數思報告

第一組
組員 :
411131110 李泰樂
411131111 李承源
411131122 李振維
411131116 黃楷恩
411131133 柳政維
411131115 吳杰翰

Siebeck-Marden 定理的推廣--凸四邊形之內切橢圓的焦點問題

學校名稱:國立臺東女子高級中學
作者:施陳惜情 蘇筱純 黃惠婷
指導老師: 高二 施陳惜情 高二 蘇筱純 高二 黃惠婷 林志全
類別:Siebeck-Marden 定理、凸四邊形之內切橢圓
名次:第三名

研究動機

我們想要針對歐氏平面幾何中存在內切橢圓的凸四邊形重新研究其中的幾何性質，然後藉由這些幾何性質嘗試可否，藉由複數的運算原理反過來找出內切橢圓之兩焦點會滿足的二次方程式，希望這個二次方程式就如同「SiebeckMarden 定理」中一樣，其係數完全由凸四邊形的四個頂點以及切線段的四個比值所決定，然後再進一步地探討「Siebeck-Marden 定理」在凸四邊形上的推廣及應用。

研究目的

本研究的目的是將原來的「Siebeck-Marden定理」推廣至凸四邊形的情形，並且沒有利用到「Siebeck-Marden定理」的結果。一、探討平面上兩組對邊平行之凸四邊形其內切橢圓的相關幾何性質。二、探討平面上恰有一組對邊平行之凸四邊形其內切橢圓的相關幾何性質。三、探討平面上兩組對邊均不平行對邊之凸平行四邊形內切橢圓的相關幾何性質。四、結合上述有內切橢圓之凸四邊形的幾何性質，進而找到關於了任意凸四邊形之內切橢圓 焦點滿足的二次複數方程式，也推廣了「Siebeck-Marden定理」。五、針對平面上不為平行四邊形且存在內切橢圓的凸四邊形，藉由我們的主要定理的方程式，可以直接推得關於「Newton橢圓問題」之加深的結果，也提供了「Newton橢圓問題」一個全新的幾何證明。

牽制數列

學校名稱:國立金門高級中學
作者:吳孟甄 蔡睿珊
指導老師: 楊玉星
類別:費氏數列、盧卡斯數列、遞迴關係式
名次:第三名

研究動機

在「科學研習月刊」有定期刊出「森棚教官的數學題」，老師推薦我們研究其中一道數學題目--互相牽制，我們很感興趣，著手試算後，我們決定繼續推廣他們的研究，看能否有更多不一樣的發現。

研究目的

本研究探討「a 平方－h 是 b 的倍數，b 平方－h 是 a 的倍數」→「a 平方＋h 是 b 的倍數，b 平方＋h 是 a 的倍數」，發現若將前者的首項設為 h－1，第二項為首項的平方－h，則其正整數解(a，b)會構成一數列且滿足遞迴式「第 n＋2 項=(h－2)*第 n＋1 項一第 n 項」；若將後者的首項設為1，第二項為 h＋1，則其正整數解(a，b)會構成一數列且滿足遞迴式「第 n+2 項=(h＋2)*第 n＋1 項一第 n 項」。在探討「a 平方±nh 是 b 的倍數，b 平方±nh 是 a 的倍數」時，發現其解數列也滿足遞迴式「第 n＋2 項=(h±2)*第 n＋1 項一第 n 項」，其中新第 n 項=(n 的正平方根)*原第 n 項。

(一)將「$b|(a^2-h)$，$a|(b^2-h)$」的正整數解(a,b)寫成數列$\langle a_n\rangle$。

(二)將「$b|(a^2+h)$，$a|(b^2+h)$」的正整數解(a,b)寫成數列$\langle a_n\rangle$。

(三)找出「$b|(a^2-h)$，$a|(b^2-h)$」的解數列$\langle a_n\rangle$對應的廣義費氏數列$\langle b_n\rangle$。

(四)找出「$b|(a^2+h)$，$a|(b^2+h)$」的解數列$\langle a_n\rangle$對應的廣義費氏數列$\langle b_n\rangle$。

(五)找出「$b|(a^2\pm h^2)$，$a|(b^2\pm h^2)$」的解數列$\langle a_n\rangle$之間的關係。

(六)找出「$b|(a^2\pm nh)$，$a|(b^2\pm nh)$」的解數列$\langle a_n\rangle$之間的關係。

頂心三角形誕生的奇蹟

學校:國立羅東高級中學

作者:陳平 郭晨馨 簡靖承

指導老師:鍾明宏

獎項:第三名

類別:頂心三角形、三點共線、面積比例

研究動機

他們看完第 59 屆科展作品後，他們瞭解了如果由原三角形三頂點為圓心，頂點到垂心(內 心、外心)之距離為半徑畫圓，三圓交點形成一新三角形，原三角形之垂心(內心、外心)會 成為新三角形之內心(外心、垂心)，因此他們想要探討這個性質的延伸，討論三角形之間的面積比例關係，並進一步探討若是由三角形三頂點為圓心，頂點到三角形內任意一點為半徑畫圓，三圓交點形成一新三角形，此新三角形會有什麼性質。

