數學思維與解題 期末報告

用機率算錢財、未來與愛情

第四組 （數四乙）

410831201 許藝瀠 410831203 沈宥旻

410831215 陳映竹 410831236 鄭光呂

410831238 張顥繻 410831246 唐翊庭

生活中的機率問題

1. 銅板問題

設甲、乙二人在賭博，甲投擲二公正銅板且不讓乙看到結果。此時丙從旁經過，忍不住說他看見有一銅板朝上。甲聞言對丙說：你破壞了我們的賭局，我的朋友乙正要猜兩個銅板朝上的面是相同還是相異。試問丙提供的資訊是否對乙有幫助？乙應該猜兩個銅板朝上的面是相同還是相異？

答：有幫助，相異

兩銅板朝上的面所有可能的情況：{(正, 正), (正, 反), (反, 正), (反, 反)}

假設 $P(W)$ 為兩銅板在該情況下所有可能情況的機率

$P(A)$ 為兩銅板朝上的面相同的機率

$P(B)$ 為兩銅板朝上的面相異的機率

丙未提供的情況下

W_1：{(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)}

A_1： {(正,正),(反,反)}

B_1： {(正,反),(反,正)}

$$P(A_1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, P(B_1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

丙有提供資訊的情況下

W_2：{(正,正),(正,反),(反,正)}

A_2： {(正,正)}

B_2： {(正,反),(反,正)}

$$P(W_2)=\frac{3}{4}, P(A_2)=\frac{1}{4}, P(B_2)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P(A_2\,|\,W_2)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}, P(B_2\,|\,W_2)=\frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

因此我們可得丙提供的資訊是有幫助的，且乙應該猜相異答對的機率較大

想法：

我們可知兩銅板朝上的面可能有以下四種情況：{(正, 正), (正, 反), (反, 正), (反, 反)}若丙未提供資訊時，兩枚銅板朝上的面相同的情況：{(正, 正), (反, 反)}，兩枚銅板朝上的面相異的情況：{(正, 反), (反, 正)}，故可知兩枚銅板朝上的面相同的機率為 $\frac{1}{2}$，兩枚銅板朝上的面相異的機率為 $\frac{1}{2}$，兩銅板朝上的面相同和相異的機率皆為 $\frac{1}{2}$；若丙提供資訊時，兩銅板朝上的面只有以下三種情況：{(正, 正), (正, 反), (反, 正)}，兩枚銅板朝上的面相同的情況：{(正, 正)}，兩枚銅板朝上的面相異的情況：{(正, 反), (反, 正)}，故可知兩枚銅板朝上的面相同的機率為 $\frac{1}{4}$，兩枚銅板朝上的面相異的機率為 $\frac{1}{2}$，在丙有提供資訊的條件下，我們可利用條件機率得知，兩枚銅板朝上的面相同的機率為 $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$，兩枚銅板朝上的面相異的機率為 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$。因此我們可得丙提供的資訊是對已有幫助的，並且乙應該猜相異答對的機率較大 $\left(\because \frac{1}{3}<\frac{2}{3}\right)$

2. 生日問題

一個班級中有 n 位學生，且班上無雙胞胎的情況下，這個班級中兩個人生日的在同一天的可能性要超過 50%，這個班級最少有幾位學生？

答：23 位

假設每個生日的機率均等，且不計閏年。

$$n=2\,,\,f(2)=\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\approx 0.997=99.7\%$$

$$n=3\,,\,f(3)=\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\approx 0.992=99.2\% \qquad \Rightarrow f(n)=\frac{P_n^{365}}{365^n}$$

$\vdots$

計算出 $f(n)$ 後，再用 100%-$f(n)$ 可得至少有兩位同學同一天生日的機率

$$n=2,100\%-f(2)=100\%-99.7\%=0.3\%$$

$$n=3,100\%-f(3)=100\%-99.2\%=0.8\% \qquad \Rightarrow 100\%-f(n)=100\%-\frac{P_n^{365}}{365^n}$$

$\vdots$

在 n＝23 時，我們可得

$$f(23)=\frac{P_{23}^{365}}{365^n}\approx 0.4927=49.27\%$$

$$100\%-f(23)=100\%-49.27\%=50.73\%$$

因此，一個班級中，在無雙胞胎的情況下，兩個人生日的在同一天的可能性要超過 50%，這個班級最少有 23 位學生。

想法：

假設每個生日的機率均等，且不計閏年。

直接計算相同生日的機率是個挑戰，有相同生日的組合很多，而計算每人都不同生日較容易。因此我們先將問題反轉，計算沒有相同生日的機率，我們先討論只有兩個人（A、B）有不同生日的機率，假設一年中的某日是 A 的生日，剩下的 364 天皆有可能是 B 的生日，A、B 有不同生日的機率 $\approx 0.997=99.7\%$，再考慮 3 個人（A、B、C）的情況，因為 A、B 的生日已佔兩個日子，C 可能是剩下的 363 天的其中一天，因此可得 3 個人的不同天生日的機率 $\approx 0.992=99.2\%$，以此類推，一直至 23 個人皆不同生日的機率 $\approx 0.4927=49.27\%$，因此在 23 人的班級中沒有人生日相同的機率是 49.27%，當我們從 100%減去這 49.27%便得 50.73%，即可得至少有兩人生日相同的機率高於一半。

人數相對少的組內有人生日相同的機率如此高度關鍵在於，相同生日的可能組合出人意料的多，當組內人數逐漸增加，可能組合的數目愈加速增加，5 人組內有 10 對的可能組合，每人能與其餘四人各自組合（$5\times4=20$），這些合有一半是重複的，因為 A 配 B=B 配 A，所以我們將之除以 2（$\frac{5\times4}{2}=20$），同理，10 組內有 $\frac{10\times9}{2}=45$ 對，而 23

人的組內有 $\frac{23\times 22}{2}=253$ 對，組合的數量以平方關係增長，意即它按組別內人數的平方比例增長。遺憾的我們腦袋不擅於，憑直覺即領會非線型函數，所以 23 人看來不大可能產生出 253 對可能組合，當我們的腦袋接受這事實生日問題變得容易理解，253 對組合皆有可能有相同生日，同樣原因，在 70 人的組內有 $\frac{70\times 69}{2}=2415$ 對可能組合，而有兩人相同生日的機率高於 99.9%

