一直重複這個步驟下去，阿里巴巴根本無法達成任務。

一般情況中，若 $n \neq 2^k$ ，那麼一定有一個奇質因數 $p$ 。

考慮第 $\frac{n}{p}$ 、 $\frac{2n}{p}$ 、...、 $\frac{(p-1)n}{p}$ 、 $n$ 這 $p$ 把鑰匙

與上同樣方法可以原地不動地運用在這 $p$ 把鑰匙身上。

於是 $n \neq 2^k$ ，阿里巴巴無法達成任務。



# 相似題

埃及金字塔的入口有一道密碼鎖

- ▶ 是一個由邊長 $m$ 乘 $n$ 的矩形所組成，且邊上有相對應數量的硬幣
- ▶ 硬幣有正反兩面，某些朝上而某些朝下
- ▶ 每次決定將 $k$ 枚硬幣翻面，做完動作後，矩形將會隨機旋轉
- ▶ 當所有硬幣都是同一面時，即可解開密碼進入金字塔

請問是否有方法能夠保證進入金字塔呢?

A:  $k$ 為2的次方時有必定能進入的方法



# 資料來源

▶ 海盜圖片:海盜q版 - Bing images

▶ 海盜圖片:海盜q版 - Bing images

▶ 翻棋分類問題

[http://www.sec.ntnu.edu.tw/Monthly/91\(246-255\)/251/9%E7%BF%BB%E6%A3%8B%E5%88%86%E9%A1%9E%E5%95%8F%E9%A1%8C.pdf](http://www.sec.ntnu.edu.tw/Monthly/91(246-255)/251/9%E7%BF%BB%E6%A3%8B%E5%88%86%E9%A1%9E%E5%95%8F%E9%A1%8C.pdf)

▶ 阿里巴巴轉盤問題討論

<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2012/pdf/010021.pdf>

▶ 翻譯及解析圖片

[http://files.chiuchang.org.tw:8080/MyWeb/download/tt/2009/2009SA\\_sol.pdf](http://files.chiuchang.org.tw:8080/MyWeb/download/tt/2009/2009SA_sol.pdf)



# ～感謝聆聽～

戴世勳411031102

黃俊穎411031113

潘柏銓411031103

李柔樺411031123

林亮辰411031107