研究目的

一、探討 $\triangle ABC$ 與其頂心三角形 $\triangle EFG$ 之相關性質。

二、研究 $\triangle ABC$ 面積與其頂心三角形 $\triangle EFG$ 邊長關係及面積比例關係。

三、探討頂心三角形三點共線問題。

兩交圓內接三角形最大面積之探討

學校:臺中市私立弘文高級中學

作者:楊家婕

指導老師: 廖寶貴 曾智鈿

獎項:第一名

類別:圓內接三角形、極值的求法

研究動機

因為內接多邊形最大面積為數學上常被研究的問題。

以這樣的前提為概念，他們嘗試考慮在兩圓重疊的情況中，

探討重疊部分的區域之中是否存在最大面積之內接三角形。

研究目的

1. 探討兩等圓互過圓心之交圓內接三角形最大面積

2. 探討兩等圓不過圓心之交圓內接三角形最大面積

3.探討兩圓(半徑不同)中，其中一圓過另圓圓心之交圓內接三角形最大面積

4. 探討兩圓(半徑不同)中，兩圓互不過圓心之交圓內接三角形最大面積

我能搭到「他」的機車嗎？抽鑰匙的機率問題

學校名稱：國立臺南女子高級中學

作者：陳聖喬　萬庭禎

指導老師：姜焙元

獎項：第二名

類別：條件機率、矩陣

研究動機

他們兩人在數學課上接觸機率這個單元，在參考書上面看到105學測一道關於機率的多選題，問題如下

甲、乙、丙、丁四位男生各騎一台機車約 A、B、C、D 四位女生一起出遊，他們約定讓四位女生依照 A、B、C、D 的順序抽鑰匙來決定搭乘哪位男生的機車。其中除了 B 認得甲的機車鑰匙，並且絕對不會選取之外，每個女生選取這些鑰匙的機會都均等。請選出正確的選項。 [105 年學測多選]

1. A 抽到甲的鑰匙的機率大於 C 抽到甲的鑰匙的機率
2. C 抽到甲的鑰匙的機率大於 D 抽到甲的鑰匙的機率
3. A 抽到乙的鑰匙的機率大於 B 抽到乙的鑰匙的機率
4. B 抽到丙的鑰匙的機率大於 C 抽到丙的鑰匙的機率
5. C 抽到甲的鑰匙的機率大於 C 抽到乙的鑰匙的機率

他們想要知道在此情況下每個人抽到每支鑰匙的機率，並用程式進行模擬試驗，確認計算的機率是正確的，接著推廣這個問題

研究目的

1.解原始問題中，每個人抽到鑰匙的機率。

2.設有 n 個人依序抽鑰匙且第r 個人不選第一把鑰匙，求每個人抽到每把鑰匙的機率公式(定理一)。

3.設有 n 個人依序抽鑰匙且恰有m 個人不選第一把鑰匙，求每個人抽到每把鑰匙的機率公式(定理二)。

4.設有 n 個人依序抽鑰匙，恰有m 個人不選某一把鑰匙，且這m 個人不選的鑰匙均相　異，求出機率矩陣的遞迴關係(定理三)。

5.設計程式模擬抽鑰匙過程，輔助觀察定理二和定理三的結果。

定理一

定理 1: n 人中恰有一人必不選某一支鑰匙

設有 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 共 n 人依序選取 $K_1, K_2, \cdots, K_n$ 共 n 把鑰匙，若第 r 人知道第一把鑰匙且一定不選，其中 $1 \leq r < n$，以 $P(A_i, K_j)$ 表 A_i 抽到鑰匙 K_j 的機率，則

1. 對於滿足 $1 \leq i < r$ 的任意正整數 i，$P(A_i, K_j) = \dfrac{1}{n}$，其中 $1 \leq j \leq n$。

2. $$P(A_r, K_j) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-1} & \text{當 } j \neq 1, 1 \leq j \leq n \\ 0 & \text{當 } j = 1 \end{cases}$$

