

數學思維與解題

倒推數理邏輯

第9組

411131123 施語柔
410831227 張洵昇
410831231 王冠翔
410931251 王俊淵
411031245 廖登峰
410731212 潘彥澄

Basic Logic of Inference

基礎推理邏輯

以下舉三個基礎的邏輯推理:

演繹推理(Deductive reasoning)

以原有規則與案例推出結果，通過應用不同的前提來推斷或得出結論。前提是一個普遍接受的想法、事實或規則，它是為理論或一般想法奠定基礎的陳述。結論是有前提支持的陳述。換句話說，如果前提為真，那麼結論也必須為真。常見使用方法有前提-前提-結論，兩個前提導致結論。

如:上課缺席會被扣學期成績，所以冠翔翹課會被扣學習成績。

這裡「上課缺席會被扣學期成績」為前提，「冠翔翹課」也為前提，「冠翔會被扣學習成績」則為結論。

歸納推理(Inductive reasoning)

在論證的前提支持結論但不確保結論的推理過程，通常是由觀察或收集數據開始，分析數據後得出一般的結論。注意:歸納法得出的結論不是邏輯上的必然;再多的歸納證據也不能保證結論。

如:人總有一天會死，因為蘇格拉底是人，所以蘇格拉底總有一天會死。

從「人總有一天會死」出發，再「因為蘇格拉底是人」的分析解剖，得出「蘇格拉底總有一天會死」的結論。

逆向推理(Abductive reasoning)(Backward Inductive Reasoning)

為根據結果，嘗試尋找規則猜測可能性，是從事實推理到最佳解釋的過程，像醫學診斷就是逆向推理的應用。逆向推理可推測出可能性，但如同歸納推理的結論，不能保證事實的發生。

如:下雨後路會濕滑，而今天路上濕滑，表示有可能下過雨。

從「下雨後路會濕滑」的事實，且觀察到「今天路上濕滑」，得出「有可能下過雨」的推測，此推測仍不能保證「下過雨」的發生。

此報告將著重於逆向推理(Abductive Reasoning)

三人玩遊戲

Getting started to Backward solution

題目講解:王冠翔、王俊淵

Purpose:Using backward inductive reasoning to substitute algebra and complicated arithmetic.

3 people playing a game while only 2 people win and a person loses at the same time,the loser pays to the 2 winners money that that the winner has at the time respectively,after 3 games passed,every person loses exactly 1 time and each have 8 dollars, how much money did they have respectively before the game played?

3人玩遊戲，每場遊戲結果一個人輸兩個人贏，輸的人付給贏的人的錢,是贏的人當時擁有的錢 3人玩3次,每人恰好輸1場遊戲，最後每人皆為8元，請問三個人玩遊戲前分別有多少錢？

In the direct method,we will let the money they have originally be x, y and $24-x-y$.

And after tedious calculations with 2 algebras,we will have the money they originally had.

But in the backward method,we don't need algebra and we can get the solution faster.

The purpose is to claim that the backward method can solve the problem faster if the direct method is not easy to get answers.

正常解法

因為每個人都剩8元得知金錢的總數是24有因為每個人都個輸一次故假設第一、第二與第三個輸的人的啟示金額分別是 x 、 y 、 $24-x-y$ 。進行遊戲後，輸家的餘額為前一局的餘額減其餘兩家前一局的餘額和，其餘兩家則為本金的兩倍。結束三局遊戲後

會得到 $8x - 96 = 8$, $8y - 48 = 8$, $168 - 8x - 8y = 8$, 運算後會得到 $x = 13$, $y = 7$,
 $24 - x - y = 4$ 。

反面解法

由於輸家進行遊戲前的餘額會是進行遊戲後的餘額加上另外兩位贏家進行遊戲後的餘額總和的二分之一，而贏家進行遊戲前的總額會是進行遊戲後的二分之一，
由於每個人個輸一次和最終每個人的餘額都一樣，所以由最終的餘額往前推，會得到
第一、第二與第三個輸的人的餘額分別是13、7、4。

海盜分金問題 Pirate' s Puzzle報告

報告者：施語柔、張滄昇

Pirate' s puzzle aka Pirate Game Theorem is a classic question of game theorem, which also uses backwards induction to solve.

Game theorem is something to find out the highest interests you can get while how others will think then, which will lead you to the safest "gambling" decision you will make.

Five pirates of different heights have a treasure of 100 gold coins, which they plan to share amongst themselves. They decide to split the coins using the following scheme:

The tallest pirate proposes how to share the coins, and ALL pirates (including the tallest) vote for or against it.

If 50% or more of the pirates vote for it, then the coins will be shared that way. Otherwise, the pirate proposing the scheme is thrown overboard, and the process is repeated with the pirates that remain.