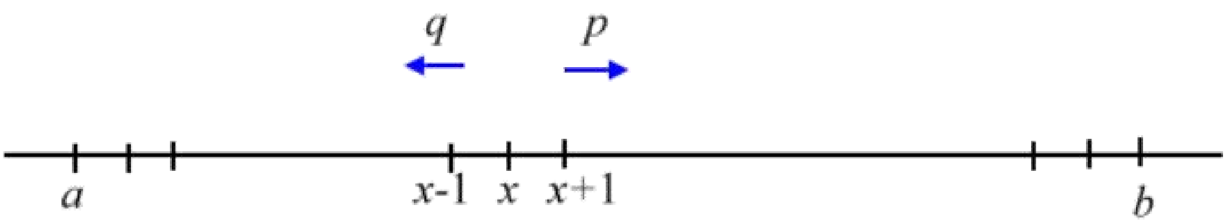
3. 機率中賭博輸光問題的分析

甲、乙二人進行一次一元，不輸光不停止的賭博，甲原有 m 元本錢，乙原有 n 元本錢，甲贏一次的機率為 p，乙贏一次的機率為 q，問甲將乙贏光的機率為多少？

答： $f(m)=\dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}$

想法：

這個機率問題並不簡單，它不能以一般機率方法(分路徑討論)來求機率，因為路徑有無限多種，所以必須用另外的方法解決，考慮路徑 a 到 b，x 為介於 a 到 b 之間的整數，設 $f(x)$ 表示目前在 x 而到達 b 的機率(讓乙輸光光)



我們還知道 $f(a)=0$（甲先輸光，甲贏光乙的機率為 0）

$f(b)=1$（乙已經輸光，甲贏光乙的機率為 1）

$$f(x)=p\cdot f(x+1)+q\cdot f(x-1)$$
$$\Rightarrow (p+q)\cdot f(x)=p\cdot f(x+1)+q\cdot f(x-1)\Rightarrow p\cdot f(x)+q\cdot f(x)=p\cdot f(x+1)+q\cdot f(x-1)$$
$$\Rightarrow p\left[f(x+1)-f(x)\right]=q\left[f(x)-f(x-1)\right]\Rightarrow f(x+1)-f(x)=\frac{q}{p}\left[f(x)-f(x-1)\right]$$

那麼

$$f(x)-f(x-1)=\frac{q}{p}\left[f(x-1)-f(x-2)\right]=\left(\frac{q}{p}\right)^{2}\left[f(x-2)-f(x-3)\right]=\ldots$$
$$=\left(\frac{q}{p}\right)^{x-a-1}\left[f(a+1)-f(a)\right]=\left(\frac{q}{p}\right)^{x-a-1}\left[f(a+1)\right]$$

為了方便，我令$k=f(a+1)$，得$f(x)-f(x-1)=k\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{x-a-1}$

現在列出下列式子在相加

$$f(x)-f(x-1)=k\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{x-a-1}$$

$$f(x-1)-f(x-2)=k\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{x-a-2}$$

$$\vdots$$

$$f(a+1)-f(a)=k\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{0}$$

$$f(x)=k+k\cdot\left(\frac{q}{p}\right)+k\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{2}+\ldots+k\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{x-a-2}+k\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{x-a-1}\Rightarrow f(x)=\frac{k\cdot\left[1-\left(\frac{q}{p}\right)^{x-a}\right]}{1-\left(\frac{q}{p}\right)}$$

又因$f(b)=1$，$1=\dfrac{k\cdot\left[1-\left(\frac{q}{p}\right)^{b-a}\right]}{1-\left(\frac{q}{p}\right)}\Rightarrow k=\dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{b-a}}$，我們求出了$f(x)=\dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{x-a}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{b-a}}$

這個公式套用至前面的問題$a=0,b=m+n$，故問題的答案為$f(m)=\dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}$

貝氏定理

貝氏定理介紹

貝氏定理（Bayes'Theorem）

提出者：馬斯‧貝葉斯（Thomas Bayes, 1702-1761）

托馬斯出身於英國新教徒家庭，是家中七個孩子的老大。1719 年，貝葉斯進入蘇格蘭的愛丁堡大學，主要是學習邏輯和神學。在當時，新教徒是無法得到牛津大學或是劍橋大學的入學資格。儘管沒有任何他在愛丁堡學習數學的記錄，不過，他為了反駁貝克萊主教（George Berkeley, 1685-1753）在《分析學家》（*The Analyst*, 1734）對微積分邏輯基礎的攻擊，曾在 1736 年寫過一篇〈流數學說的介紹，以及對《分析學家》作者的反對提出數學家的防禦〉，文章一開頭便提到：**我早就認為流數法的基本原理和規則，需要更為全面且清楚的解釋和證明。**無疑表明著他對流數法的熟悉。

不過，他卻反對貝克萊出於宗教因素的批評。很快地，貝葉斯也被任命為牧師，擔任他父親的助手。儘管沒有任何數學的作品，1742 年貝葉斯被選為英國皇家學會的院士。不過，當時的風氣是沒有人在生前用自己的名字義發表作品，上面提及 1736 年的數學作品是匿名出版。直到他死後，才出版有關 logz!（由斯特林和棣美弗所給出）的漸近級數之斂散性的數學研究。

事實上，貝葉斯更值得注意的是他在機率論上的研究：〈《機率論》中一個問題的解決〉（*An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*），而《機率論》（*The Doctrine of Chances*, 1718）是棣美弗有關機率的數學著作。同樣地，在他死後，他的朋友理查德‧普萊斯（Richard Price, 1723-1791）發現此篇論文，加以重新編輯註解，於 1764 年送交英國皇家學會的《自然科學會報》（*The Philosophical Transactions of the Royal Society*）出版。在這篇論文中，有今日我們所熟知的條件機率之討論，以及被稱為貝氏定理的命題。

文章開頭，便表明他想解決的問題是給定某未知事件（指發生的機率未知）發生與未發生的次數，求在一次試驗中發生的機率值介於兩個指定機率值之間的可能性（機率）。

貝氏定理是很重要的統計工具，可以視為**條件機率的轉換過程**，白話來說 $P(A|B)$可以推導出$P(\mathrm{B|A})$；$P(\mathrm{B|A})$可以推導出$P(A|B)$，看在現實生活中你知道什麼已知條件機率，就可以推導出相對的條件機率了。

1. 全機率定理（Law of Total Probability）

貝氏定理會牽涉到全機率定理，因此這裡簡單做介紹。

定義 1.1（分割，partition）

設$A_1, A_2, \ldots, A_n$為樣本空間 S 中之一組事件，若滿足下面兩個條件：

(1) 兩兩互斥：$A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$
(2) 集體包含：$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$

我們稱$A_1, A_2, \ldots, A_n$為樣本空間 S 上之一組**分割**。

定理 1.2（全機率定理）

設$A_1, A_2, \ldots, A_n$為樣本空間 S 中之一組分割，則對於樣本空間 S 中任意事件 B 而言，我們有 P（B）=$\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$=$\sum_{i=1}^{n} P(BA_i)P(A_i)$