3. 對於滿足 $r < i \leq n$ 的任意正整數 i，有
$$P(A_i, K_j) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{1}{n-r}\right)\dfrac{1}{n} & \text{若 } j = 1 \\ \left(1 - \dfrac{1}{(n-1)(n-r)}\right)\dfrac{1}{n} & \text{若 } j \neq 1 \end{cases}$$

我們用以下的表格來表示定理1的結果。

<table>
<tr><td></td><td>K_1</td><td>K_2</td><td>$\dots$</td><td>K_n</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td colspan="4" rowspan="3">$\frac{1}{n}$</td></tr>
<tr><td>A_2</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>A_r</td><td>0</td><td colspan="3">$\frac{1}{n-1}$</td></tr>
<tr><td>A_{r+1}</td><td rowspan="3">$\left(1+\frac{1}{n-r}\right)\frac{1}{n}$</td><td colspan="3" rowspan="3">$\left(1-\frac{1}{(n-1)(n-r)}\right)\frac{1}{n}$</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>A_n</td></tr>
</table>

此外從上面的結果中，我們也可以發現：表格中每一行的機率和均為 1，且每一列的機率和也均為 1，即對於任意的正整數 i, j 恆有

$$\sum_{j=1}^{n} P(A_i, K_j) = 1 \text{ 且 } \sum_{i=1}^{n} P(A_i, K_j) = 1$$

其中 $1 \leq i, j \leq n$，而這個性質顯然是正確的。所以我們可以利用這個性質來重新證明定理1

符號說明 (PART 1)

定義

1. A_i 代表人，K_j 代表鑰匙，$P(A_i, K_j)$ 為 A_i 抽到 K_j 的機率，其中 $1 \le i, j \le n$。
2. 機率矩陣：將 n 個人抽鑰匙的機率對應表格以 n 階方陣 $P = [p_{ij}]$ 來表示，其中 $p_{ij} = P(A_i, K_j)$。
3. $[v]$ 是一個 $n \times 1$ 的矩陣，且 $[v]$ 的第 $r_1, r_2, \cdots, r_m$ 列位置的元為 0，其餘為 1。即 $v_{i1} = \begin{cases} 0 & ,若\ i = r_k \\ 1 & ,若\ i \neq r_k \end{cases}, k = 1, 2, 3, \cdots, m$
4. $F([v])$ 為 n 人抽鑰匙且第 $r_1, r_2, \cdots, r_m$ 個人不選 K_1 的條件下，n 個人抽鑰匙的機率矩陣。且 $F([v])_{ij}$ 表此機率矩陣的第 (i, j) 元。

說明

4 個人 A_1, A_2, A_3, A_4 抽 K_1, K_2, K_3, K_4

已知 A_1 與 A_3 必不選 K_1，則取 $[v] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

經過計算可得此時的機率矩陣

$$F([v]) = F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

所以 $F([v])_{32} = \frac{1}{3} = P(A_3, K_2)$

機率矩陣的分割 (n 階機率矩陣可寫成若干個 $n-1$ 階機率矩陣之線性組合)

$n=4, P(A_1,K_1)=P(A_3,K_1)=0$

$$\boxed{\text{4 個人抽鑰匙且第 1,3 個人不選 } K_1 \text{ 的機率矩陣}} = \frac{1}{3}\times\boxed{\text{4 個人抽鑰匙且已知第 1 個人選 } K_2 \text{ 的情況下的機率矩陣}} + \frac{1}{3}\times\boxed{\text{4 個人抽鑰匙且已知第 1 個人選 } K_3 \text{ 的情況下的機率矩陣}} + \frac{1}{3}\times\boxed{\text{4 個人抽鑰匙且已知第 1 個人選 } K_4 \text{ 的情況下的機率矩陣}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

n 人中恰有 m 個人必不選第一把鑰匙的機率矩陣

用機率矩陣的分割和數學歸納法，我們證明了以下的定理

定理 2

對於任意大於 1 的正整數 n，令 $[v]$ 為一個 $n \times 1$ 的矩陣，且 $v_{i1} = \begin{cases} 0 & 若\ i = r_k \\ 1 & 若\ i \neq r_k \end{cases}$，

其中 $1 \leq r_k < r_{k+1}, k = 1, 2, 3, \cdots, m$ 且 $r_m \neq n$，**並規定** $r_{m+1} = n$

則 $F([v])_{i1} = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & ，若\ 1 \leq i < r_1 \\ 0 & ，若\ i = r_k \\ \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{n - r_j}\right) \frac{1}{n} & ，若\ r_k < i < r_{k+1} \end{cases}$

符號說明 (PART 2)

