數學思維與解題
第三組

組員:

410731113葉信邦

410831107廖崑良

410831131李其庭

410831137黃鉦文

410831139許傳昇

410831143黃姿毓

報告內容

DATE

S M T W T F S

* 第59屆前三名得獎作品
* 第59屆作品挑選詳細講解

一個紙牌遊戲的策略問題

NO.1

A B兩方以牌面數字為 1~m 的 m 張牌進行遊戲，每方各持有其中 n 張牌(2n<=m)。
雙方每次各出一張牌，牌面數字大者獲勝，如此進行 n 回合的比賽稱為 遊戲。
若 m>2n，B 方就不能根據自己手上的牌確認對手 A 方的牌，因此每一回合的勝負是隨機的。但若 B 方能知道 A 方的出牌邏輯，則 B 方是否有一個輸得比較少(即贏得比較多)的策略？

本文找出，犧牲多少牌是策略成本最小的?
進一步，我們推廣到：如果 B 方有 K 張最好牌(稱為 K-優勢模型)，應犧牲多少張牌是策略最小的?

#成本矩陣

#最佳策略

#組合分配

研究動機

假設每一輪的遊戲中，A、B 兩方手上的牌面數字是隨機分配的，而且 A 方會根據自 己手上的牌的牌面數字大小，依由小而大的順序出牌(也可以是任一固定的大小順序出牌)，則一輪遊戲的 n 個回合中，B 方要以什麼樣的順序出牌，才能使得每一輪遊戲 B 方輸的回合數之期望值較小呢?

研究目的

(1)對於一般的 m, n(其中 $2n \leq m$)，B 方策略中成本最小的策略是什麼。

(2)如果 B 方手上有 K 張牌是全部牌面中數字最大的 K 張牌時，成本最小的策略是什麼。

(3)如果將雙方數字相差 1 時的回合視為和局，此時 B 方策略中成本最小的策略是什麼。

NO.2

渾「圓」有「定」—
從七圓定理到雙心六圓的推廣

本研究將從七圓定理出發， 試圖改變切圓個數， 探討共點的存在性；更進一步推廣「六 個與兩內離圓分別均外切與內切的環切圓」之雙心六圓， 探討其共點、共線、共圓及共錐等 性質；研究有驚人的發現「當六個環切圓轉動時， 其各類對應點連線之共點必為定點， 且在 連心線上。」推廣至不同個數的環切圓時亦成立；當兩內離圓甚至推廣至兩外離圓或是圓與 直線時， 亦發現其諸線共點、諸點共線、諸點共圓、諸點共錐等性質必成立。

#七圓定理

#反演變換

#極點極線

研究動機

在一個大碗中放 入六顆湯圓；在一個大圓中有六個小圓均與其內切，若兩相鄰小圓均外切，則其對應內切點 連線共點，這就是「七圓定理」；雖名為「七圓」，關鍵卻在於其中的「六圓」。這樣一個恰巧相切又共點的圖形，該如何作圖呢？除了諸線共點的性質外，是否會有諸 點共線、諸點共圓等特性？如果不是六個小圓而是更多圓或少圓呢？又或同時內外切於兩個 內離圓，甚至同時外切於兩個外離圓的情形？於是展開本研究。

研究目的

(1) 探討七圓定理的性質與多圓的推廣。
(2) 探討雙心六圓的構圖關係式與性質。
(3) 以雙心六圓的結果探討雙心多圓的性質。
(4) 試研究雙心多圓在兩外離圓及圓與直線的性質。

NO.3

高階線性遞迴數列中的餘數數列之探討

#正整係數齊次線性遞迴數列

#週期

#餘數數列

費氏數列中每一項除以任意正整數後所得的餘數數列具有許多有趣的性質，例如：所有餘數數列均有週期性及每個週期循環列皆是由 0 均勻分割，即數列在固定間隔某幾項後可被 正整數整除，由此性質就可進一步計算週期長度。 本作品中我們嘗試將費氏數列中的餘數數列性質推廣到一般高階正整係數齊次線性遞迴 數列(內文簡稱高階線性遞迴數列)的情形。我們發現除了所有餘數數列均為(前)週期數列外， 每個週期循環列中的均勻分割的情形變化出二種：由數個 0 均勻分割(含某項後均為 0)、數個 不全為 0 均勻分割(含某項後皆為不為 0 的常數)，進一步則探討上述二種中的區分週期循環 列之條件。最後由餘數數列性質探討出其數列的因倍數定理。