2. 貝氏定理

定理 2.1（貝氏定理）

設$A_1, A_2, \ldots, A_n$為樣本空間 S 中之一組**分割**，B 是樣本空間 S 上之任意事件，則

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \vee A_i)P(A_i)}$$

其中 k 可以是任意 $1, 2, \cdots, n$
證明：

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k \cap B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)} = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \vee A_i)P(A_i)}$$

(1) 可以看出貝氏定理的分母就是一個全機率定理。
(2) 事前機率（priorprobability）：$P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n)$
指的是事件 B 發生前之機率，此即未考慮事件 B 之下，$A_1, A_2, \ldots, A_n$各別事件發生的**非條件機率**。

（3） 事後機率（posteriorprobability）：$P(A_1 \vee B), P(A_2 \vee B), \ldots, P(A_n \vee B)$
指的是已知事件 B 發生後之機率，此即給定事件 B 已發生之下，
$A_1, A_2, \ldots, A_n$各別事件發生的**條件機率**。

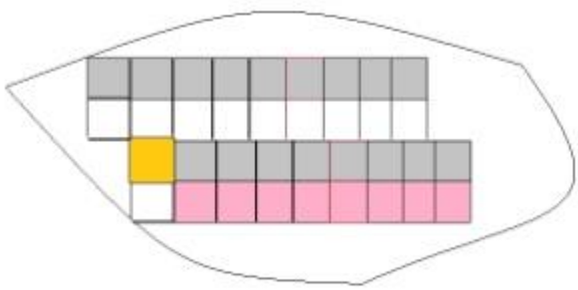
（4） 貝氏定理的意義與精神：
當得到新的訊息，也就是認知到事件 B 已經發生的新事實，此時事件
$A_1, A_2, \ldots, A_n$不宜再用事前機率來評估，我們既知事件 B 已經發生，就要
想辦法重新估算一下，再給定事件 B 已經發生的前提條件之下，事件
$A_1, A_2, \ldots, A_n$發生的條件機率，而貝定理可以幫我們完成這件事。
EX：
某石油公司根據地質資料，評估某地有 20%的機率實際蘊藏有石油，又
根據經驗，如一地實際蘊藏有石油，則在該地鑽依探勘油井有 80%的機
率會挖出石油。現在，該公司在已經連續鑽兩座探勘油井挖不到油的情
況下，計算該地實際蘊藏有石油的機率為何?
SOL：
令 A 事件表示該地蘊藏有石油
令 B 事件表示連續兩座探勘油井挖不到石油
則$P(A) = 0.2, P(A') = 0.8, P(B|A) = 0.2^2, P(B \vee A') = 1^2$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A')} = \frac{0.2^2 \times 0.2^2}{0.2^2 \times 0.2 + 1 \times 0.8}$$

3.貝氏定理的應用

（1）貝氏搜尋理論（Bayesian Search Theory）

1968 年美國海軍的核子動力潛艇天蠍號在西班牙與葡萄牙西邊的大西洋海域失蹤，連艦上的官兵都全無訊息。這對海軍當然是極大的震撼，於是進行大規模的搜索，希望能釐清失事原因。但幾個月的搜尋都無功而返，最後不得不求救於專家。而統整這些專家的是「貝氏搜尋理論」專家約翰.克萊分，他根據各類專家的意見，確認出潛艇最可能掉落在某半徑 20 英里的海域，而此海域被細分成許多的小方格，每個方格有兩個重要的機率值，分別為 p 與 q，其中 p 表示潛艇落於此一方格的機率，此稱為事前機率，為未加入新資訊更新前的主觀機率，而若潛艇落於此方格會被找尋到的機率為 q。



EX：

即使潛艇真的落在黃色方格，但能找到的機率只有 q，所以當黃色方格搜尋後，如果找不到但失落物仍存於此方格的機率為一條件機率為何?

SOL：

令 A 事件為潛艇在黃色方格

令 B 事件為此方格找不到潛艇，則 B'為此方格找不到潛艇

則$P(A|B')=$

$$\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{p(1-q)}{p(1-q)+(1-p)}=\frac{p(1-q)}{1-pq}=p\times\frac{1-q}{1-pq}<p$$

依此結果可以得知比原先認定的 p 還要小

EX：

對其他的方格而言，在未搜尋前，若潛艇落於其他方格的事前機率為 1-p，則當黃色的方格搜尋未果的情況下，潛艇落於其他方格的機率應該會提升，至於提升為何?可以考慮，在黃色方格找不到的條件下，潛艇落在其他方格的機率應該會調整為何?

SOL：

令 A 事件為潛艇在其他方格

令 B 事件為此方格找不到潛艇，則 B'為此方格找不到潛艇

則

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{1-p}{p(1-q)+(1-p)}=\frac{1-p}{1-pq}>1-p$$

依此結果可知，機率比原先認定的 1-p 還要大。也就是說，當黃色方格搜尋未獲後，其他方格的機率會變動，接著就尋找機率最高的方格，依此原則，直到尋獲為止。

從上述的敘述，可以發現貝氏定理是根據先驗的機率再加上事後的資訊來更新認知。例如搜尋潛艇的故事裡，未搜尋前，專家根據專業知識，整理出一張機率圖，此即為事前的機率。經過搜尋後，若搜尋未果，這是一種資訊，將之加入重新更新，得到新的機率，再搜尋就再調整，最後會愈接近真實的情況，顯現出貝氏定理的威力。

（2）商學上的應用−賽局理論

最基本的賽局是兩方參賽者，依據雙方行動順序可分成「靜態」（static）與「動態」（dynamic）兩種：靜態賽局表示參與者同時行動或先後行動但不知道前者採取何種行動；而動態賽局則為參與者有先後順序而且可以觀察到先行動者的行動。另外依據對對方資訊的了解可分成有完全認知的「完全資訊」，否則即為「不完全資訊」。

不完全資訊表示對敵方的資訊並不完全了解，如果是動態不完全資訊的賽局，則可以觀察到對方的行動，當對方行動時，會透露出一些蛛絲馬跡，我們即可利用這些訊息，利用貝氏定理來更新對敵方的認知，進而釐定出策略，而取得優勢。

