
第五組

凱利公式與21點決勝關鍵

—— 410831113張宸睿 410831240施昕湧 ——
410831118李冠言 410831120黃子宸
410831102王嫻文 410731134張浚毓

凱利公式

(李冠言、黃子宸)

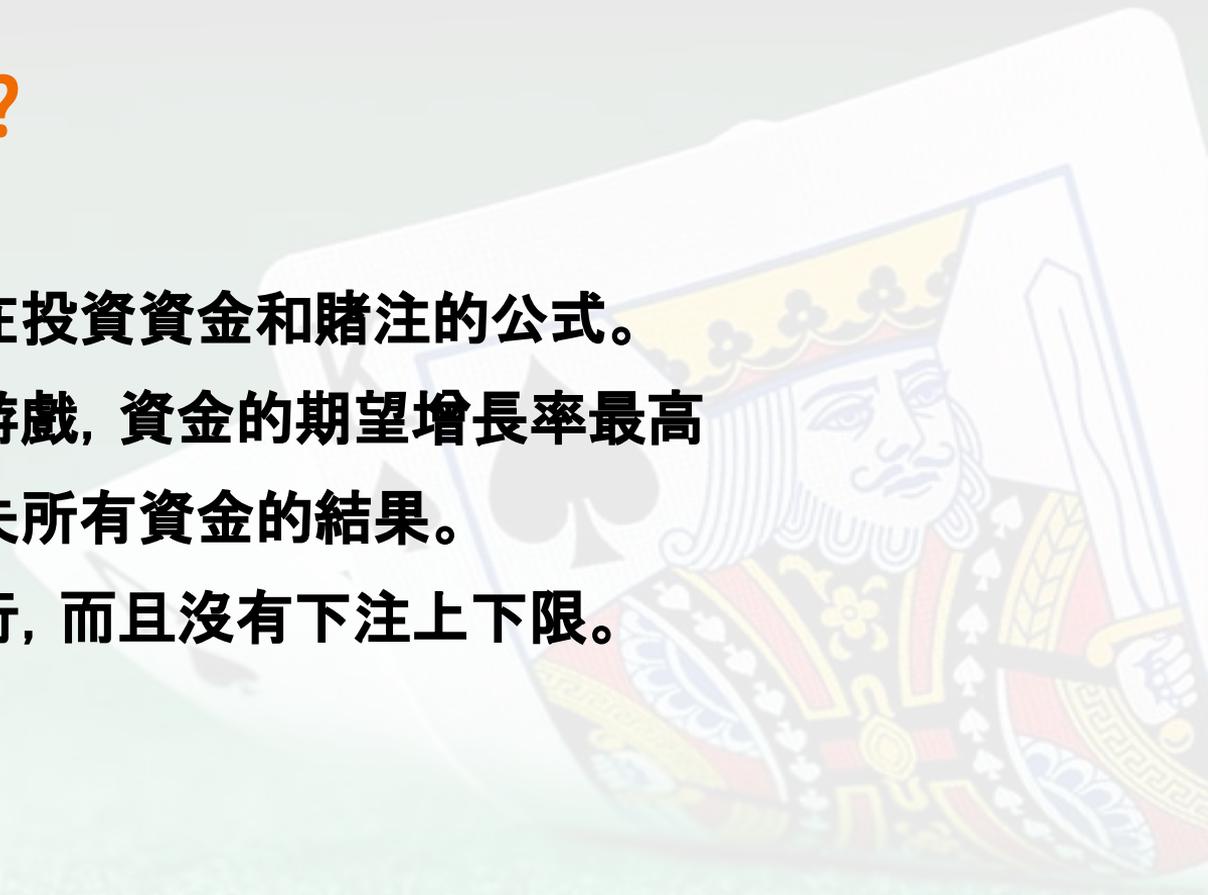


什麼是凱利公式？

凱利公式是一條可應用在投資資金和賭注的公式。

應用於多次的隨機賭博遊戲，資金的期望增長率最高且永遠不會導致完全損失所有資金的結果。

它假設賭博可無限次進行，而且沒有下注上下限。



凱利公式

$$f^* = \frac{bp - q}{b}$$

f^* = 現有資金應進行下次投注的比例

b = 賠率

p = 勝利機會

q = 輸的機會（一般等於 $1-p$ ）

凱利公式範例

範例 I :若一個遊戲有40% ($p=0.40$) 機會勝出, 賠率為2:1 ($b=2$)

$$f^* = (2 \times 0.40 - 0.60) / 2 = 10\%$$

代表此遊戲可下注的最佳及最大比例為10%

範例 II :硬幣的正反面, 正面勝, 反面輸, 勝率50%, 賠率1.5:1 ($b=1.5$)

$$f^* = (1.5 \times 0.5 - 0.5) \div 1.5 = 16.7\%$$

代表此遊戲可下注的最佳及最大比例為16.7%

如何推導? (單一事件)