研究動機

高二上數學專修課時，老師提到費氏數列中每一項除以任意正整數後所得的餘數數列性 質，因為好奇從而開始研究。首先探討費氏數列中的餘數數列之週期性質，推廣至一般高階 線性遞迴數列的情形。在過程中我們配合高中數學課程中學過「數列與級數」、「數論中的 同餘性質」、「多項式函數中因倍數定理」及「矩陣」等概念來解決問題。

研究目的

(1) 探討高階線性遞迴數列中每一項除以任意正整數後所得餘數數列，證明餘數數列均為(前) 週期數列。
(2) 探討高階線性遞迴數列中係數在何種條件下，其餘數數列中每個週期循環列會有數個0 均 勻分割(含在某項後皆為 0)，深入探討出區分條件。
(3) 探討高階線性遞迴數列中係數在何種條件下，其餘數數列中每個週期循環列會有數個不 全為 0 均勻分割(含在某項後皆為不為 0 的常數)，深入探討出區分條件。
(4) 探討利用餘數數列性質推導出高階線性遞迴數列的因倍數性質。

二元3平衡n字串之排列數探討

NO.3

本研究旨在探討由 0 與 1 組成長度為 n 的二元字串中滿足000-子字串數和111-子字串數 相同（稱為平衡）之排列方法數。我們從 3 個面向來探討：一、首先將直接推導出之算式， 輸入 python 計算在各種 n 值下，觀察平衡與非平衡字串個數之規律性；二、接著我們發現 非平衡字串個數在000-子字串和111-子字串之差值為一固定形式時，不同長度之字串符合個 數會形成一階差數列，我們對此猜測提出證明並嘗試利用此性質推導出二元 3 平衡 n 字串個 數之一般式；三、最後探討二元 3 平衡 n 字串個數之成長速度，推論當 n 值極大時，其個數 會以趨近 2 倍速成長。同時，我們也將 3 平衡推廣至 r 平衡，提出一些相關的結果。

#字串

#階差數列

#排列組合

研究動機

在 100 學年度全國高中數學能力競賽的題目中，有一道題目內容如下：「由 0, 1 排成長 度 n 的字串，稱為二元 n 字串。若一個二元 n 字串中出現字串 00 和字串 11 的個數一樣多， 則稱為長度的 n 二元平衡字串。若以 a_n 表示長度 n 的二元平衡字串之個數，已知 $a_1 = a_2 = a_3 = 2$, $a_4 = 4$, $a_5 = 6$，試求 a_n 的一般公式。」但題目給出的解法卻是特例解，只有在 00- 子字串, 11-子字串平衡的狀況下才適用，因此我們便想要改變作法，試圖用一個一般化的解 法來處理這個問題。此外，我們也想將此問題拓展，討論在 000-子字串,111-子字串平衡時， n 位數列排列之符合個數是否也有一般解，也就是二元 3 平衡 n 字串個數是否有一般式。因 此，我們便展開了一段有趣的數學研究之旅。

研究目的

一、原題目之非特例解。

二、二元 3 平衡 n 字串之關係式探討。

三、二元 r 平衡 n 字串在滿足字串中無連續 r 個 0 或連續 r 個 1 時之個數遞迴式探討。

四、二元 3 非平衡 n 字串之關係式探討。

五、觀察二元 3 非平衡 n 字串在改變 000-子字串及 111-子字串之差值或字串之長度時，符 合個數彼此間有何性質存在？

六、階差數列中各階階差首項值之求解過程與性質。

七、將第五點推廣至二元 r 非平衡 n 字串。

八、二元平衡 n 字串、二元 3 平衡 n 字串之 lim$n\to\infty$ $S(n,i,0)$ $S(n-1,i,0)$ (i = 2,3) 探討，其中$S(n,i,0)$代表長度 為n的字串中滿足i-0-子字串(連續i個 0 所形成的子字串)與i-1-子字串(連續i個 1 所形成 的子字串)數目相同的個數。

NO.3

擇你一個命中註定——談經典相親問題與其延伸解

本文首先就經典相親問題的歷史背景進行介紹，並在其後對現今相親問題的主要論文做 一次文獻探討，一方面提供以中文書寫的統整性文章，另一方面用來區分我們的研究與他人 研究之差異之處。接著，我們根據我們設定的兩種相親問題變種，分別來對相親問題求取不 一樣的結果。其分別展現於定理 5 至定理 9，我們試圖改變的變因為(I)使我方能在一定的條 件下，依照遞減機率來對先前一度拒絕過的候選人重新選取，以及(II)維持能夠對先前拒絕過 的候選人再次選取之條件，但使候選人最開始願意接受我們的機率不再為 1。求出以上兩種 的最佳策略後，我們利用程式碼配合最佳策略，實際演練了數種設定下的相親問題，提供數 據於末。

