數學思維與解題期末報告-黃金比例的秘密

411131106 劉佩昀

411131117 潘妤涵

411131128 劉欣宜

411131124 陳翊翎

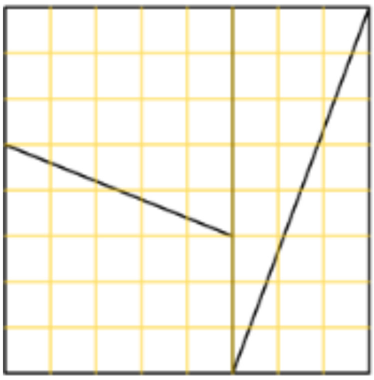
411131140 李靜怡

411131142 吳孟臻

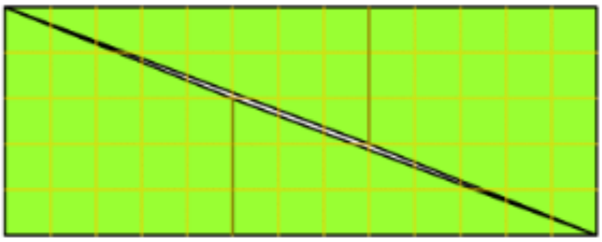
一、動機—縫隙

將一個邊長是8的正方形剪裁，拼成長寬分別是13和5的長方形。

正方形的面積是 $8\times 8 = 64$，長方形的面積是 $5\times 13 = 65$，長方形中間是有縫隙的，而縫隙的面積正好是1。



8 × 8 正方形

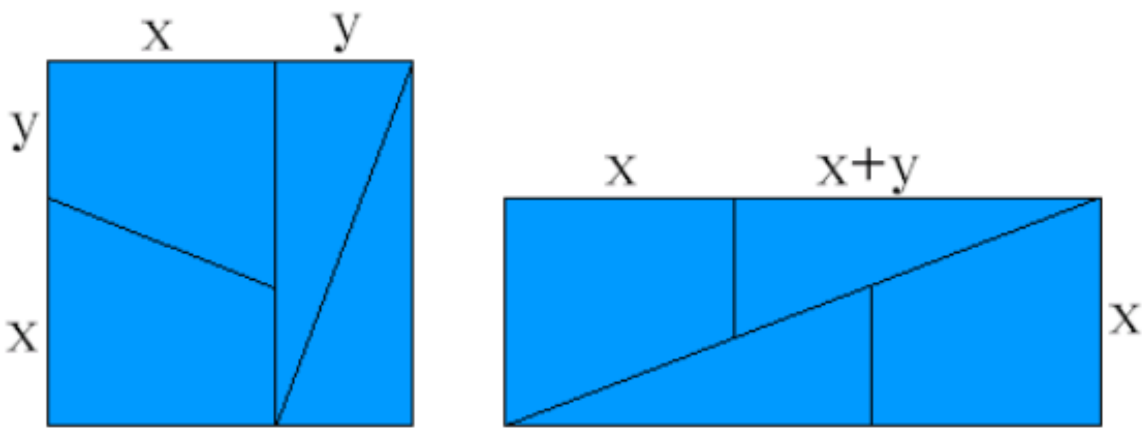


5 × 13 長方形

二、「剪裁正方形，拼成等積長方形。可能嗎？」

如果$(x+y)^2 = (x+x+y)x$，則$x^2 - xy - y^2 = 0$

令 $t = \frac{x}{y}$，則$t^2 - t - 1 = 0$，解得 $t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$。



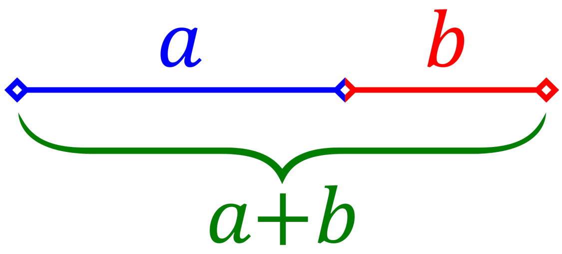
三、黃金比例介紹

1. **是(√5-1)/2的無理數**，約為 0.618
2. 作用不僅僅存在於諸如繪畫、雕塑、音樂、建築等藝術領域，而且在管理、工程設計等方面也有著不可忽視的作用。
3. 古希臘雅典學派的第三大算學家歐道克薩斯首先提出
4. 跟斐波那契數列有關

