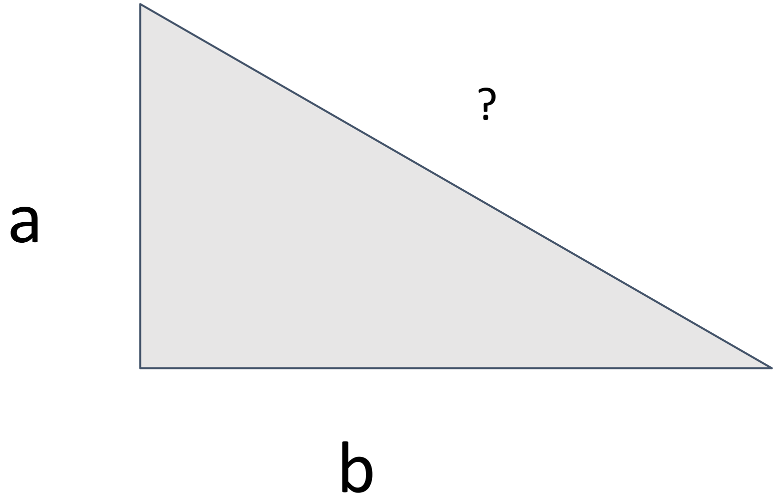
數學思維與解題
報告

第二組 組員:
411131102陳宏睿 411131103林易初
411131104陳祈叡 411131132林佳民
411131113林嘉楷

主題：畢氏定理

目錄

問題



起源

- 以希臘數學家畢達哥拉斯名字命名
- 畢氏三元數的發現時間較早，例如埃及的紙草書裡面就有$\{(3,4,5)\}$這一組畢氏三元數，而巴比倫泥板涉及的最大的一個畢氏三元數組$\{(13500,12709,18541)\}$。後來的中國的算經、印度與阿拉伯的數學書也有記載。
- 畢達哥拉斯本人並無著作傳世，不過在他死後一千年，5世紀的普羅克勒斯給歐幾里德的名著《幾何原本》做註解時將最早的發現和證明歸功於畢達哥拉斯學派。
- 秦朝算術書中並未記載畢氏定理，只有記載畢氏三元素
- 西漢《周髀算經》「榮方問於陳子」一節中提到:若求邪至日者，以日下為勾，日高為股，勾股各自乘，並而開方除之，得邪至日。

起源

- 第一次數學危機，
- 畢達哥拉斯的學生希帕索斯在研究其老師的理論時，發現有的直角三角形邊長不能用有理數表現出來，所以探討並宣傳這個理論，後來發現了根號二這個數字，當時的人無法接受無理數的概念，畢達哥拉斯後來下令捉拿他，後來希帕索斯逃亡途中被畢達哥拉斯弟子淹死

畢達哥拉斯

- 西元前570年－前495年
- 是一名古希臘哲學家、數學家和音樂理論家，畢達哥拉斯主義的創立者。他認為數學可以解釋世界上的一切事物，對數字癡迷到幾近崇拜；同時認為一切真理都可以用比例、平方及直角三角形去反映和證實。
- 除了數學的外，他也是希臘音樂理論的鼻祖，創立了畢達哥拉斯學派
- 被當時的人當作神

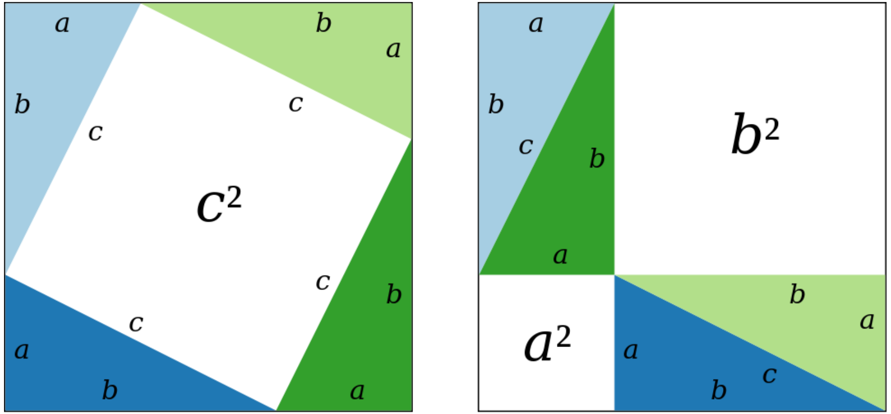
內容

- 在平面上的一個直角三角形中，兩個直角邊邊長的平方加起來等於斜邊長的平方。如果設直角三角形的兩條直角邊長度分別是a和 b，斜邊長度是 c，那麼可以用數學語言表達：a^2+b^2=c^2

證明

- 畢氏定理有很多證明——在1940年出版的《The Pythagorean Proposition》收錄了362個畢氏定理的證明，作者Elisha Schott Loomis於此書的第二版中，再加入9個證明，令總數增至371個，可能是最多已知證明的數學定理。

