

# 2014環球城市數學競賽高中組春季高級卷

## 第七組

411031108 魏碩廷  
411031119 陳柏諺  
411031137 游智宇  
411031139 張天傑  
411031216 許仲勳



# 試題解析

---



## 第一題 代數

Doono在紙上寫了很多個1，在每兩個1之間放入“+”或“×”和幾個括號，得到2014。

Dunno將所有“+”替換為“×”和“×”替換為“+”，也得到2014。請問是否能做到？



## 第二題 幾何

是不是所有凸多邊形都可以用直線分割成兩個周長相等的多邊形且

(a) 最大邊相等？

(b) 最小邊相等？



## 第四題 數論

在平面上用整數坐標標記所有點  $(x, y)$ ， $0 \leq y \leq 10$ 。列出一個具有整數係數的 20 次多項式。  
找出可以位於其圖形上的最大可能標記點數。

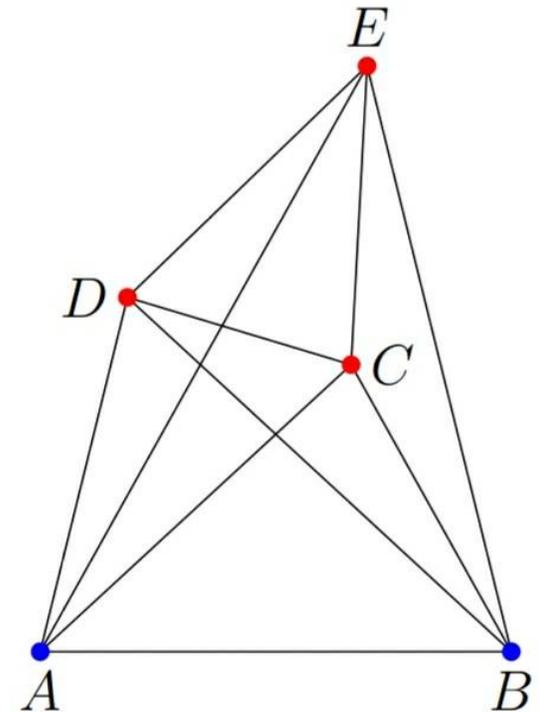
## 第五題 幾何

平面上有一個不等邊三角形。

Peter每次可在平面上選擇一個點。 Basil把那個點塗成紅色或藍色。

如果某個具有相同顏色頂點的三角形與原始三角形相似，則Peter獲勝。

找到不管Basil怎麼塗色 Peter仍能贏的最少次數  
( 使用附圖的三角形 ) ？





## 第六題 幾何

在某些國家，每個城鎮都有唯一的編號。在飛行目錄中有指示兩個城鎮之間是否有直達。已知，對於任何兩個分配的數字  $M$  和  $N$ ，一個可以改變城鎮編號，因此編號為  $M$  的城鎮獲得編號  $N$ ，但目錄依然保持正確。若對於任何兩個分配的數字  $M$  和  $N$  可以改變城鎮的編號，使編號為  $M$  和  $N$  的城鎮互換他們的號碼，目錄是否正確？



## 第七題 代數

有一多項式 $P(x)$ 使

$P(0)=1$ ;  $(P(x))^2=1+x+x^{100}Q(x)$ ，其中 $Q(x)$ 也是一個多項式。  
試證多項式 $(P(x)+1)^2$ 中 $x^{99}$ 的係數為0

# 相似題

---

## 第三題 代數

國王叫來了兩個巫師。他命令第一個巫師在卡片上寫下 100 個正實數（可重複）而不讓第二個巫師看。第二個巫師必須猜中所有數字，否則兩個巫師都會被砍頭。國王允許第一個巫師為第二個巫師提供一個不同數字的列表，每個數字都是卡片上的一個數字或其中一些數字的總和。他不允許說出卡片上的數字和數字他們的總和。若第二位巫師完全正確的猜中 100 個數字，國王從每個巫師的鬍鬚扯下與第一位巫師給第二位巫師的列表中數字一樣多的頭髮。每個巫師應該失去至少多少的頭髮才能活下來？



## 第三題 解析

答 101

第一位巫師寫下 $1、2、4\dots2^{99}$ 在給第二位巫師的列表中寫下這100個數字和100個數字的總和 $2^{100}-1$

那第二位巫師就會知道有一張卡的數字不超過1、還有一張卡不超過2.....且第100張卡不超過 $2^{99}$

那他們的總和不超過 $2^{100}-1$ 則這100個數字只可能是 $1、2、4\dots2^{99}$



## 第三題 相似題

國王叫來了兩個巫師。他命令第一個巫師在卡片上寫下 100 個正實數（可重複）而不讓第二個巫師看。第二個巫師必須猜中所有數字，否則兩個巫師都會被砍頭。國王允許第一個巫師為第二個巫師提供一個不同數字的列表，每個數字都是卡片上的一個數字或其中一些數字的**乘積**。他不允許說出卡片上的數字和數字他們的**乘積**。若第二位巫師完全正確的猜中 100 個數字，國王從每個巫師的鬍鬚扯下與第一位巫師給第二位巫師的列表中數字一樣多的頭髮。每個巫師應該失去至少多少的頭髮才能活下來？

### 第三題 相似題解析

答 101

第一位巫師寫下 $2^{2^n}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, 99$ ) 在給第二位巫師的列表中寫下這100個數字和100個數字的乘積 $2^{2^{100}-1}$

那第二位巫師就會知道有一張卡的數字不超過2、還有一張卡不超過4.....且第100張卡不超過 $2^{2^{99}}$

那他們的乘積不超過 $2^{2^{100}-1}$  則這100個數字只可能是 $2^{2^0}$ 、 $2^{2^1}$ 、 $2^{2^2}$ ..... $2^{2^{99}}$