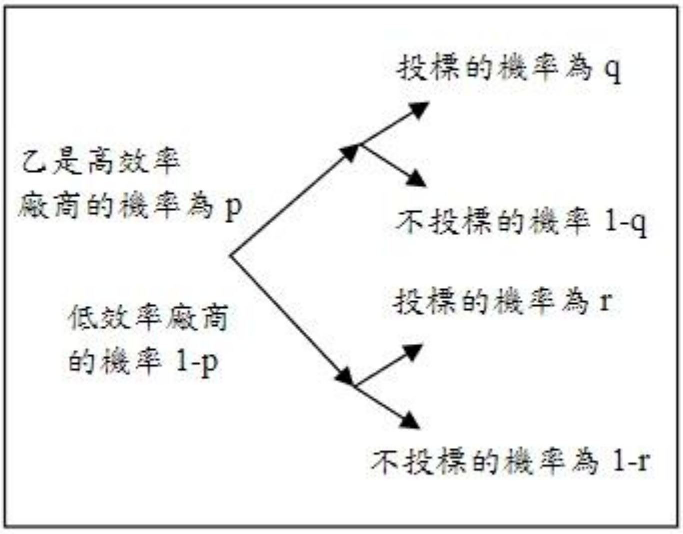
假設最單純的情況，僅有甲、乙兩家競爭的廠商，共同參與某項投標活動，規定以價格最低者得標。把價格壓低，得標機會大增，但獲利縮水。

EX：

現在假設，廠商就只有兩種類型，分別為高效率與低效率兩種，甲廠商根據經驗判斷乙為高效率廠商的機率為 p，則有 1-p 的機率為低效率廠商，此即為先事前率。而對類似的競標案，根據過去的經驗，高效率廠商會競標的機率為 q，低效率廠商為 r，其中（q>r>0），樹狀圖應該表示為何?在確知乙參加競標案的條件下，乙會是高效率廠商的機率為何?

SOL：

其樹狀圖可表示為：



令 A 事件為乙是高效率廠商

令 B 事件為乙有參加競標

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{pq}{pq+(1-p)r}>\frac{pq}{pq+(1-p)q}=p$$

依此結果可以得知，機率值比原先認定的 p 還要大，而此$P(A|B)$稱為事後機率，為利用資訊後調整的機率。得到事後機率後，甲可以根據此值來擬定投標的金額，增加勝算。

機率悖論

悖論介紹

悖論(Paradox)：悖論是指一種導致矛盾的命題。通常從邏輯上無法判斷正確或錯誤稱為悖論，有時違背直覺的正確論斷也稱為悖論。悖論的英文 paradox 一詞來自希臘語，意思是「未預料到的」、「奇怪的」。 如果承假設它是真的，經過一系列正確的推理，卻又得出它明顯是假的；如果假設它是假的，經過一系列正確的推理，卻又得出它明顯是真的。古今中外有不少著名的悖論，它們震撼了邏輯和數學的基礎，激發了人們求知和精密的思考，吸引了古往今來許多思想家和愛好者的注意力。解決悖論難題需要創造性的思考，悖論的解決又往往可以給人帶來全新的觀念。

「悖論」是指一種命題，聲稱某項內容超出甚至反對「通常的見解」。

拋開悖論的各種含義，通常所說的導致矛盾的悖論，應當滿足如下條件：

1. 有一個命題 A，稱為悖論命題。
2. 有一個邏輯系統 L，稱為相關系統。
3. 有一組命題 E，稱為背景命題。背景命題都是相關系統中的真命題。相關系統被簡化為背景命題，背景命題成為悖論證明的依據。
4. 相關系統存在兩個證明可以獲得悖論命題 A 的真值，其中一個證明 A 為真，而另一個證明 A 為假，從而出現矛盾。

因此，要判斷一個悖論是否真的邏輯悖論，就是要確定要素 A、L 和 E，特別是要確認 E 中的命題都是真命題，而且所給出的兩個證明都是正確合規的證明。如果 E 中的命題不真，或者所給出的證明是錯的，則這不是一個邏輯悖論，而是一個邏輯錯誤。許多邏輯悖論最終都可以歸結為一個命題$A \Leftrightarrow \neg A$，稱為悖論情形（paradox situation），是進一步推出矛盾的依據。根據悖論情形，可以有證明 1：假設 A 為真，可以推出 A 為假，矛盾，因此 A 為假。但同時也可以有證明 2：假設 A 為假，可以推出 A 為真，矛盾，因此 A 為真。證明 1 和證明 2 都是正確合規的證明。因此問題就是，$A \Leftrightarrow \neg A$在相關系統中是不是一個真命題。如果是真命題，悖論成立，是相關系統有問題，需要改進。而且改進相關系統以消除悖論的思路也就在於如何避免這一悖論情形。如果不是真命題，那就不能由它推出矛盾，而且該悖論實際上就是一個邏輯錯誤：把一個假命題當作了真命題，並用它進行推理。

Ex：**說謊者悖論**

(A)這個語句為假

- 如果(A)為真，那麼「這個語句為假」為真 → (A)一定為假。
  從(A)為真的假設推導出(A)為假的結論，矛盾。
- 如果(A)為假，那麼「這個語句為假」為假 → (A)一定為真。
  從(A)為假的假設推導出(A)為真的結論，矛盾。

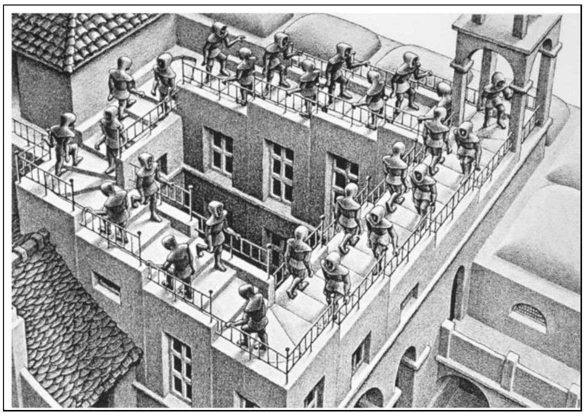
Ex：**理髮師悖論**

理髮師說：我要為城裡人刮鬍子，而且一定只為城裡所有「不為自己刮鬍子的人」刮鬍子。問：理髮師該為自己刮鬍子嗎？

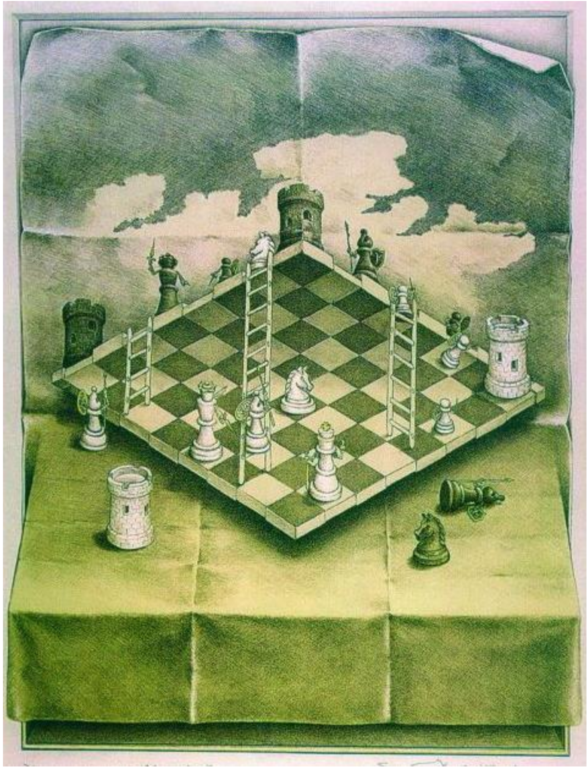
- 若他為自己刮鬍子，按他說「只為城裡所有不為自己刮鬍子的人刮鬍子」→ 他不應該為自己刮鬍子，矛盾。
- 若他不為自己刮鬍子，按他說「一定為所有不為自己刮鬍子的人刮鬍子」→ 他應該為自己刮鬍子，矛盾。