四、數學定義

1. **一條線段分割為兩部分，較大部分與全長的比值等於較小部分與較大的比值，這個比值即為黃金比例。**

2. 其比值是 $^{2}/_{(\sqrt{5}+1)} = ^{(\sqrt{5}-1)}/_{2}$，近似值為0.618，通常用希臘字母Φ表示這個值。



$a+b$ 比 a 等于 a 比 b

五、基本計算

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\varphi}$$
$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$$
$$\varphi + 1 = \varphi^2$$
$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\ldots$$

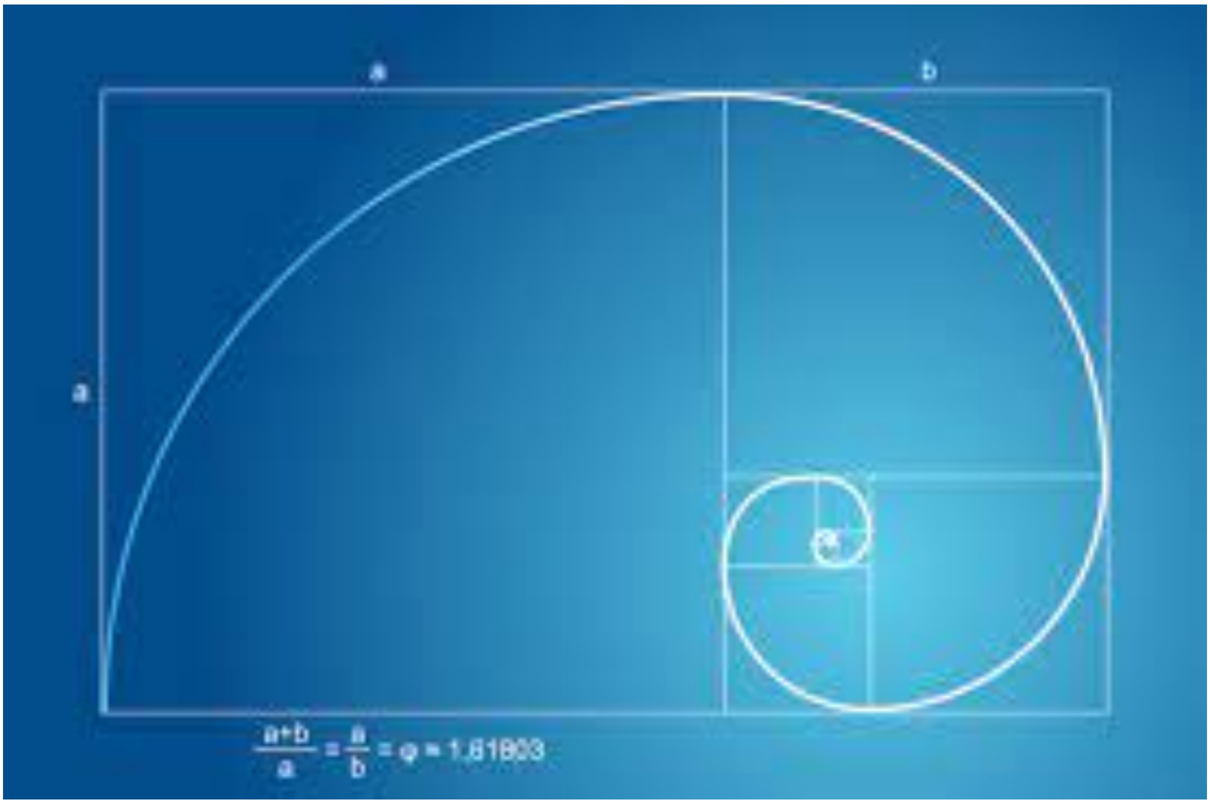
黃金分割奇妙之處，在於其倒數為自身減1，即：1.618...的倒數為0.618...=1.618...-1，並時常被稱為「黃金比例共軛」。