若勝率為 p ，賠率為 b (壓1元贏了可拿回 $1+b$ 元，輸了1元全賠光)

假設這賭局可不斷的重複玩下去，且每次都壓手上全部資金的比例 f 。

我們要決定這個 f 該選多少，使得在玩過多次賭局後，資金成長最快。

設 A_t 表示玩到第 t 次賭局後的資金，我們分成以下兩種情況討論

情況一

若第 $t - 1$ 次賭局的結果為贏，則 $A_t = A_{t-1}(1 + bf)$

SOL:

因為每次都壓原來資金的 f 比例。換句話說，在時間點 $t - 1$ 時一共壓了 $A_{t-1}f$ 那麼多資金。因為賭局結果為贏，且賠率為 b ，所以會淨賺 $A_{t-1}fb$ ，再加上原來的資金 A_{t-1} ，故在時間點 t 的資金變為

$$A_t = A_{t-1} + A_{t-1}fb = A_{t-1}(1 + bf)$$

情況二

若第 $t - 1$ 次賭局的結果為輸，則 $A_t = A_{t-1}(1 - f)$

SOL:

因為每次都壓原來資金的 f 比例。換句話說，在時間點 $t - 1$ 時一共壓了 $A_{t-1}f$ 那麼多資金。因為賭局結果為輸，且所壓的資金是全部輸光，所以一共賠了資金 $A_{t-1}f$ 減掉 $A_{t-1}f$ ，故在時間點 t 的資金變為

$$A_t = A_{t-1} - A_{t-1}f = A_{t-1}(1 - f)$$

有了上面兩個情況後，我們可以開始計算每一次賭局後的資金變化：

只要下一個時間點**贏**，就將原來的資金乘上 $(1 + bf)$

只要下一個時間點**輸**，就將原來的資金乘上 $(1 - f)$

我們假設總共玩了T次，在T次的賭局裡贏了W次輸了L次 (也就是 $T = W + L$)

因此，從一開始手上的資金為 A_0 ，到時間點T的總資金可以表示如下：

$$A_T = A_0(1 + bf)^W(1 - f)^L$$

再來要做的工作便是決定 f 多少，使得 A_T 可以最大化。

問題：決定 f 使得 $A_T = A_0(1+bf)^W(1-f)^L$ 有最大值。

解法：

Step 1：將原式兩邊取log函數，整理後得

$$\log \left(\frac{A_T}{A_0} \right)^{\frac{1}{T}} = \frac{W}{T} \log(1 + bf) + \frac{L}{T} \log(1 - f)$$

Step 2：若 T 逼近到無窮大(也就是玩無限多次)，因為勝率為 p ，

故 $\frac{W}{T}$ 會趨近於 p ； $\frac{L}{T}$ 會趨近於 $1 - p$ 。即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \log \left(\frac{X_T}{X_0} \right)^{\frac{1}{T}} = p \log(1 + bf) + (1 - p) \log(1 - f)$$

Step 3：決定 f 使得上式有最大值(取微分後設為 0 可得)

$$p \frac{b}{1 + bf} - (1 - p) \frac{1}{1 - f} = 0$$

解出 f 得

$$f = \frac{p(1+b)-1}{b} = \frac{\text{期望淨利}}{\text{賠率}}$$

如何推導? (多重事件)

拋硬幣，人頭出現機率為 p_1 ，賠率為 b_1 ；數字出現機率為 p_2 ，賠率為 b_2 。

假設每次下注的方式為壓資金的 f_1 比例在人頭，壓資金的 f_2 比例在數字。

則 f_1 與 f_2 要如何決定，可以使得玩過多次賭局後，資金成長最快。

我們假設 A_t 表示玩到第 t 次的總資金，我們分成下面兩個情況討論

情況一

若在第 $t - 1$ 回合人頭出現，則 $A_t = A_{t-1}(1 + b_1f_1 - f_2)$

SOL:

