數學歸納法
數思期末報告

第一組：
李泰樂
黃楷恩
吳杰翰
李承源

由來

數學歸納法的思想可以遠推至歐幾里得（BC330 - BC275）。較嚴格的數學歸納法是在16世紀後期才引入的。

最早使用數學歸納法的是十六世紀的數學家弗朗西斯科·馬若利科（1494 - 1575）。 在古典數學作品上寫了大量的文章，並且對幾何學和光學做出了許多貢獻。

由來

在《Arithmeicorum Libri Duo》這本書中，馬若利科提出了整數的一系列屬性，並對這些屬性進行了證明。

為了證明其中一些屬性，他設計了數學歸納法的策略。

他在這本書中第一次使用數學歸納法是為了證明前n個奇數正整數之和等於n^2。

由來

數學歸納法[Mathematical Induction]是用來證明某些與自然數n有關的數學命題的一種方法。它的步驟是：

1. 驗證n=1時命題成立[這叫歸納的基礎，或遞推的基礎]；
2. 假設n=k時命題成立[這叫歸納假設，或叫遞推的根據]， 在這假設下證明n=k+1時命題成立。

根據1、2可以斷定命題對一切自然數都成立。

由來

法國著名數學家布萊茲·帕斯卡（1623 - 1662）承認馬若利科引用了這方法，並在他的著作《三角陣算術》中運用了這一方法。

因此，一般認為帕斯卡是數學歸納法的主要發明人。由於帕斯卡還沒有表示任意自然數的符號，因此組合公式及證明只能用敘述的方法，1686年丹尼爾·白努利（1700 - 1782）首先採用了表示任意自然數的符號，在他叔叔雅各布·白努利（1655 - 1705）的名著《猜度術》中包含運用數學歸納法證題的出色例子。

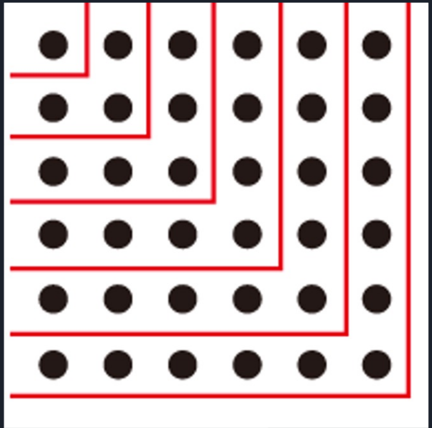
由來

馬若利科當時的證明是非正式的，並且他從未使用過 "歸納" 一詞。歸納這個字是由英國數學家約翰·沃利斯（1616 - 1703）使用的。

朱塞佩·皮亞諾（1858 - 1932）的皮亞諾公理中包含了歸納原理。

奧古斯塔斯·德摩根（1806 – 1871）被認為是在1838年使用數學歸納法進行正式證明的主要代表，並且引入了 "數學歸納法" 這一術語。明確陳述了德·摩根定律，將數學歸納法的概念嚴格化。

前n個奇數正整數之和等於n^2



$$1 = 1^2 - 0^2$$

$$3 = 2^2 - 1^2$$

$$5 = 3^2 - 2^2$$

$$7 = 4^2 - 3^2$$

以此類推。因此，當把它們加起來時，除了最後一個正方形外，所有的東西都被抵消了。

$$1+3+5+7=(1^2-0^2)+(2^2-1^2)+(3^2-2^2)+(4^2-3^2)=4^2$$

現在讓我們對任何數量的奇數相加進行正式書寫。對於任何k

$$2k+1=(k+1)^2-k^2$$

因此，前n個奇數的總和，也就是

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2k+1$$

等於

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2-k^2=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=0}^{n-1}k^2=n^2$$

皮亞諾公理

皮亞諾公理（英語：Peano axioms；義大利語：Assiomi di Peano），也稱皮亞諾公設，是義大利數學家朱塞佩·皮亞諾提出的關於自然數的五條公理系統。根據這五條公理可以建立起一階算術系統，也稱皮亞諾算術系統。

其中，一個數的後繼數指緊接在這個數後面的數，例如，0的後繼數是1，1的後繼數是2等等；公理5保證了數學歸納法的正確性，從而被稱為歸納法原理。

皮亞諾公理

皮亞諾的這五條公理用非形式化的方法敘述如下：

1. 0是自然數；
2. 每一個確定的自然數a，都有一個確定的後繼數a' ，a' 也是自然數；
3. 對於每個自然數b、c，b=c若且唯若b的後繼數=c的後繼數；
4. 0不是任何自然數的後繼數；
5. 任意關於自然數的命題，如果證明：它對自然數0是真的，且假定它對自然數a為真時，可以證明對a' 也真。那麼，命題對所有自然數都真。

原理及流程

1.定義P(n)