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$$
$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

這個0.618...的數值常用希臘字母Φ表示。

$$\Phi = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{1.61803\,39887\ldots} = 0.6180339887\ldots$$
$$\Phi = \varphi - 1 = 1.6180339887\ldots - 1 = 0.6180339887\ldots$$

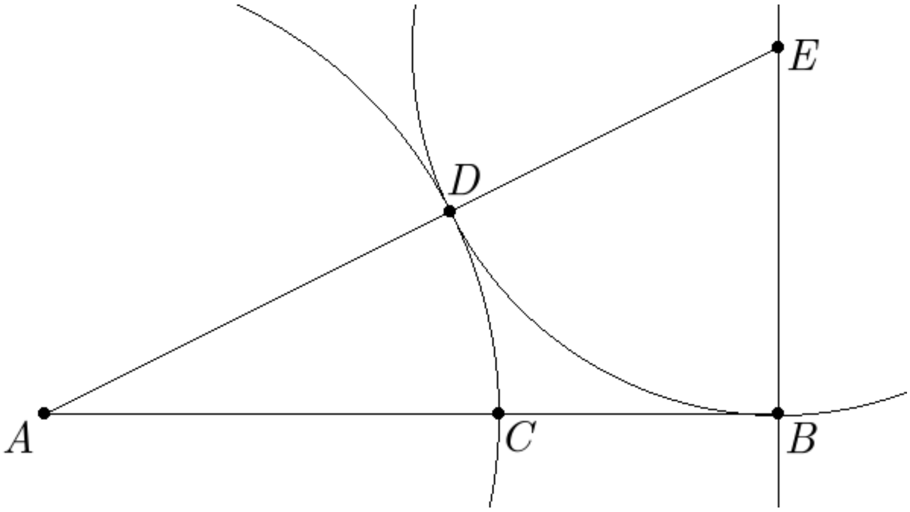
六、黃金螺線



七、作圖

1. 在B點作線段BE垂直於線段AB，使線段BE=線段AB/2(可用中垂線作圖求得)
2. 連接EA
3. 以E點為圓心、線段BE為半徑，畫弧交於線段EA，求得點D

4. 以A點為圓心、線段AD為半徑，畫弧交於線段AB，求得黃金分割點(點C)



八、貴金屬分割

定義：$\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}:1$

n=1	n=2	n=3
$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}:1$	$\dfrac{2+\sqrt{8}}{2}:1$	$\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}:1$
黃金比例	白銀比例	青銅比例

九、貴金屬數

貴金屬數：$\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}:1$

連分數：
$$n+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{n+\ddots}}}=[n;n,n,n,n,\ldots]$$

數列商的極限：

黃金數為斐波那契數列相鄰兩項的比的極限

白銀數為佩爾數列相鄰兩項的比的極限

十、程式碼

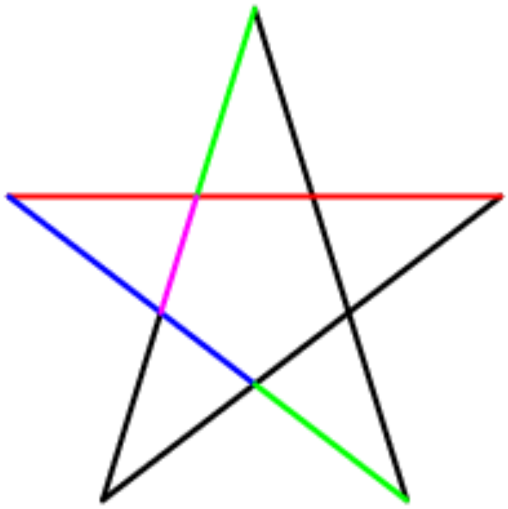
```
#include <iostream>  //Input/Output Stream 的縮寫，即輸入/輸出流
#include <stdio.h>  //用於輸出/輸入函數

using namespace std;

int main() {
    long b, c, d = 0, e = 0, f = 100, i = 0, j, N;  //表整數值
    cout << "請輸入黃金分割數位數\n";  //表標準輸出
    cin >> N;  //使用鍵盤輸入N值
    N = N * 3 / 2 + 6;
    long* a = new long[N + 1];
    while (i <= N) a[i++] = 1;
    for (; --i > 0;
        i == N - 6 ? printf("\r0.61") : printf("%02ld", e += (d += b / f) / f),
        e = d % f, d = b % f, i -= 2)
      for (j = i, b = 0; j; b = b / c * (j-- * 2 - 1))
        a[j] = (b += a[j] * f) % (c = j * 10);
    delete[] a;
    cin.ignore();
    cin.ignore();
    return 0;
}
```