證明--1

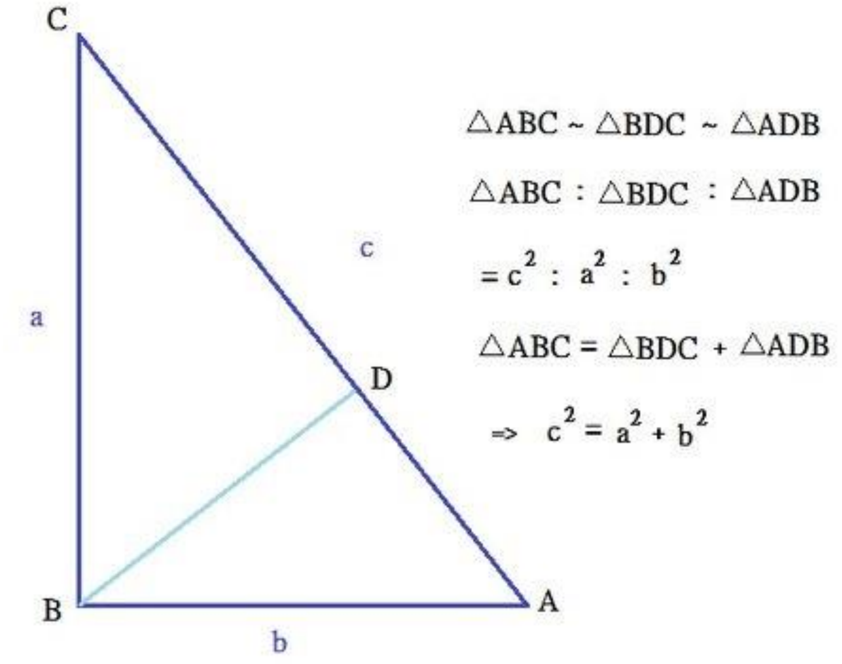


$$c^2 = a^2 + b^2$$

- 圖片來源:https://en.wikipedia.org/wiki/File:Pythagoras-proof-anim.svg

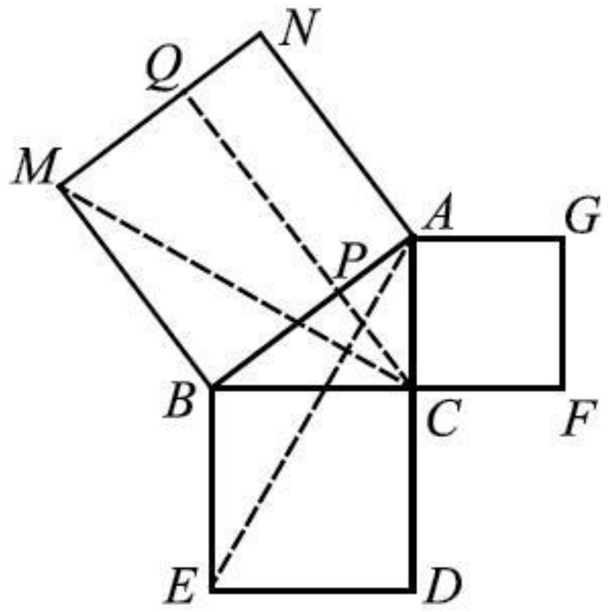
證明--2

- 圖片來源:https://blog.xuite.net/tonyhutw/twblog/123947876#



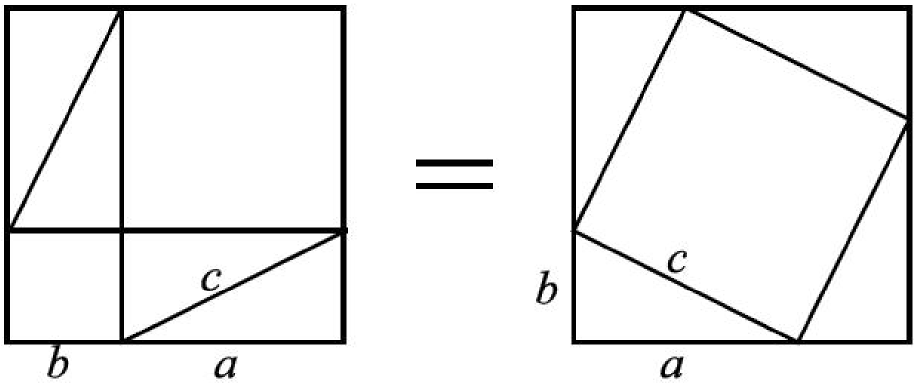
證明--3

- 歐幾里得的《原本》，用的是面積等化的方法來證明畢氏定理。正方形BCDE=2△ABE（同底等高）=2△MBC（全等形）=長方形BPQM（同底等高）同理，正方形
- ACFG=長方形APQN，兩式相加即得。