悖論與藝術

1. 潘洛斯階梯（Penrose stairs）

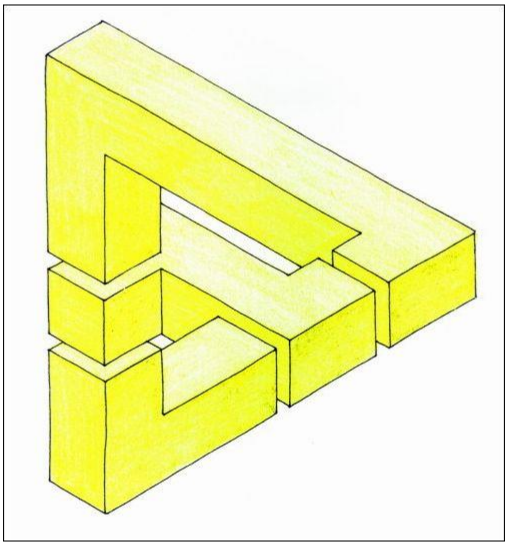


2. 折疊的棋盤：你從上面還是從下面看到棋盤呢?

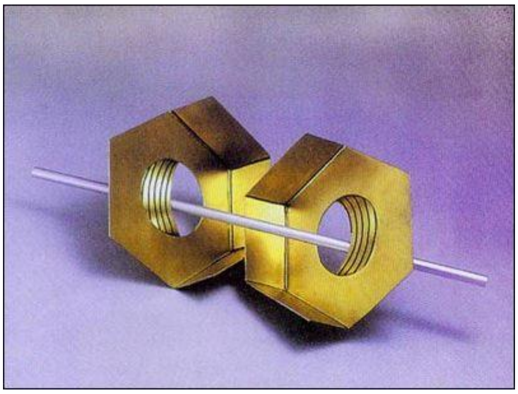


3. 曲折的悖論：一個不可能成立的曲折體(匈牙利藝術家托馬斯·伐尅期創作)

4. 不可能的三角形（瑞典藝術家奧斯卡·路透斯沃德創作）



5. 瘋狂的螺帽：直鋼棒穿過這兩個看似成直角的螺帽孔?



解析：兩個螺帽實際是中空的，其實兩個螺帽並不互相垂直。螺帽被下方光源照到(一般光線應來自上方)，給人們判斷真實三維形狀提供了錯誤信息。

悖論簡單實例

彩票悖論

考慮的是公平的 1,000 張彩票只有一張中獎彩票。如果對彩票的執行了解這麼多，那麼接受某些彩票會中獎是合理的。假設只有當事件發生的概率大於 0.99 時，該事件才有可能發生。基於這些理由，接受彩票 1 號不會中獎的命題被認為是理性的。由於彩票是公平的，因此接受 2 號彩票也不會中獎是合理的。實際上，接受彩票中任何一張不會中獎的單張彩票是合理的。然而，接受 1 號票不會中獎，接受 2 號票不會中獎，等等，直到接受 1,000 號票不會中獎，這意味著接受沒有票會贏是理性的，這意味著接受是理性的一票中獎與無票中獎的矛盾命題。

原因：以機率為依據做決策是不合邏輯的，然而邏輯和統計本身卻是大不相同，在邏輯上，一個命題只有對和錯兩種劃分，而在統計上，卻可以說成對的機率有 50%，錯的機率為 20%，就是這一點不確定性造就了以邏輯推理和統計為基礎所得決策上的不一致，或者說矛盾，這就是統計關係不等於因果關係。

結論：統計關係不等於因果關係。

釐清常見迷思與悖論的差別

1. 三門問題

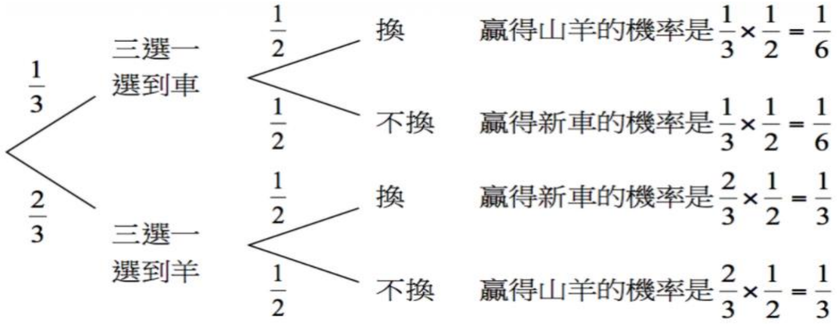
假設你正在參加一個遊戲節目，你被要求在三扇門中選擇一扇：其中一扇門後面有一輛汽車；其餘兩扇門後面則是山羊。你選擇了一道門，假設是一號門，然後知道門後面有什麼的主持人，開啟了另一扇後面有山羊的門，假設是三號門。他然後問你：「你想選擇二號門嗎？」轉換你的選擇對你來說是一種優勢嗎？

答：換門贏得汽車的機率為$\frac{2}{3}$，不換門的機率為$\frac{1}{3}$，因此應該**選擇換門**！

〈法一〉以條件機率−貝式定理

在條件機率中，以$P(A|B)$表示在B發生的條件下A發生的機率，其值：

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(\mathrm{B})}$$



假設A為得獎的情況，A'為不得獎的情況，B為換門的情況，B'為不換門的情況如果要得獎會發生以下兩種狀況：

A. 不換門得獎：$P(A|B')=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}\cong 0.33$

B. 換門得獎：$P(A|B)=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3}\cong 0.66$

從貝式定理可以得到，換門的機率比較高！

〈法二〉 窮舉法(列表觀察)