Since pirates are generally known to be bloodthirsty, if a pirate will get the same number of coins if voting for or against a proposal, they will choose to vote against so that the proposer is thrown overboard.

Assuming that all 5 pirates are intelligent, rational, greedy, and do not wish to die, what will happen?

But in this sector we separate 2 kinds "If the proposer can/can't vote", which can lead to completely different situations.

Also adding the extension to over 200 pirates, will have an induction seems interesting.

五個海盜航行到一小島，發現一寶藏，內含100枚金幣，抽籤決定順序1、2、3、4、5首先由1號決定如何分配，接著全部的人進行表決，如果有一半以上的人不同意，則提案者丟入海裡餵鯊魚，再由下個順位繼續..... 以此類推 設定每一個海盜都很聰明，會理智的判斷，則第一個海盜最多可以分多少金幣？

由於正面問不易思考，所以可試著從反面做：

如果場上只剩下一個海盜，可以獨得100枚金幣。

如果場上剩下兩個海盜，4號怎麼分5號都不會同意，最終4號提案，5號反對導致4號必死，5號獨得全部。

如果場上剩下三個海盜，3號知道4號不想死，必定支持3號的決定，不管3號的提案是什麼，3、4號一定同意而5號反對，所以3號可以金幣全納入囊中。

如果場上剩下四個海盜，2號知道還要2人同意而3號必定不同意，4、5號知道剩三人連1枚都拿不到，所以賄絡4、5號是最划算的選擇，最終分配2號拿98枚金幣，4號5號各拿1枚金幣。

回到原題五個海盜的情況，1號知道還要再兩人同意，在剩四人時2號會拿98枚3

號拿不到硬幣，4、5號拿一枚硬幣，要使兩人同意需要給比在四人分配時某兩人分配到的金幣的更多，可以是4號多拿一枚或5號多拿一枚，最終分配1號拿97枚，3號拿1枚金幣，4號5號其中一人拿2枚金幣另一人拿不到金幣。

這次我們改變一下題目：

五個海盜航行到一小島，發現一寶藏，內含100枚金幣，抽籤決定順序1、2、3、4、5首先由1號決定如何分配，接著全部的人進行表決，如果有超過一半的人不同意，則提案者丟入海裡餵鯊魚，再由下個順位繼續..... 以此類推 設定每一個海盜都很聰明，會理智的判斷，則第一個海盜最多可以分多少金幣？

如果場上只剩下一個海盜，可以獨得100枚金幣。

如果場上剩下兩個海盜，4號怎麼分5號就算不同意也會照常執行計畫，最終4號獨得全部。

如果場上剩下三個海盜，4號在剩二人的時候可以全拿，3號若要再多一票同意票，只要再給5號一枚金幣即可收買，最終結果3號拿99枚金幣，5號拿1枚金幣。

如果場上剩下四個海盜，2號只要再一人同意即可過關，根據三人時的分配，賄絡4號是最划算的選擇，最終分配2號拿99枚金幣，4號拿1枚金幣。

回到五個海盜的情況，1號知道還要再兩人同意，在剩四人時2號會拿99枚4號拿一枚硬幣，要使兩人同意需要給比在四人分配時某兩人分配到的金幣的更多，最划算的做法是給3號5號各拿一枚金幣，最終分配1號拿98枚，3號5號各拿1枚金幣。

最後結論:1.從反面做回來2.用最少金幣買通下一場會拿最少的一半海盜。

延伸題目:若6個海盜分100枚金幣，超過一半不同意，則提案者丟入海裡的分配方式，問第一個海盜最多可以分多少金幣。

根據前文的討論，1號還需要兩人的同意，在5人時(在這裡為2~6號)，2號拿98枚，4號6號各拿1枚金幣，其餘則沒拿到金幣，要使兩人同意，需要比給五人時某兩人更多，最終分配為1號拿98枚，3號5號各拿1枚金幣。

根據前面的討論，歸納可得出每個海盜能獲得的金幣與奇偶性相關
 $\forall n$ 枚金幣分給 $\leq 2n$ 個海盜。

參考資料

P.2 Deductive reasoning

<https://www.scribbr.com/methodology/deductive-reasoning/>

P.3 Inductive reasoning

<https://www.scribbr.com/methodology/inductive-reasoning/>

P.4 Abductive Reasoning

<http://www.butte.edu/departments/cas/tipsheets/thinking/reasoning.html>

P.11~P.24 Pirate' s game with proposer can' t vote

<https://math.stackexchange.com/questions/2855171/pirates-game-what-if-proposer-cant-vote>

P.28~P.38 Pirate puzzle (5 pirates 100 gold)

<https://www.geeksforgeeks.org/puzzle-20-5-pirates-and-100-gold-coins/>

P.38~P.47 Extension of Puzzle for Pirates

https://omohundro.files.wordpress.com/2009/03/stewart99_a_puzzle_for_pirates.pdf