環球城市數學競賽

高中組春季高級卷

International Mathematics TOURNAMENT OF THE TOWNS Senior A-Level Paper Spring 2010

廖英秀/羅允澤/高新雄/林咏勳/鄭蕙倪/柯彥廷

題目翻譯

共七題

01

是否可以將平面中的所有直線拆分為垂直線對，使得每條線都屬於一對?

幾何

02

亞歷克斯有一塊奶酪。他選擇一個正數 a 並將這塊切成好幾塊。每次他選擇一塊並以相同的比例1：a切割它。若他的目標是把奶酪分成兩堆質量相等的，則請問

(1) a是無理數嗎?

(2) $a \neq 1$ 是有理數嗎?

比例

03

考慮應用於數字 1 的sin、cos、tan、cot、arcsin、arccos、arctan、arccot 所建構的合成函數。
若每個函數使用次序、次數不限，則請問由這個方式可得到數字2010嗎?

Consider a composition of sin, cos, tan, cot, arcsin, arccos, arctan, arccot functions applied to the number 1. Each function may be applied arbitrarily many times and in any order. Can we obtain the number 2010 in this way ?

三角函數

04

在一次大會上，5000 名參與者中的每一個都至少看了一部電影。
將參與者進行分組，而分組方式有兩種。第一種，組內參與者都分享看過的同一部電影。
第二種，組內參與者都分享一部只有自己看過的電影。

證明主席總是可以將參與者精確地分成 100 組。（可以允許由一人組成）

數列

05

在環形路上有 33 名騎手，騎在同一個方向上，並且他們的速度是固定的、兩兩不同。
若沿路有一處允許騎手超越另一騎手，則他們可以繼續騎行任意長的時間嗎?

代數

06

凸四邊形 ABCD 外接圓心為 I。設點 M 和N分別為AB邊和CD邊的中點，令 IM/AB = IN/CD。

證明ABCD不是梯形就是平行四邊形。

幾何

07

彼得在黑板上寫了一些正整數。蘇珊可以在他的寫得數字之間加上加號，然後孩子們計算得到的總和（例如：123456789，可以得到 12345+6+789=13140）。其中蘇珊最多可將這個過程操作長達十次。

證明她總能得到一位數字。

數列

題目講解

3.

Consider a composition of sin, cos, tan, cot, arcsin, arccos, arctan, arccot functions applied to the number 1. Each function may be applied arbitrarily many times and in any order. Can we obtain the number 2010 in this way?

Sol:

$, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\cot\theta = \cot\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} \cdots *$$

Let $f(x)=\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $x\in\mathbb{N}$

$$\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=f(1)$$

$$\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}=(f\circ f)(1)$$

$$\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{4}}=(f\circ f\circ f)(1)$$

$$\vdots$$

$$\underline{\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}=(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n})(1)\Big|_{\underline{n=2010^2-1}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{2010^2}}}$$

$$\cot\left(\tan^{-1}\left(\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)=\cot\left(\tan^{-1}\left((\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{2010^2-1})(1)\right)\right)$$

$$=\cot\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2010^2}}\right)$$

by $*$

$$\overset{*}{=}\sqrt{2010^2}$$

$$=2010$$

相似题

相似題1：

3.1

Consider a composition of cot, arctan and a function from $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ to $\mathbb{R}$.

In any order, each function must apply exactly 1 time. Can we obtain the number 2010 by this composition of function?

Sol:

$, 0<\theta<\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{N}$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\cot\theta=\cot\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{n}\cdots *$$

Let $f(x)=\sqrt{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$

Define $g: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$ by $g(a,b,c) = ((\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{a})(b))^c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{aligned} g(1,1,1) &= f(1) = \sqrt{2} \\ g(2,1,1) &= (f \circ f)(1) = \sqrt{(\sqrt{2})^2+1} = \sqrt{3} \\ g(3,1,1) &= (f \circ f \circ f)(1) = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1} = \sqrt{4} \end{aligned}\right\}$$

$\vdots$

$$g(n,1,1) = (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n})(1) = \sqrt{(\sqrt{n})^2+1} = \sqrt{n+1}$$

$$g(2009,1,4) = (\sqrt{2009+1})^4 = 2010^2 \overset{\text{let}}{=} n$$

$$\Rightarrow \cot\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{g(2009,1,4)}}\right)$$

$$= \cot\left(\tan^{-1}\left((\underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{2009})(1)\right)^{-2}\right)$$

$$= \cot\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2010^2}}\right)$$

by $*$

$$= \sqrt{2010^2}$$

$$= 2010 \quad \text{※}$$

相似題2:

3.2

If we consider a quotient of sin functions, can we obtain the number 2.022 by this quotient of sin functions.

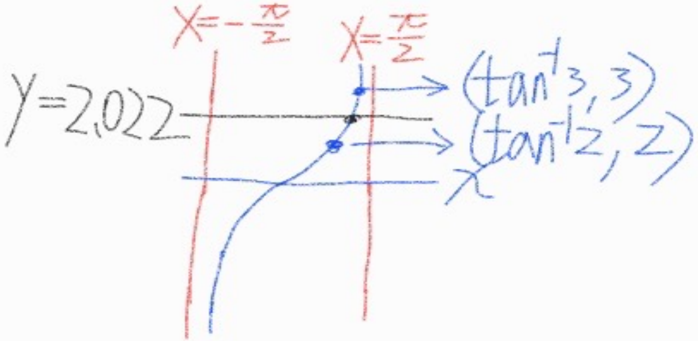
Sol: Define $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ by $f(x) = \tan x$ $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Since f is conti. on $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ and $2.022 \in (2, 3)$, by I.V.T,

$\exists \theta \in (\tan^{-1} 2, \tan^{-1} 3)$ s.t. $f(\theta) = \tan\theta = 2.022$.

We can obtain
$$2.022 = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)} \text{ for some } \theta \in (\tan^{-1} 2, \tan^{-1} 3)$$

※



謝謝觀看

Thank you for watching

International Mathematics TOURNAMENT OF THE TOWNS Senior A-Level Paper Spring 2010