我們也可以透過列表得到相同的結論，在下表中假設「選中」為參與者第一次選中的門，「開門」則是主持人打開的有山羊的門，「換門」則是剩下的那個門

汽車	山羊	山羊	結果
選中	開門	換門	不換門贏
換門	選中	開門	換門贏
換門	開門	選中	換門贏

從上表可以清楚看出，換門贏的機率為$\frac{2}{3}$，不換門的機率為$\frac{1}{3}$。

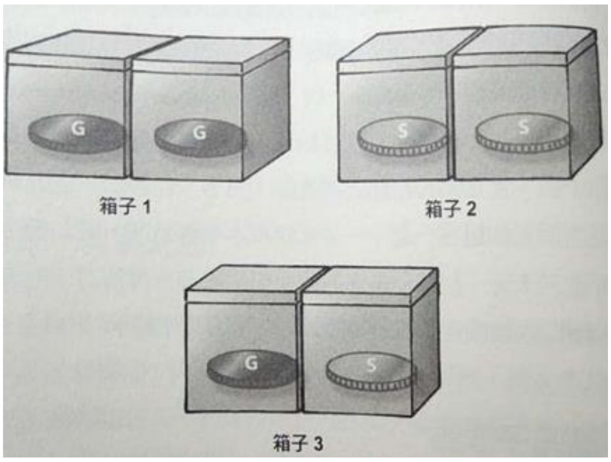
〈法三〉直覺想法(錯誤想法)

當我從三道門選完之後，主持人打開了一扇門。這時候我請另外一個場外人來看現在的局面：兩扇門關閉，一扇門打開是山羊，那這時候這個局外人選中的機會不就是$\dfrac{1}{2}$？

答：這個推論其實是正確的，以一個局外人看到的情況與機率確實是$\dfrac{1}{2}$，但這樣的思考前提是錯誤的，因為這位局外人並沒有參與一開始三門的選擇。

條件機率有一個重要的概念，也就是一個事件的機率會隨著情境的不同（提供訊息的改變）而可能會有所改變。

2. 伯特蘭箱子悖論



有三個箱子，每個箱子裡各有兩枚硬幣，放置方式如下：每個箱子都隔成兩半；每一半各放一枚硬幣，而且蓋子可以單獨打開來查看裡頭的硬幣種類(但不允許查看另一枚)。第一個箱子裡放了兩枚金幣(代號 GG)，第二個箱子裡放了兩枚銀幣(代號 SS)，第三個箱子則有金幣和銀幣各一枚(代號 GS)。
請問你選到內有金幣跟銀幣的箱子機率有多少？ **答：三分之一**

接著，隨機挑選一個箱子。如果打開半邊的蓋子發現裡面是金幣，那麼這個箱子是 GS 箱的機率有多少？在發現一枚金幣的當下，你已經知道這個箱子不可能是 SS 箱，排除之後只剩兩種可能性：GG 箱或 GS 箱。因此它是 GS 箱的機率就是二分之一。 **答：二分之一**

假如打開蓋子出現的是銀幣，我們就可以排除 GG 箱的選項，剩下的只有 SS 箱或 GS 箱兩種可能，所以選到 GS 箱的機會依然是二分之一。 **答：二分之一**

由於打開選定的蓋子出現的不是金幣就是銀幣，而且每種硬幣各有三枚，若兩者出現的機率相同，那麼不論出現何種硬幣，你都有一半的機率選中 GS 箱。也就是說，往某個箱子的其中半邊裡看了一眼之後，**選中 GS 箱的整體概率竟然從一開始的三分之一變成二分之一。**只不過看了某個硬幣一眼，怎麼會使機率產生這麼大的變化？

答：產生這個悖論就是濫用無差別原則導致的。不論是否察看其中一枚硬幣，**選到 GS 箱的機率一直都是三分之一**。

想法：首先考慮從箱子裡找到一枚金幣的情況：金幣共三枚，分別為 G1，G2 和 G3。假設 GG 箱裡放的是 G1 和 G2，G3 在 GS 箱裡。如果你打開其中一個箱蓋並發現一枚金幣，那麼你有三分之二的機率打開的是 GG 箱，因為看到的金幣可能是 G1 或 G2。這枚金幣是 G3 的機率只有三分之一，與你選中 GS 箱的機率一樣。

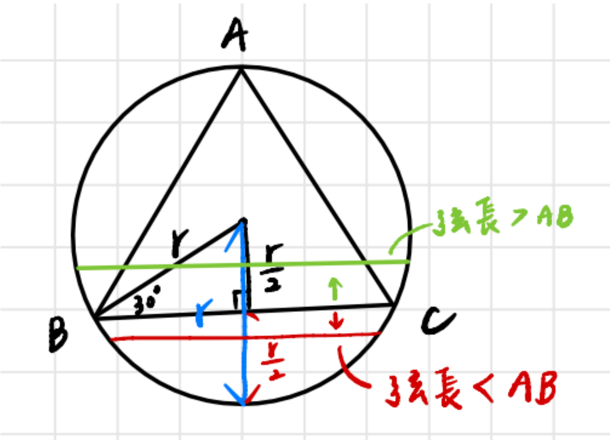
機率悖論問題

計算機率時，若產生隨機變數的「機制」或「方法」的定義方式不同，機率將無法得到精確的定義，得到的機率結果也可能會不同。

1.　伯特蘭悖論（幾何機率悖論）

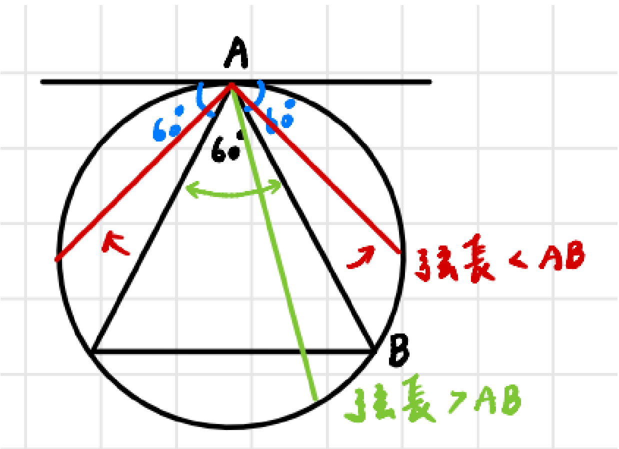
問題：考慮一個內接於圓的等邊三角形。若隨機選圓上的弦，則此弦的長度比三角形的邊較短的機率為何？

<想法一> 隨機半徑（弦心距）



$$P(\text{弦長} < \overline{AB}) = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2}$$