2.P(0)、P(1)成立

3.P(m+1)在P(m)、P(m-1)成立時成立

得證P(n)對任意自然數n成立

延伸變體

當命題P(n)只針對大於等於b的自然數

1.證明n=b時成立

2.證明n=m (m≥n)成立時n=m+1會成立

得證P(n)對任意自然數n≥b成立

延伸變體

當命題P(n)只針對奇數或偶數

1.證明n=1(奇數)n=0、2(偶數)時成立

2.證明n=m成立時n=m+2會成立

得證P(n)對任意奇數或偶數成立

遞迴歸納法

當命題P(n)只針對n=0、1、2……m

1.證明n=m時成立

2.證明n=k成立時n=k-1會成立

得證P(n)對任意n=0、1、2……m成立

完整歸納法

在證明$n=m$成立時，改為證明$n\leq m$成立

再證明$n\leq m$成立時，$n=m+1$成立

超限歸納法

把證明$n \le m$成立時，$n=m+1$成立

變成證明$n<m$皆成立時，$n=m$成立

例題

試證 $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2=1/6\ n(n+1)(2n+1)$對任意正整數n都成立。

pf:

1° $n=1$時,左式$=1^2=1/6(1)(1+1)(2*1+1)$,即原等式成立。

2° 若$n=k$時,原式成立,即$1^2+2^2+\ldots\ldots+k^2=1/6k(k+1)(2k+1)$

則$k+1$時,左式$=1^2+2^2+\ldots\ldots+k^2+(k+1)^2$

$=1/6\ k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$

$=(k+1)((2k^2+k+6k+6)/6)$

$=(k+1)((2k^2+7k+6)/6)$

$=1/6(k+1)(k+2)(2k+3)=$右式

3°由數學歸納法可知, $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2=1/6\ n(n+1)(2n+1)$

例題

試證 $1^2+3^2+5^2+\ldots\ldots+(2n-1)^2=1/3\ n(2n-1)(2n+1)$對任意正整數n都成立。

pf:

1° n=1時,左式$=1^2=1/3(1)(1)(2*1+1)$ =右式,即原等式成立。

2° 若n=k時,原式成立,即$1^2+3^2+\ldots\ldots+(2k-1)^2=1/3k(2k-1)(2k+1)$

則k+1時,左式$=1^2+3^2+\ldots\ldots+(2k-1)^2+(2k+1)^2$

$=1/3\ k(2k-1)(2k+1)+(2k+1)^2$

$=1/3(2k+1)(k(2k-1)+3(2k+1))$

$=1/3(2k+1)(2k^2+5k+3)$

$=1/3(k+1)(2k+1)(2k+3)$=右式

3°由數學歸納法可知, $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2=1/3\ n(2n-1)(2n+1)$

例題

設n為正整數，試證$l+2+3+\ldots+(n-l)+n+(n-l)+\ldots+3+2+1=n^2$

pf:

1° 當$n=1$時,左式$=1$,右式$=1^2$,左式=右式,即原等式成立。

2° 若$n=k$時,原式成立,即$1+2+3+\ldots+(k-1)+k+(k-1)+\ldots+3+2+1=k^2$

則$n=k+1$時,左式$=l+2+3+\ldots+(k-l)+k+(k+1)+k+(k-l)+\ldots+3+2+1$

$=k^2+(k+1)+k$

$=k^2+2k+1$

$=(k+1)^2$

=右式

3°由數學歸納法可知,$l+2+3+\ldots+(n-l)+n+(n-l)+\ldots+3+2+1=n^2$

例題

試證 (1+1/1)(1+1/3)(1+1/5)......(1+1/2n-1)>$\sqrt{2n+1}$ (n≥2,n∈N)

pf:

1º 當n=2時,左式=(1+1/1)(1+1/3)=8/3 ,右式=$\sqrt{5}$,因為8/3>$\sqrt{5}$, 故不等式成立。

2º 若n=k時,不等式成立,即(1+1/1)(1+1/3)(1+1/5)......(1+1/2k-1)>$\sqrt{2k+1}$

則n=k+1時,左式=(1+1/1)(1+1/3)(1+1/5)......(1+1/2k-1)(1+1/2k+1)

>$\sqrt{2k+1}$(1+1/2k+1)=$\frac{2k+2}{\sqrt{2k+1}}$

右式=$\sqrt{2k+3}$,證$\frac{2k+2}{\sqrt{2k+1}}$>$\sqrt{2k+3}$,只需證2k+2>$\sqrt{(2k+1)(2k+3)}$=(k+1)((2k²+7,即證

4k²+8k+4>4k²+8k+3,即證4>3,顯然成立,故當n=k+1時,不等式成立。

由1º 2º 可知,原不等式對任意n≥2,n∈N恆成立。

資料來源：

歷史與由來：
https://zhidao.baidu.com/question/10747961
前n個奇數正整數之和等於n^2：
https://www.quora.com/Why-is-the-sum-of-the-first-n-odd-integers-n-2
皮亞諾公理：
https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E7%9A%AE%E4%BA%9A%E8%AF%BA%E5%85%AC%E7%90%86
原理及流程：
https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%95%B0%E5%AD%A6%E5%BD%92%E7%BA%B3%E6%B3%95
例題一：
:https://youtu.be/hyvTl036PmA
例題二：
https://youtu.be/Dgy91ZafMY0
例題三：
http://www.pat-soi.org/wp-content/uploads/2017/08/%E6%95%B8%E5%AD%B8%E6%AD%B8%E7%B4%8D%E6%B3%95%E7%B7%B4%E7%BF%92%E9%A1%8C%E7%AD%94%E6%A1%88.pdf
例題四：
https://kknews.cc/education/6o5l2xp.html

報告結束