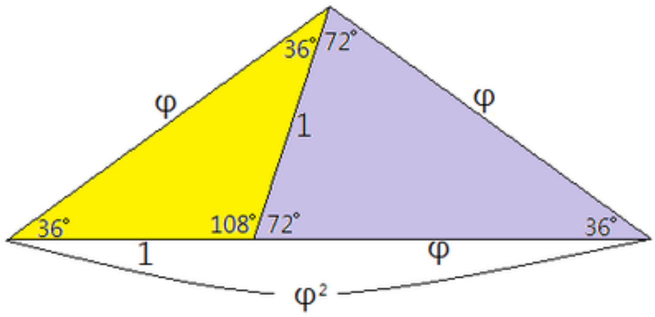
十一、延伸

1.黃金三角形

（1）黃金三角形是一個等腰三角形，其底與腰的長度比為黃金比值，正是因為其腰與邊的比為（√5-1）/2而被稱為黃金三角形。將一個正五邊形的所有對角線連接起來，在五角星中可以

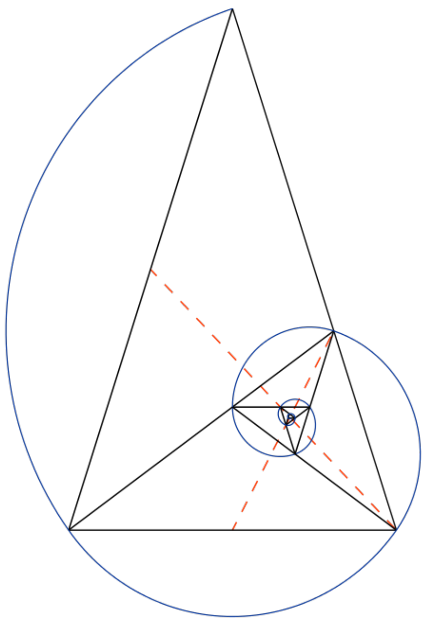
找到的所有線段之間的長度關係都是符合黃金分割比的，所產生的五角星裏面的所有三角形都是黃金分割三角形（下方左圖）。其中銳角三角形的頂角為36度底角72度，而鈍角三角形頂角108度，底角各36度。（下方右圖）





（2）黃金三角形與等角螺線的關係

通過黃金三角形做出等角螺線，方法是不斷地作出72度底角的平分線，通過連接作出的小黃金三角形的兩個底端點便可以看到其中蘊含的等角螺線。

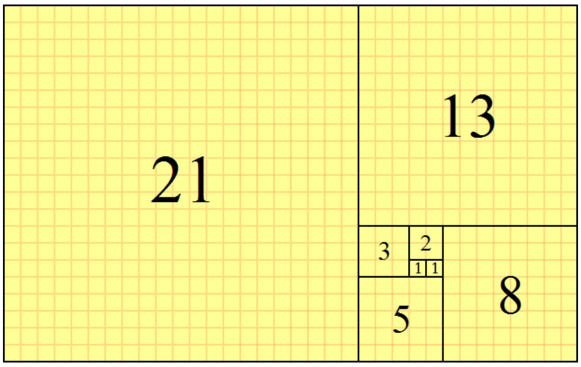


2、斐波那契數列

（1）又稱黃金分割數列，在數學上，斐波那契數列是以遞迴的方法來定義：

- $F_0 = 0$
- $F_1 = 1$
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$（n≧2）