#相親問題

#秘書問題

#最佳停止解

研究動機

在人生這條道路上，我們無可避免地會遇上許多有關「選擇」的問題：容易為了選 A 放棄了B，為了得到C拋開了D，就這樣依照自己的想法做出了一個個的選擇，在獲得些甚麼的同時也失去些甚麼，然而，這卻不代表我們就能夠選中那個日後能讓自己心滿意足的選擇。所以數學家們努力對此展開研究，期望使我們做出最佳選擇的機率最優化，因此有了相親問題這類研究。

研究目的

我們希望能夠先對目前為止較具代表意義的相親問題變種進行一次統整探討，這部分的各自文獻將列於參考文獻處。接著我們親自對相親問題修改了部分變因，期望使相親問題之數學模型更符合現實應用，並給出我們修改變因下的最佳策略為何，並依照此最佳策略，實際以 C#程式碼對情境進行推演。

作品講解

- 作品名稱: 巴斯卡正方形
- 學校名稱: 國立中央大學附屬中壢高級中學
- 第59屆佳作

組合、幾何？

6M2

同餘

二項式係數

圖形

摘要與動機

　此研究從一道「青蛙於座標平面的跳躍問題」開始，將可能的方法數製成正方形表格，以「巴斯卡正方形」命名，並結合同餘數觀察及歸納結果。

　同餘後不同的餘數配予不同顏色，產生一些特別的圖形。此外，這個研究利用 Lucas’s Theorem 及(1+x)ˆn展開的係數搭配乘法原理來做計數的工具，研究圖形的規律性以及對各個餘數的個數進行計數，並且研發了一個算式用於計算任意組合數被質數的次方同餘後的結果。

與學測試題相關

「一隻青蛙位於坐標平面的原點，每步隨機朝上、下、左、右跳一單位長，總共跳了六步。青蛙跳了六步後恰回到原點的機率為？」

1	6	15	20	15	6	1
6	36	90	120	90	36	6
15	90	225	300	225	90	15
20	120	300	400	300	120	20
15	90	225	300	225	90	15
6	36	90	120	90	36	6
1	6	15	20	15	6	1