因為每次都壓原來資金的 f_1 比例在人頭上， f_2 比例在數字上。

如果時間點 $t - 1$ 時人頭出現，且賠率為 b_1 ，則可淨賺 $(A_{t-1})c(b_1)x(f_1)$

但是壓在數字上面的金額 $(A_{t-1})(f_2)$ 會全部輸光。

最後，再加上原來資金 A_{t-1} ，故在時間點 t 的資金變為

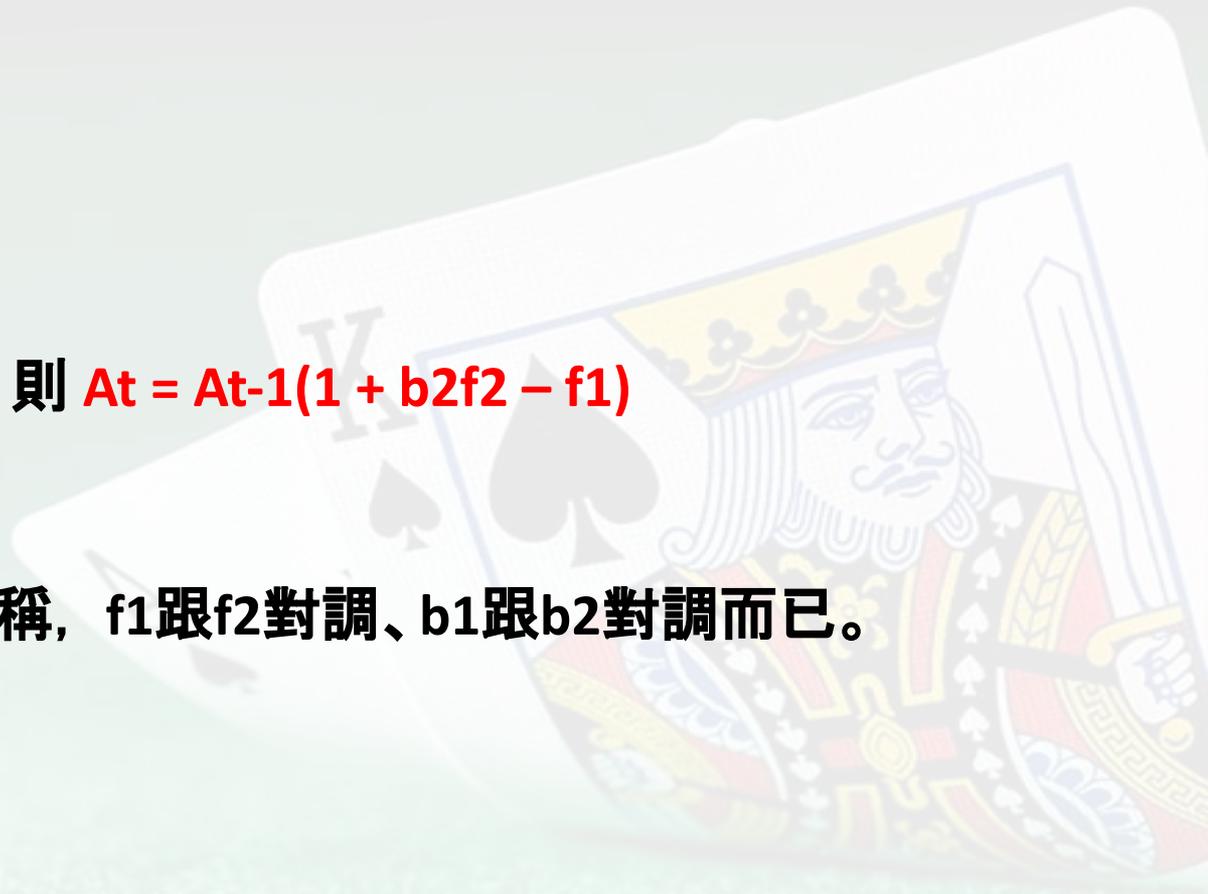
$$A_t = A_{t-1} + (A_{t-1})(f_1)(b_1) - (A_{t-1})(f_2) = A_{t-1}(1 + b_1f_1 - f_2)$$