由此遞迴可知斐波那契數列為1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、89……，可以用正方形的變長做疊加，形成長方形。



（2）表達式

初等代數解法

已知

- $a_1 = 1$
- $a_2 = 1$
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (n≥3)

首先構建等比數列

設$a_n + \alpha a_{n-1} = \beta(a_{n-1} + \alpha a_{n-2})$

化簡得

$a_n = (\beta - \alpha)a_{n-1} + \alpha\beta a_{n-2}$

比較係數可得：

$\begin{cases} \beta - \alpha = 1 \\ \alpha\beta = 1 \end{cases}$

不妨設$\beta > 0, \alpha > 0$

解得：

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \beta = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \end{cases}$$

又因為有$a_n + \alpha a_{n-1} = \beta(a_{n-1} + \alpha a_{n-2})$， 即$\{a_n + \alpha a_{n-1}\}$為等比數列。

求出數列$\{a_n + \alpha a_{n-1}\}$

由以上可得：

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \alpha a_n &= (a_2 + \alpha a_1)\beta^{n-1} \\ &= (1+\alpha)\beta^{n-1} \\ &= \beta^n \end{aligned}$$

變形得： $\dfrac{a_{n+1}}{\beta^{n+1}} + \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{a_n}{\beta^n} = \dfrac{1}{\beta}$。 令$b_n = \dfrac{a_n}{\beta^n}$

求數列$\{b_n\}$進而得到$\{a_n\}$

$b_{n+1} + \dfrac{\alpha}{\beta} b_n = \dfrac{1}{\beta}$

設$b_{n+1} + \lambda = -\dfrac{\alpha}{\beta}(b_n + \lambda)$，解得$\lambda = -\dfrac{1}{\alpha+\beta}$。 故數列$\{b_n + \lambda\}$為等比數列

即$b_n + \lambda = \left(-\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}(b_1 + \lambda)$。而$b_1 = \dfrac{a_1}{\beta} = \dfrac{1}{\beta}$， 故有$b_n + \lambda = \left(-\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{\beta} + \lambda\right)$

又有$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \beta = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \end{cases}$ 和$b_n = \dfrac{a_n}{\beta^n}$

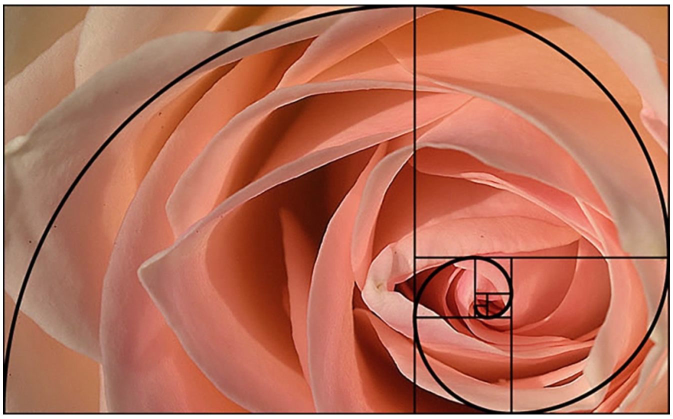
可得$a_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

得出a_n表達式

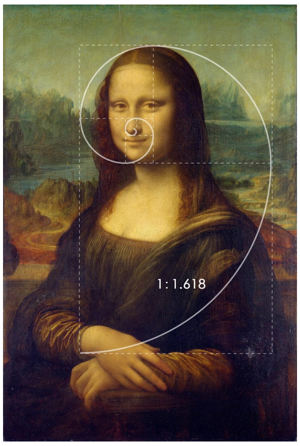
$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