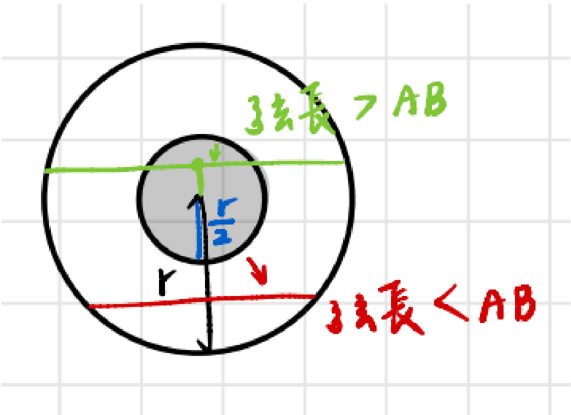
<想法二> 隨機端點（弦切角）



$$P(\text{弦長} < \overline{AB}) = \frac{120°}{180°} = \frac{2}{3}$$

<想法三> 隨機中點（面積）

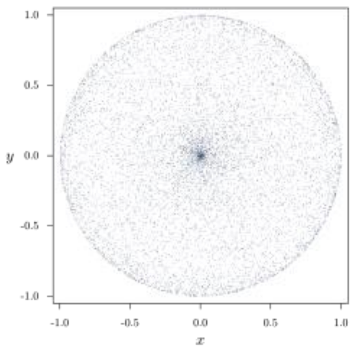
Idea：有切到 $\frac{r}{2}$ 為半徑之圓內部之弦弦長 $> \overline{AB}$ → 用面積算機率



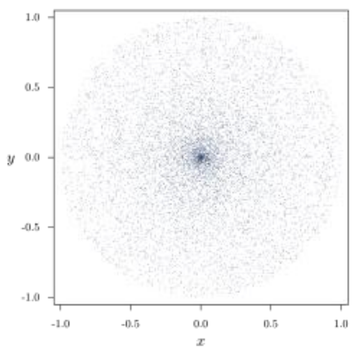
$$P(\text{弦長} > \overline{AB}) = \frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(\text{弦長} < \overline{AB}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

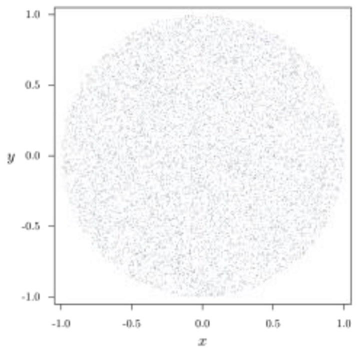
註 1：每一個弦都可被其中點唯一決定，<u>上述三種方法會給出不同中點的分佈</u>



隨機的弦的中點
（方法一：隨機半徑）

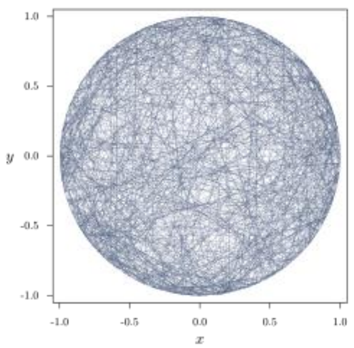


隨機的弦的中點
（方法二：隨機端點）

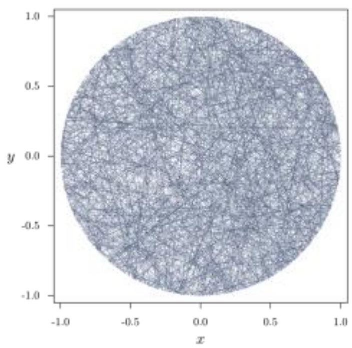


隨機的弦的中點
（方法三：隨機中點）

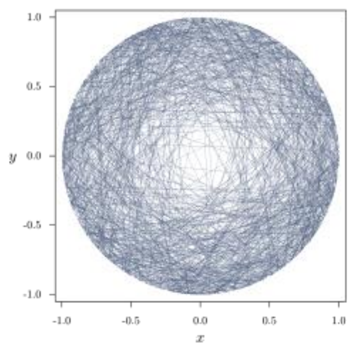
註 2：若直接看<u>弦的分佈</u>，則方法 2 的弦看起來比較均勻，而方法 1、方法 3 的弦較不均勻。



隨機的弦
（方法一：隨機半徑）



隨機的弦
（方法二：隨機端點）

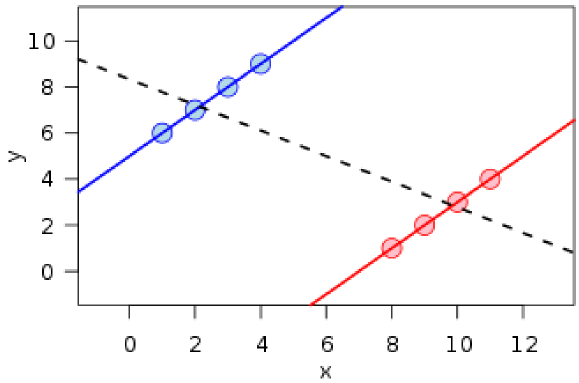


隨機的弦
（方法三：隨機中點）

分析：關鍵在於「隨機」選擇弦的方法。若選定了隨機選擇的方法，問題自然也就會有良好定義的解答。既然不存在一個唯一的選擇方法，那麼也就不存在一個唯一的解答。這三種解答分別對應不同的選擇方法，若沒有更進一步的資訊，也沒有理由認為其中的一個解答會比另一個解答更好。

2. 辛普森悖論（Simpson's paradox）

說明：辛普森悖論是概率和統計中的一種現象，其中趨勢出現在幾組數據中，但當這些組被合併後趨勢消失或反轉。這個結果在社會科學和醫學科學統計中經常遇到，當頻率數據被不恰當地給出因果解釋時尤其成問題。當干擾變量和因果關係在統計建模中得到適當處理時，這個悖論就可以得到解決。辛普森悖論已被用來說明統計誤用可能產生的誤導性結果。



定量數據的辛普森悖論：
兩個獨立的小組出現正的趨勢，
而當小組合併時出現負的趨勢。

Ex：一所美國高校的兩個學院，分別是法學院和商學院。新學期招生，人們懷疑這兩個學院有性別歧視。數據如下表所示：

<法學院>

性別	錄取	拒收	總數	錄取比例
男生	8	45	53	15.1%
女生	51	101	152	33.6%
合計	59	146	205	

<商學院>

性別	錄取	拒收	總數	錄取比例
男生	201	50	251	80.1%
女生	92	9	101	91.1%
合計	293	59	352	

根據兩個表格來看，女生在兩個學院都被優先錄取 → 女生的錄取比率較高

<兩學院合併計算>

性別	錄取	拒收	總數	錄取比例
男生	209	95	304	68.8%
女生	143	110	253	56.5%
合計	352	205	557	

將兩學院的數據匯總 → 女生的錄取比率反而比男生低

這個例子說明，簡單的將分組數據相加匯總，並不能反映真實情況

分析：

1. 兩個分組的錄取率相差很大，從表格可看出法學院錄取率很低，而商學院卻很高。而同時兩種性別的申請者分布比重相反。女性申請者的大部分分布在法學院，相反，男性申請者大部分分布於商學院。結果在數量上來說，拒收率高的法學院拒收了很多的女生，男生雖然有更高的拒收率，但被拒收的數量卻相對不算多。而錄取率很高的商學院錄取了很多男生，使得最後加總的時候，男生在數量上反而占優。
2. 有潛在因素影響著錄取情況。比如說，性別並非是錄取率高低的唯一因素，甚至可能是毫無影響的。至於在學院中出現的比率差，可能是隨機事件。又或者是其他因素作用（如入學成績），卻剛好出現這種錄取比例，使人誤認為這是由性別差異而造成的。