情況二

若在第 $t - 1$ 回合數字出現，則 $A_t = A_{t-1}(1 + b_2f_2 - f_1)$

SOL:

推導過程完全與**情況一**對稱， f_1 跟 f_2 對調、 b_1 跟 b_2 對調而已。



有了上面兩個情況後，我們可以開始計算每一次賭局後的資金變化。

只要下一個時間點人頭出現，就原來的資金乘上 $(1 + b_1f_1 - f_2)$

只要下一個時間點數字出現，就原來的資金乘上 $(1 + b_2f_2 - f_1)$ 。

我們假設賭局進行 T 回合，人頭出現 W_1 次，數字出現 W_2 次。

因此，從一開始手上的現金為 A_0 ，到時間點 T 的總資產可以表示如下：

$$A_T = A_0(1 + b_1f_1 - f_2)^{W_1} \times (1 + b_2f_2 - f_1)^{W_2}$$

再來便是決定 f 為多少，使得 A_T 可以最大化

問題：決定 f_1 和 f_2 使得 $A_T = A_0(1+b_1f_1 - f_2)^{W_1}(1+b_2f_2 - f_1)^{W_2}$ 有最大值。

解法：

Step 1：將原式兩邊取log函數，整理後得

$$\log \left(\frac{A_T}{A_0} \right)^{\frac{1}{T}} = \frac{W_1}{T} \log(1+b_1f_1 - f_2) + \frac{W_2}{T} \log(1+b_2f_2 - f_1)$$

Step 2：若 T 逼近到無窮大(也就是玩無限多次)，因為人頭出現機率為 p_1 ，故 $\frac{W_1}{T}$ 會趨近於 p_1 ；同理，數字出現機率為 p_2 ，故 $\frac{W_2}{T}$ 會趨近於 p_2 。即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \log \left(\frac{X_T}{X_0} \right)^{\frac{1}{T}} = p_1 \log(1+b_1f_1 - f_2) + p_2 \log(1+b_2f_2 - f_1)$$

Step 3：決定 f_1 和 f_2 使得上式有最大值，分別取偏微分後設為0可解出 f_1 和 f_2 ，即

$$f_1 = p_1 \text{ 且 } f_2 = p_2$$

凱利公式應用到賭局中(21點)

當應用於真錢賭場遊戲時，凱利方法並不完美。

原因是輪盤賭注和二十一點等賭場遊戲發生的次數是有限的，這與支持凱利公式的無限次發生不同。

賭場遊戲中的高波動性使得直接的凱利投注變得不切實際。

玩家不願意在每個結果上冒很大比例的資金風險
尤其是在玩有很多變數的遊戲時。

因此一些投注者採用了凱利方法，例如始終下註一半的凱利數字以保護他們的資金並降低對長期產生巨大影響的計算中的誤差。

改良後的凱莉公式(21點)

二十一點投注者使用的凱利公式的修改版本：

$$f = a/v$$

我們通過將我們的優勢除以遊戲的方差來確定我們的理想下注規模 f

a 代表博弈者的優勢

v 代表遊戲標準差的平方。

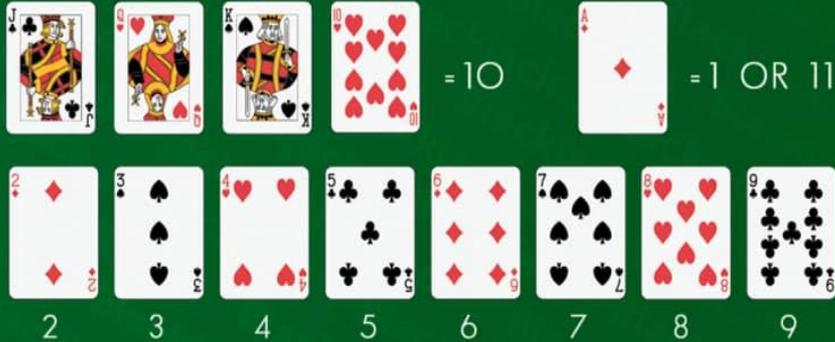
21點遊戲規則

(張浚毓)