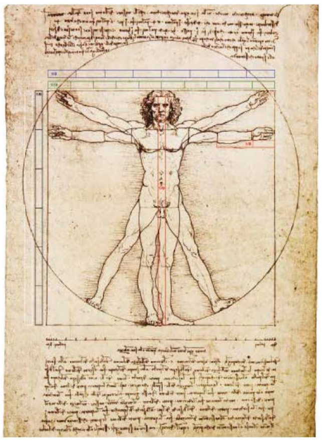
十二、黃金比例的應用

1、自然界

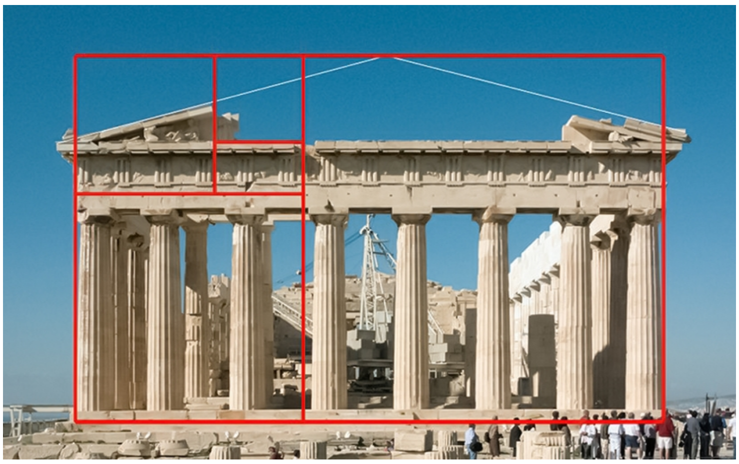


2、藝術作品





3、古文明建築



4、音樂

5、股票

第1種方法是以股價近期走勢中重要的峰位或底位，即重要的高點或低點為計算測量未來走勢的基礎，當股價上漲時，以底位股價為基數，跌幅在達到某一黃金比時較可能受到支撐。當行情接近尾聲，股價發生急升或急跌後，其漲跌幅達到某一重要黃金比時，則可能發生轉勢。

第二種方法則是行情發生轉勢後，無論是止跌轉升的反轉抑或止升轉跌的反轉，以近期走勢中重要的峰位和底位之間的漲額作為計量的基數，將原漲跌幅按0.191、0.382、0.5、0.618、0.809分割為五個黃金點。股價在後轉後的走勢將有可能在這些黃金點上遇到暫時的阻力或支撐。

十三、參考文獻

https://www.newton.com.tw/wiki/%E9%BB%83%E9%87%91%E6%AF%94%E4%BE%8B

https://zh.wikipedia.org/zh-mo/%E9%BB%84%E9%87%91%E5%88%86%E5%89%B2%E7%82%B9(作圖)

https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/黃金三角形（延伸-黃金三角形）

https://www.jyes.com.tw/news.php?act=view&id=3007(應用-股票)

https://kknews.cc/science/ookbk6.html(應用-音樂)

https://everylittled.com/article/147054(應用-藝術作品)

https://www.matestree.com/tw/blog/matestree_blog_v2.php?ot_id=122&blog_id=46&cat_id=52&sub_id=600(應用-自然界)

黃金分割（黃金比例）_百度百科 (baidu.hk)

https://hk.news.yahoo.com/%E6%B1%BA%E5%AE%9A%E6%BC%82%E4%BA%AE%E8%88%87%E5%90%A6%E7%9A%84%E9%BB%83%E9%87%91%E6%95%B8%E5%AD%97-%E5%88%A5%E5%86%8D%E8%BF%B7%E4%BF%A1%E9%BB%83%E9%87%91%E6%AF%94%E4%BE%8B%E4%BA%86-103500340.html應用-自然界)

https://www.gushiciku.cn/dc_tw/109772555(應用-建築)

https://www.zgjgzs.net/quote/show.php/itemid-1468/ (應用-建築)

https://kknews.cc/culture/2x4jpvy.html(應用-藝術作品)

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/斐波那契数（延伸-斐波那契數列）

https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/黃金分割率 (程式碼)

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/貴金屬比例 (貴金屬分割)