定義

令 n 階方陣 X 滿足第 (r_i, i) 元 $X_{r_i i} = 0, i = 1, 2, 3, \cdots, m$，其餘元為 1。則 $F(X)$ 為 n 人抽鑰匙且 A_{r_1} 不選 K_1、A_{r_2} 不選 K_2、$\cdots$、A_{r_m} 不選 K_m，所對應的機率矩陣。

說明 (4 人抽鑰匙且 A_1 不選 K_1，A_3 不選 K_2)

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F(X) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{5}{18} & \frac{5}{18} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

引理 4

令 $Q_n = \left[\begin{array}{c|c} [\mathbf{0}]_{n\times 1} & I_n \end{array} \right]$，其中 $[\mathbf{0}]_{n\times 1}$ 是一個 $n \times 1$ 的零矩陣，而 I_n 是一個 n 階單位方陣。則對於任意的 n 階方陣 X_n，有

$$Q_n^T X_n Q_n = \begin{bmatrix} 0 & [\mathbf{0}]_{1\times n} \\ [\mathbf{0}]_{n\times 1} & X_n \end{bmatrix}$$

其中 Q_n^T 是 Q_n 的轉置矩陣。

說明

$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，則

$$Q_2^T X_2 Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

符號說明 (PART 3)

定義
$C_{ij}(n)$ 是將 n 階單位方陣 I_n 中第 i 行與第 j 行交換後所得的矩陣。

定義
$S_k(n) = C_{12}(n)C_{23}(n)\cdots C_{k-1,k}(n)$
$= \prod_{i=1}^{k-1} C_{i,i+1}(n)$。
並規定 $S_1(n) = I_n$

定義
令 X 為 n 階方陣，定義 $M_{ij}(X)$ 是將矩陣 X 中刪除第 i 列與第 j 行後，所形成的 $n-1$ 階方陣。

說明

$$M_{12}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

n 人中恰有 m 個人必不選某把鑰匙且不選的鑰匙皆相異的遞迴關係式

定理 3

1. $F\left(\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}, F\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}, F\left(\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$
2. 當 $n\geq 3$ 時，已知 n 階方陣 $X=[x_{ij}]$ 中 x_{ij} 不是 1 就是 0。令 $b_k=\dfrac{x_{1k}}{\sum_{i=1}^{n}x_{1i}}$，則

$$F(X)=\left[\begin{array}{c|c|c} Q_{n-1}^TF(M_{11}(X))Q_{n-1} & \cdots & Q_{n-1}^TF(M_{1n}(X))Q_{n-1}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c} b_1S_1(n)\\ \hline b_2S_2(n)\\ \hline \vdots \\ \hline b_nS_n(n)\end{array}\right]$$

$$+\left[\begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \hline \multicolumn{4}{c}{[\mathbf{0}]_{(n-1)\times(n-1)}}\end{array}\right]$$

定理 3 的程式實作構想與結果

定理 3 的程式實作構想

使用動態規劃 (dynamic programming)，採由下而上的順序解題，即先解 $n-1$ 個人抽籤匙的機率矩陣並存入表格，再解 n 個人抽籤匙的機率矩陣。

當 $n=6, P(A_i,K_i)=0, i=1,2,3,4,5$ 的程式實作結果

$$F\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.24 & 0 & 0.19 & 0.19 & 0.19 & 0.19 \\ 0.225 & 0.2375 & 0 & 0.17916666 & 0.17916666 & 0.17916666 \\ 0.20833333 & 0.21944445 & 0.23888889 & 0 & 0.16666666 & 0.16666666 \\ 0.1875 & 0.19722222 & 0.21388889 & 0.25 & 0 & 0.15138889 \\ 0.13916667 & 0.14583334 & 0.15722222 & 0.18083333 & 0.26416667 & 0.11277778 \end{bmatrix}$$

我們可以看出用程式實作的計算結果與模擬抽籤匙試驗所得的相對次數很接近。(參見作品說明書第 25 頁表格 4)

未來展望與參考文獻

未來展望

1. 當 n 人中 m 人所不選的鑰匙均相異時，是否能求出 $P(A_i, K_j)$ 的一般式，或可將定理 3 所得到的遞迴關係式進一步簡化。
2. 改編原始問題並加入機會成本的概念，例如：付出 10 元可換得重新抽取鑰匙的機會。

參考文獻

- 周伯欣 (2019)。抽籤的公平性。數學傳播 43 卷 2 期, pp. 49-54
- Row and column operations。
  https://tartarus.org/gareth/maths/Linear_Algebra/row_operations.pdf
- 使用 Python 來認識矩陣。
  https://tinyurl.com/ydebxzkk
- 演算法筆記 (Dynamic Programming)
  http://web.ntnu.edu.tw/~algo/DynamicProgramming.html