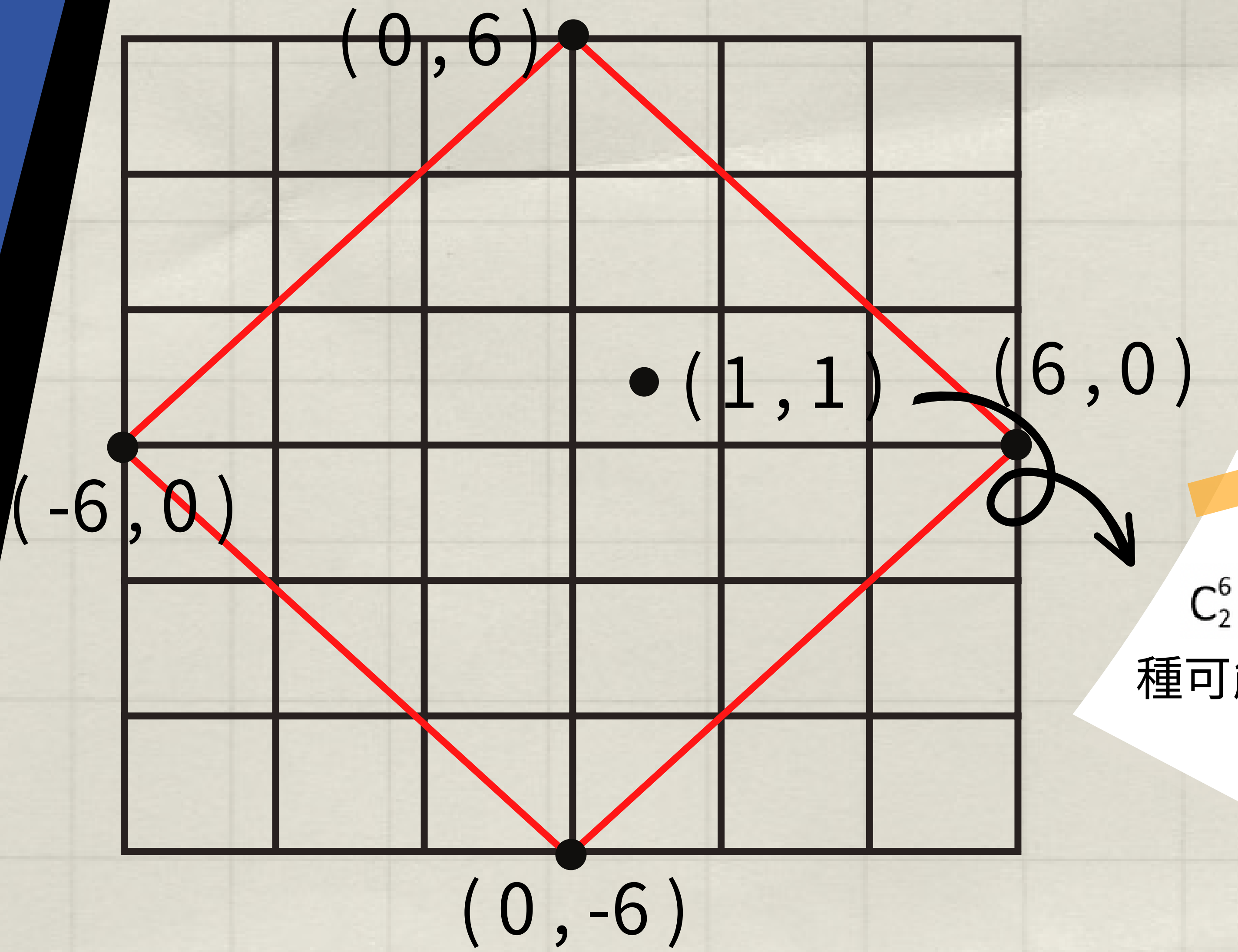
$$C^n_a \times C^n_b$$

轉45度

跳動到第(x , y)格所有可能的次數

其中 $a=\dfrac{n-|x+y|}{2}$

$b=\dfrac{n-|x-y|}{2}$



$C^6_2 \times C^6_3 = 300$

種可能跳動次數

組合等式

n 階巴斯卡正方形共有

(n+1)^2 個數字，總和為4^n

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\times\binom{n}{i}$$

$$=\binom{n}{0}\times\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}\right]+\binom{n}{1}\times\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}\right]+\cdots$$

$$+\binom{n}{n}\times\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}\right]$$

$$=\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}\right]\times\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}\right]$$

$$=2^n\times 2^n=4^n$$

$$C_i^n \cdot C_j^n$$

$$4^n$$

$$(n+1)^2$$

mod2

mod3

mod4

mod5

同餘問題

EX: 1. $10 \equiv X1 \pmod{3}$

2. $12 \equiv X2 \pmod{3}$

What is 37M13 ?

第37個巴斯卡
正方形

37M13

mod13(同餘13)

以6M7為例子

1	6	15	20	15	6	1
6	36	90	120	90	36	6
15	90	225	300	225	90	15
20	120	300	400	300	120	20
15	90	225	300	225	90	15
6	36	90	120	90	36	6
1	6	15	20	15	6	1

以6M7為例子

1	6	1	6	1	6	1
6	1	6	1	6	1	6
1	6	1	6	1	6	1
6	1	6	1	6	1	6
1	6	1	6	1	6	1
6	1	6	1	6	1	6
1	6	1	6	1	6	1

以6M7為例子

1	6	1	6	1	6	1
6	1	6	1	6	1	6
1	6	1	6	1	6	1
6	1	6	1	6	1	6
1	6	1	6	1	6	1
6	1	6	1	6	1	6
1	6	1	6	1	6	1

以第六個巴斯卡正方形為例子探討同餘的著色問題

1	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1

mod2

6M2

以第六個巴斯卡正方形為例子探討同餘的著色問題

1	0	0	2	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	2
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	2	0	0	1

mod3

6M3

以第六個巴斯卡正方形為例子探討同餘的著色問題

1	2	3	0	3	2	1
2	0	2	0	2	0	2
3	2	1	0	1	2	3
0	0	0	0	0	0	0
3	2	1	0	1	2	3
2	0	2	0	2	0	2
1	2	3	0	3	2	1

mod4

6M4

以第六個巴斯卡正方形為例子探討同餘的著色問題

1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1

mod5

6M5

總結

討論與結論

一、大於 7 的質數，計數問題將會非常繁複，因此沒有討論。

二、「巴斯卡正方形」中的相關組合等式可能還有一些明珠尚未發現。

三、有幾個特別的圖形難以尋找其規律性。

四、任意組合數除以質數的次方可計算餘數，但整個巴斯卡正方形的餘數計數仍有困難。

謝謝大家！

DATE

S M T W T F S

＊掃描連結深入了解巴斯卡正方形：