21點遊戲的遊玩方式

Blackjack CARD VALUES



- 擁有最高點數的玩家獲勝
 - 其點數必須等於或低於21點
1. 超過21點的玩家稱為爆牌 (Bust)
 2. 2點至10點的牌以牌面的點數計算
 3. J、Q、K 每張為10點
 4. A可記為1點或11點，若玩家會因A而爆牌則A可算為1點。當一手牌中的A算為11點時，這手牌便稱為「軟牌」(soft hand)，因為除非玩者再拿另一張牌，否則不會出現爆牌。

莊家vs玩家

- 莊家在取得17點之前必須要牌，因規則不同會有軟17點或硬17點才停牌的具體區分。且莊家如果拿牌五張而沒有爆牌則視為莊家勝利。
- 每位玩家的目的是要取得最接近21點數的牌來擊敗莊家，但同時要避免爆牌。要注意的是，若玩家爆牌在先即為輸，就算隨後莊家爆牌也是如此。若玩家和莊家擁有同樣點數，這樣的狀態稱為「push」，玩家和莊家皆不算輸贏。每位玩者和莊家之間的遊戲都是獨立的，因此在同一局內，莊家有可能會輸給某些玩家，但也同時擊敗另一些玩家

賭注 & 牌局

• 牌桌上通常會印有最小和最大的賭注，每一間賭場的每一張牌桌的限額都可能不同。在第一筆籌碼下注後，莊家開始發牌，若是從一副或兩副牌中發牌，稱為「pitch」牌局；較常見的則是從四副牌中發牌。莊家會發給每位玩家和自己兩張牌，莊家的兩張牌中會有一張是點數朝上的「明牌」，所有玩家皆可看見，另一張則是點數朝下的「暗牌」。若是四副牌時，發牌時點數會朝上，若為「pitch」牌局則發牌時點數朝下。

美式21點

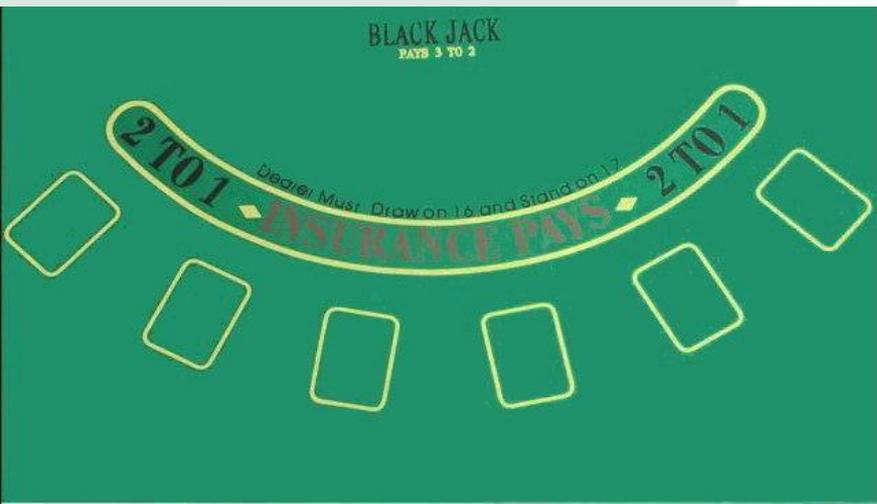
- 美式的二十一點遊戲中，若莊家的明牌是A或價值10的牌，莊家會確認他的暗牌是否會形成二十一點。這項確認會在所有玩家選擇之前進行，但進行前會先詢問玩家是否需要「保險」。若莊家的牌為二十一點(blackjack)，則所有的玩家即時算輸，將損失第一筆賭注籌碼，除非玩者本身也是二十一點，形成同點數的push 狀況。
- 兩張牌點數相加為21(一張A再加一張價值10點的牌)稱為「二十一點」(black jack)，擁有這副牌的玩家即自動成為贏家(除非莊家也同時持有二十一點，這種點數相同的情形就稱為 push)。擁有二十一點的玩家可贏得下注籌碼的1.5倍。部份的賭場僅付給1.2倍的金額；但通常是在僅使用一副牌遊玩的賭局中。