證明--4

- 三國時代的趙爽，在註釋《周髀算經》時，則用簡單的弦圖證明句股弦定理（即畢氏定理）。

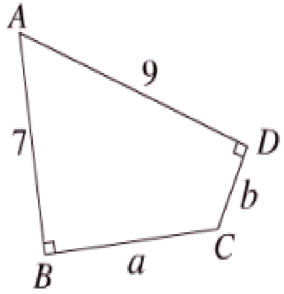


題目

如右圖，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$、$\overline{AD}\perp\overline{CD}$，且$\overline{AB}=7$、$\overline{BC}=a$、$\overline{CD}=b$、$\overline{AD}=9$，

則$(a+b)(a-b)=$？(95-2)

(A) 16　(B) 32　(C) 63　(D) 130



解答

- $81-49=(a+b)(a-b)=32$

題目

H. 將一塊邊長 $\overline{AB}=15$ 公分、$\overline{BC}=20$ 公分的長方形鐵片 $ABCD$ 沿對角線 $\overline{BD}$ 對摺後豎立，使得平面 ABD 與平面 CBD 垂直，則 A、C 兩點（在空間）的距離 $\overline{AC}=\sqrt{㉛㉜㉝}$ 公分。（化成最簡根式）

107學測

解答

對角線$\overline{BD} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$

$\overline{AE}^2 = 15^2 - a^2 = 20^2 - (25 - a)^2 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow \overline{AE} = 12$

$\overline{EC} = \sqrt{\overline{FC}^2 + \overline{EF}^2} = \sqrt{12^2 + 7^2} = \sqrt{193}$

平面ABD 與平面CBD 垂直後，$\triangle AEC$為直角三角形，角E為直角，因此

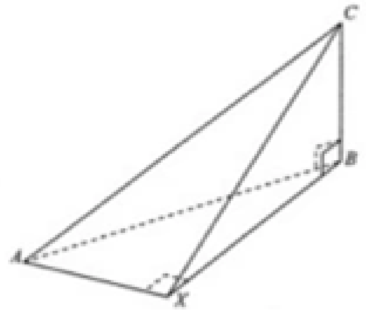
$\overline{AC} = \sqrt{12^2 + 193} = \sqrt{337}$

推廣1--畢氏樹

- **畢達哥拉斯樹**是一個以正方形為起點建立起的分形平面，1942年由荷蘭數學教師阿爾伯特·E·博斯曼提出。由於其建立過程的第一步是在大正方形上方建立兩個較小的正方形，三個正方形間是一個等腰直角三角形，故以發現勾股定理的古希臘數學家畢達哥拉斯命名。最大正方形的尺寸為L×L，那麼整個畢達哥拉斯樹會局限在6L×4L的空間中。畢達哥拉斯樹的平滑曲線是萊維C行曲線

推廣2--三垂線定理

- 三垂理指的一條直線定的是平面內斜線在這個平面上的射影垂直，那麼它也和這條斜線垂，如果與穿過這個平面的一條直。



推廣3--費馬最後定理

- 研究《算數》（Arithmetica）這本書時，費馬在書的空白處寫下($a^{n}+b^{n}=c^{n}$)，當（ $n>2$ ）時無正整數解」
- 300年後懷爾斯（Andrew John Wiles）教授完成證明

應用

- 現代人們生活中廣泛用到畢氏定理，如測量土地的面積、 測量距離、 測量山的高度、 太陽高度等，都會用到畢氏定理，是幾何學最基本的定理之一。

結語

- 畢氏定理是我們國中就學到的一個基本定理，幾乎每個台灣國中生都能背出來，但他是整個幾何學的基本定理之一，生活中也應用廣泛，延伸出來的東西也很多，是一個非常重要的定理，但我們國中學的只是在平面上的，未來如果學到更多的知識，可以去探討更深入的問題，如勾股弦幻圓、勾股弦幻立方體、勾股弦幻球，等等。

謝謝大家

參考資料

- https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%8B%BE%E8%82%A1%E5%AE%9A%E7%90%86
- https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%AF%95%E8%BE%BE%E5%93%A5%E6%8B%89%E6%96%AF
- https://www.junyiacademy.org/course-compare/math-juni/math-8/math-8-legacy_jy/math-grade-8-a/g-mjnfg/g08-mjnfg81/e/m4ngs-13
- https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=14535
- https://www.ceec.edu.tw/files/file_pool/1/0j076559158386586677/03-107%E5%AD%B8%E6%B8%AC%E6%95%B8%E5%AD%B8%E8%A9%A6%E5%8D%B7%E5%AE%9A%E7%A8%BF.pdf
- https://chu246.blogspot.com/2018/02/107.html
- https://baike.baidu.hk/item/%E4%B8%89%E5%9E%82%E7%B7%9A%E5%AE%9A%E7%90%86/1612978
- https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%AF%95%E8%BE%BE%E5%93%A5%E6%8B%89%E6%96%AF%E6%A0%91
- https://pansci.asia/archives/168374