結論：為了避免辛普森悖論的出現，需斟酌各分組的權重並乘以一定的係數，消除以分組數據基數差異而造成的影響。同時必需清楚了解情況，以綜合考慮是否存在造成此悖論的潛在因素。

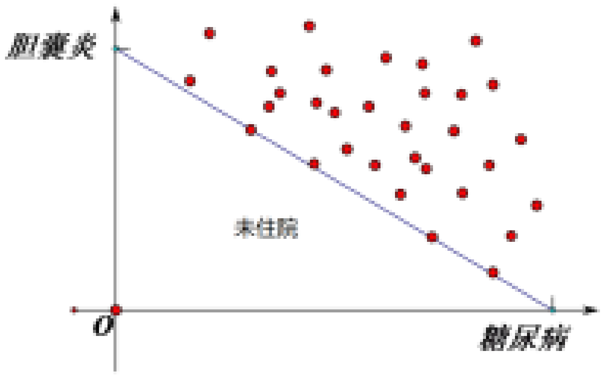
3. 伯克森悖論

指的是兩個本來無關的變數之間體現出貌似強烈的相關關係。

統計學家約瑟夫·伯克森和美國醫生在 1946 年提出的一個問題。他研究了一個醫院中患有糖尿病的病人和患有膽囊炎的病人，結果發現患有糖尿病的人群中，同時患膽囊炎人數較少；而沒有糖尿病的人群中，患膽囊炎的人數比例較高。這似乎說明患有糖尿病可以保護病人不受到膽囊炎的折磨，但是從醫學上講無法證明糖尿病能對膽囊炎起到任何保護作用。

想法：假設這個醫院只治療兩種疾病：糖尿病和膽囊炎。畫一個平面直角座標系：橫座標表示他患有糖尿病的嚴重程度，縱軸表示患有膽囊炎的嚴重程度，再把每一個人按照兩種疾病的輕重畫在座標系中。

如果對全體人員進行統計，就會發現糖尿病和膽囊炎並沒有相關性。但是如果只對醫院中的患者進行統計，就會出問題。如果病人的糖尿病或者膽囊炎問題比較輕，病人就不需要住院，所以不會被統計到。來到醫院的病人要麼是糖尿病，要麼是膽囊炎，要麼二者兼有。所以，我們需要把圖像左下方的點都去掉，他們不在我們統計的範圍內，我們只會統計到這條線右上方的點。故發現糖尿病和膽囊炎呈現出負相關了(如右圖)。不患有糖尿病的人，更有可能患有膽囊炎，而患有糖尿病的人，膽囊炎的比例就會下降了。



結論：**伯克森悖論是一種統計偏差**，因為我們忽略了身體健康而沒有入院的人，只在醫院的病人中進行統計，這些病人一定患有這樣或者那樣的疾病。所以，如果患者沒有糖尿病，那麼就一定患有其他疾病，比如膽囊炎，這就形成了糖尿病與膽囊炎負相關的假象。

參考資料 References

生活中的機率問題

黃文璋(2010)。機率應用不易。數學傳播，34 卷 1 期，p14-28。
https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d341/34102.pdf

看 TED 學數學-從機率的角度看生活中的神奇巧合！—授課橘。
https://teach-orange.com/%E5%A4%9A%E5%85%83%E6%95%99%E6%A1%88/390

機率中賭博輸光問題分析—中華科技大學。
http://www.cust.edu.tw/mathmet/graph/randomwalk.htm

貝氏定理

蘇俊鴻(2014)。貝葉斯和貝氏定理(1) (Thomas Bayes and Bayes' Theorem(1)) —科學 Online 高瞻自然科學教學資源平台
https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=58765

蘇俊鴻(2014)。貝葉斯和貝氏定理(2) (Thomas Bayes and Bayes' Theorem(2)) —科學 Online 高瞻自然科學教學資源平台
https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=58766

陳昱成(2013)。貝氏定理的應用。科學教育月刊，第 357 期。
https://www.sec.ntnu.edu.tw/uploads/asset/data/62564060381784d09345bb7f/02-101022-(%E7%9F%A5%E8%AD%98)%E8%B2%9D%E6%B0%8F%E5%AE%9A%E7%90%86%E7%9A%84%E6%87%89%E7%94%A8%EF%BC%88%E6%9C%88%E5%88%8A%EF%BC%89.pdf

機率悖論

悖論—維基百科。資料檢索日期：2022 年 12 月 8 日。
https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%82%96%E8%AE%BA

說謊者悖論—維基百科。資料檢索日期：2022 年 12 月 8 日。
https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E8%AA%AA%E8%AC%8A%E8%80%85%E6%82%96%E8%AB%96

理髮師悖論—維基百科。資料檢索日期：2022 年 12 月 8 日。
https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E7%90%86%E5%8F%91%E5%B8%88%E6%82%96%E8%AE%BA

考你的眼力能看清楚這些神奇悖論圖嗎？—隨意窩。
https://blog.xuite.net/lee54816/01/14246629

數據分析不踩雷必讀：讓人懷疑人生的七大悖論—IT 邦幫忙。
https://ithelp.ithome.com.tw/articles/10230554
蒙提霍爾問題(三門問題)—維基百科。資料檢索日期：2022 年 12 月 8 日。
https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/%E8%92%99%E6%8F%90%E9%9C%8D%E7%88%BE%E5%95%8F%E9%A1%8C
伯特蘭箱子悖論，悖論：破解科學史上最複雜的 9 大謎團—泛科學。
https://pansci.asia/archives/38866
伯特蘭悖論—維基百科。資料檢索日期：2022 年 12 月 8 日。
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BC%AF%E7%89%B9%E8%98%AD%E6%82%96%E8%AB%96
辛普森悖論—維基百科。資料檢索日期：2022 年 12 月 8 日。
https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E8%BE%9B%E6%99%AE%E6%A3%AE%E6%82%96%E8%AE%BA
伯克森悖論—百度百科。資料檢索日期：2022 年 12 月 8 日。
https://baike.baidu.hk/item/%E4%BC%AF%E5%85%8B%E6%9D%BE%E6%82%96%E8%AB%96/19132222