Blackjack

- 一開始此遊戲在美國並不流行，賭場提供額外獎金做為吸客手法，只要賭客手中同時擁有「黑桃A」和「黑色的J」（黑桃J或梅花J都可以），獎金就可以翻為10倍，而此種牌型被稱為「黑傑克」，由此，這個遊戲的名字漸漸變成「Black Jack」，是美國版21點博弈遊戲的名稱，後來雖然額外獎金規則被取消，但名字還是持續流傳。
- 「二十一點」Black Jack 又名為「自然」Black Jack (Natural Black Jack)。如果玩家手中的一張暗牌和一張明牌分別是一張A牌(可作11點)和一張十點牌(K、Q、J、10)，這副牌叫做二十一點(Black Jack) (屬例牌) 莊家須向該玩家賠上1.5倍(或1.2倍)注碼。

流程

10. 對未有爆牌的玩家，比點數大小，大者勝，可得賠金；如莊家爆牌、未有爆牌的玩家便可得賠金
11. 回收已使用的牌及給小費



1. 洗牌
2. 向各玩家分別派發一張牌
3. 莊家發給自己一張牌
4. 向各玩家派第二張牌
5. 莊家再發給自己一張牌
6. 如果莊家明牌是A、荷官會詢問玩家是否購買保險
7. 玩家可進行加注、投降、分牌等動作
8. 莊家逐位詢問玩家是否加牌、直至玩家不加牌才詢問下一位玩家，輪流詢問玩家直至最後一位玩家加牌完成
9. 莊家如不足17點便需加牌直至超過或等於17點

53%

$\frac{4}{12}$

7.802



5.76

21點算牌法教學

(王嫻文)

53%



$\frac{4}{12}$

53%

0.3425

名詞介紹



發牌

由莊家負責發牌，其餘的為閒家。莊家會以順時針方向發給閒家一張明牌，然後給自己一張暗牌；再次以順時針方向向各閒家發明牌，最後也發給自己一張明牌。

要牌

閒家如認為自己手上的2張牌不足以擊敗莊家，可向莊家繼續要牌。莊家以順時針方向詢問各閒家是否繼續要牌。

名詞介紹

停牌

閒家認為自己的點數夠了，可選擇停牌，點數即固定。

雙倍下注

如果閒家手上的兩張牌點數總和是11點，閒家可以選擇加倍投注，投注後會再獲得1張牌。

分牌

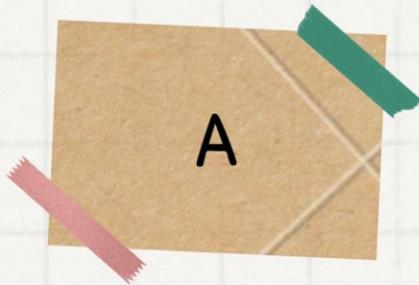
當被發到對子的時候可進行分牌，可將牌分拆成兩組單獨的牌手，但必須加注，下注金額需與原注相同。

投降

閒家覺得自己牌很差，可以選擇放棄，但要付出一半的賭注。

點數計算

1點或11點



牌面點數



10點



高低算牌法

(張宸睿、施昕湧)



開牌概率

- 每張牌的出現的機率。
- 在什麼情況下，單牌的出現機率會出現變化？

例如：假設牌局進行了幾局，前面已經開出了5張10點牌，後面開出10點牌的機率自然會與原先開牌的機率不同，因此我們也能得知先開出的牌會影響往後牌局之開牌情況這個觀念。

流水數

牌面2~6為小牌，流水數+1。

牌面7~9為中性牌，流水數+0。

牌面10~A為大牌，流水數-1。

ex:

(a)當前流水數為0，莊家手牌10，賭客手牌K、Q，則流水數為-3

(b)當前流水數為-1，莊家手牌4，賭客手牌5、6，則流水數為+2

(c)當前流水數為+2，莊家手牌2，賭客手牌4、10，則流水數為_____

真數

由於21點不是只玩一副牌，大部分有4或6副牌。計算出流水數後，我們需要找出真數，而真數可以表示玩家的優劣勢。

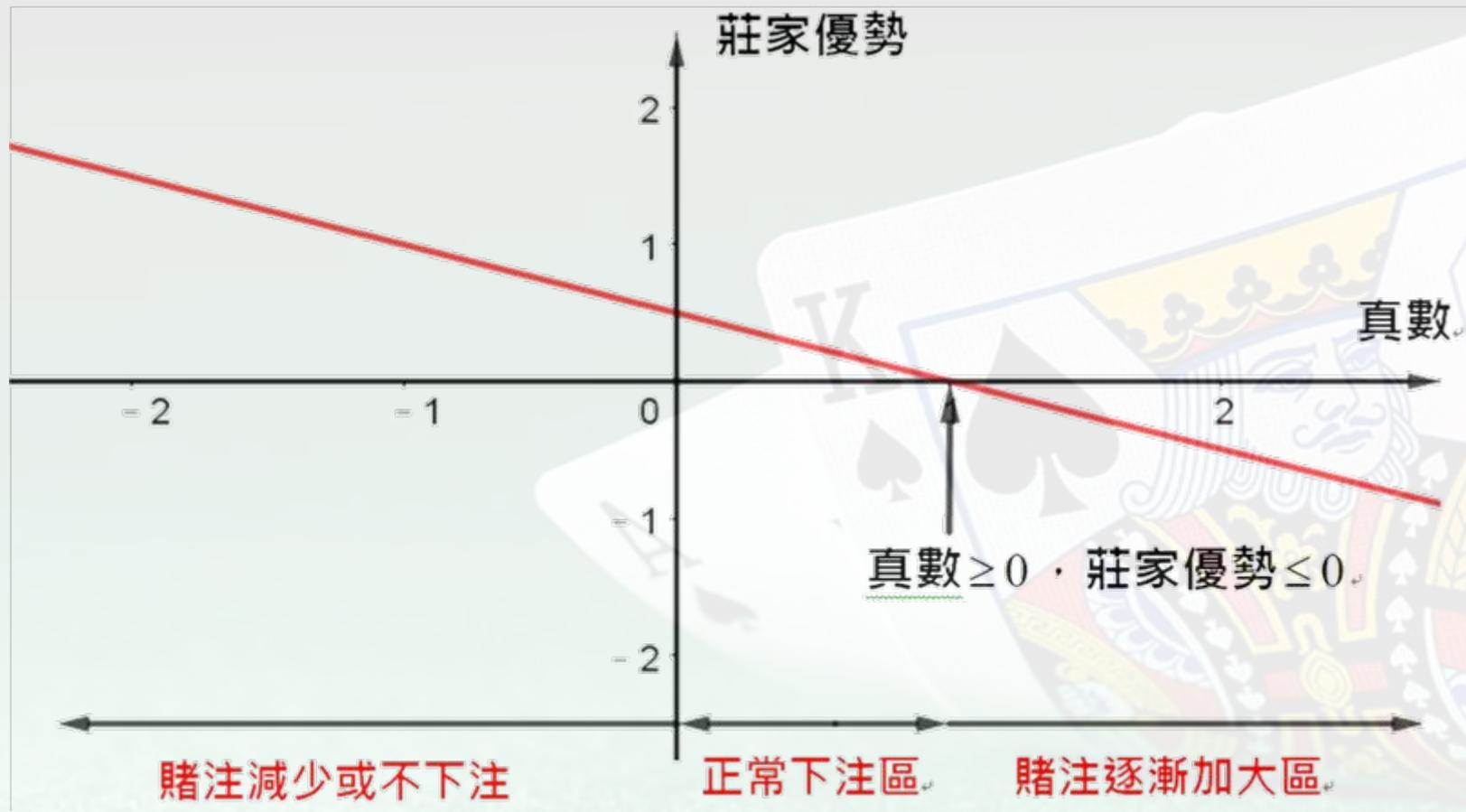
真數的算式如下：

真數 = 流水數 ÷ 餘下牌副數 (剩餘牌副數常用0.5的倍數表示)

ex: (a) 流水數是+8，餘下牌副數是2。運算後，真數是+4。

(b) 流水數是-10，餘下牌副數是2.5。運算後，真數是-4

(c) 流水數是+20，餘下牌副數是1。運算後，真數是+20。



改變後的基本策略表：

分牌 (Pair Splitting)										
	庄家明牌 (Dealer's Upcard)									
	2	3	4	5	6	7	8	9	T	A
(A,A)	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
(T,T)	N	N	6	5	4	N	N	N	N	N
(9,9)	Y	Y	Y	Y	Y	N	Y	Y	N	N
(8,8)	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
(7,7)	Y	Y	Y	Y	Y	Y	N	N	N	N
(6,6)	Y	Y	Y	Y	Y	N	N	N	N	N
(5,5)	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
(4,4)	N	N	N	Y/N	Y/N	N	N	N	N	N
(3,3)	Y/N	Y/N	Y	Y	Y	Y	N	N	N	N
(2,2)	Y/N	Y/N	Y	Y	Y	Y	N	N	N	N

备注：	Y	分牌
	N	不分牌。但如果牌的真数达到红色的值，则应该分牌。
	Y/N	如果分牌后允许加倍就分牌，否则，不分牌。

改變後的基本策略表：

软点数牌 (Soft Totals)										
	庄家明牌 (Dealer's Upcard)									
	2	3	4	5	6	7	8	9	T	A
(A,9)	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
(A,8)	S	S	3	1	1	S	S	S	S	S
(A,7)	Ds	Ds	Ds	Ds	Ds	S	S	H	H	H
(A,6)	1	D	D	D	D	H	H	H	H	H
(A,5)	H	H	D	D	D	H	H	H	H	H
(A,4)	H	H	H	D	D	H	H	H	H	H
(A,3)	H	H	H	D	D	H	H	H	H	H
(A,2)	H	H	H	D	D	H	H	H	H	H
备注:	H	拿牌 (Hit)。但如果牌的真数达到红色的值应该加倍。								
	S	停牌 (Stand)。但如果牌的真数达到红色的值应该加倍。								
	D	如果允许就加倍 (Double down)，否则拿牌。								
	Ds	如果允许就加倍就分牌 (Split)，否则，停牌 (Stand)。								

改變後的基本策略表：

硬点数牌 (Hard Totals)										
	庄家明牌 (Dealer's Upcard)									
	2	3	4	5	6	7	8	9	T	A
17	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
16	S	S	S	S	S	H	H	4	0+	H
15	S	S	S	S	S	H	H	H	3	H
14	S	S	S	S	S	H	H	H	H	H
13	-1	S	S	S	S	H	H	H	H	H
12	3	2	0-	S	S	H	H	H	H	H
11	D	D	D	D	D	D	D	D	D	1
10	D	D	D	D	D	D	D	D	4	3
9	1	D	D	D	D	3	H	H	H	H
8	H	H	H	H	2	H	H	H	H	H
7	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
备注:	H	拿牌 (Hit)。但如果牌的真数达到红色的值应该停牌 (>11) 或加倍 (<12)。								
	S	停牌 (Stand)。但如果牌的真数达到红色的值应该拿牌。								
	D	如果允许就加倍 (Double Down)，否则，拿牌 (Hit)。								

真數與玩家優勢、勝率、投注比例

$$b = 1, \quad f^* = \frac{bp - q}{b} = \frac{bp - (1 - p)}{b} = 2p - 1,$$

f^* : 現有資金應進行下次投注的比例
 p : 獲勝率

真數	玩家優勢(%)	玩家勝率(%)	投注比例(%)	真數	玩家優勢(%)	玩家勝率(%)	投注比例(%)
≤1	≤0	≤50	0	6	2.5	52.5	5
1.5	0.25	50.25	0.5	6.5	2.75	52.75	5.5
2	0.5	50.5	1	7	3	53	6
2.5	0.75	50.75	1.5	7.5	3.25	53.25	6.5
3	1	51	2	8	3.5	53.5	7
3.5	1.25	51.25	2.5	8.5	3.75	53.75	7.5
4	1.5	51.5	3	9	4	54	8
4.5	1.75	51.75	3.5	9.5	4.25	54.25	8.5
5	2	52	4	10	4.5	54.5	9
5.5	2.25	52.25	4.5				

實際練習



資料來源：

1. 二十一點

: <https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/%E4%BA%8C%E5%8D%81%E4%B8%80%E9%BB%9E>

2. 決勝21點玩法、規則、算牌技巧一次全到位: <https://twcasino.net/blackjack/>

3. 軟牌與硬牌: <https://www.zhihu.com/question/27687053/answer/180775683>

4. 完勝21點之一: https://youtu.be/V5FWM8TPM_s

5. 完勝21點之二: <https://youtu.be/lbWlQwlmJnY>

6. 完勝21點之三: <https://youtu.be/CvuVTkliOjQ>

7. 凱莉公式的推導: <https://www.bituzi.com/2013/06/kellyproof.html?m=1>

8. 凱利標準和二十一點

: <https://ap55688.com/%E5%87%B1%E5%88%A9%E6%A8%99%E6%BA%96%E5%92%8C%E4%BA%8C%E5%8D%81%E4%B8%80%E9%BB%9E/>