中華民國第58屆中小學科學展覽會

高級中等學校組-數學科

第四組（數四乙）

410831201 許藝瀠
410831203 沈宥旻
410831215 陳映竹
410831236 鄭光呂
410831238 張顥繻
410831246 唐翊庭

目 錄

CONTENTS

PART ONE

得獎作品簡介

作品名稱	Lissajous的神秘面紗
得獎名次	佳作
研究動機	國中時因為想自學三角函數，便買了一本書《數學女孩：圓圓的三角函數》，書中有提到，兩個互相垂直的三角函數，其產生的軌跡即是利薩如曲線，當時就在心中埋下小小的種子。很湊巧的，升高一的暑假作業，是這本書的讀書心得，重新拾起這本書，第二次閱讀，又是另外一番滋味，在我們討論的過程中，也與利薩如曲線有了第二次的相遇，美麗的圖形吸引了我們的目光，這次，我們不滿足於書中給的介紹，便在網路上進行了一些查詢，並一起討論，發現利薩如曲線並不只是肉眼觸目所及的美，又若是三個互相垂直三角函數產生的軌跡呢？其中還有許多奧妙正等待著我們去探索。
研究目的	一．什麼情況下 Lissajous 曲線會是重和的？ 二． Lissajous 曲線的二重點（double point）個數 三．二維 Lissajous 的連續性質 四．三維 Lissajous 的性質討論

作品名稱	對稱構造多邊形有向面積等面積線探討
得獎名次	第三名
研究動機	本科展發想自國中所做的數學科展，國中的科展主要是探討藉由三邊上的特殊點與三角形五心的連線為半徑，以三邊上的點作為圓心依序畫出三個圓，兩兩相鄰圓的交點連線構成的三角形面積做為主要探討。在國中的科展中發現了一些面積相等的構造三角形並進行了證明。後來，在高中數學專題課時想要對國中科展作更廣義的探討，並想辦法找出構造圖形等面積的情況。最後發現原本命題與探討朝多邊形各邊做對稱點，並將對稱點依對稱順序依序連起來所構成的多邊形有向面積為等價的。因此我們就產生了一個探討面向不同的新題目。之後我們就朝等面積線探討的方向繼續研究下去，並拓展至複雜圖形的探討。
研究目的	一、證明三角形利用對稱方法所構造圖形的等面積線是圓形 二、證明四邊形利用對稱方法所構造圖形的等面積線可能為直線、圓或平面 三、找到對稱構造等面積線是直線的四邊形 四、探討對稱構造 n 邊形的等面積線 五、探討對稱構造 n 邊形等面積線是直線的情形 六、找出等面積線與原圖形性質的關聯性。

作品名稱	「隔」格不入—阻隔集最小值之性質研究
得獎名次	(鄉土)教材獎
研究動機	在m×n棋盤中放置若干**阻隔點**，使得給定的圖形A經任意旋轉翻轉並放入棋盤中，皆會碰到至少一個阻隔點，這些阻隔點所形成的集合稱之為「**阻隔集**」。而目標是找出**最少**須放置幾個阻隔點。對於阻隔集的排列方式，多採窮舉法或直接定義，我們認為最初定義的阻隔點排列方式越接近最小值的排法，便能縮小上下界的範圍，越有效率。因此，研究重點為如何有根據地找出阻隔點排列方式，並釐清詳解中所有沒解釋的細節，補充原先詳解不清楚之處。
研究目的	1.補充詳解中 b（m,n,S_r）、b（m,n,P_r）證明之不足 2.求出b（m,n,L_r）之值 3.求出m×n×l 三維空間中b（m,n,l,S'_r）、b（m,n,l,P'_r）及 b（m,n,l,L'_r）之值

作品名稱	繁星似海－圓上圖形最大值探討
得獎名次	團隊合作獎
研究動機	當初看到別人的科展作品「空間中任三直線上各取一 點所連成三角形的最小周長」時，獲得了靈感，想做有關圖形極值的探討，又剛好上化學課時，教到了波耳提出的原子模型，各個球殼層都有所屬的電子。於是我們想：電子間的連線可圍成圖形，這個圖形隨著電子的變化會有完全不同的新面貌，並且似乎有某種關係存在於其中。我們打算來探討這個議題，不過立體空間難以討論，研究方向遂往平面的方向，在經過逐步修改後，成為了現在討論的題目。
研究目的	在不同的圓上各取一點，再依照順序（順／逆時針）連接便可繪出一個多邊形，此多邊形會因各點取的位置不同，而有千變萬化的情況。 我們此次的研究目的便是要探討：在畫出的眾多情形裡，有最大周長或最大面積時，此多邊形會有何性質。

作品名稱	莫忘初衷–競賽圖中的環形多邊形之個數探討
得獎名次	佳作
研究動機	這數十年來，H. G. Landau提出之競賽圖（Tournament）廣泛地被各種領域使用著，例如計算機科學、生物演化以及各種社會科學領域。而我們則希望能夠利用在學校所學的知識作為基礎，系統性地研究一套方法求出在任意 n 邊形中，存在大小為 m 的環形多邊形數量之最大值，希望能把競賽圖的應用繼續延伸推廣。
研究目的	在給定的任意正整數 n 與 m 的條件下(其中$n \geq m$)，求出凸 n 邊形內環形m邊形的最大值。

作品名稱	整數分割
得獎名次	第三名
研究動機	思考題目：「將 5 顆相同的球放入三個相同的箱子裡，總共有幾種不同的方法？」列舉法是將(5,0,0),(4,1,0),(3,2,0),(3,1,1),(2,2,1) 一一列出。但當球數增加或箱子數增加時，列舉法勢必會變得很麻煩，所以我們好奇是否有除了列舉法之外的解法？是否存在一個公式能夠讓我們直接計算答案？ 此問題與電影「天才無限家」裡的主角Ramanujan所作的整數分割(partition number) P(n)有關，激起我們想探討與解決問題的慾望。
研究目的	一・解決將 n 顆相同的球放入 3 個相同的箱子裡的方法數 二・解決將 n 顆相同的球放入 4 個相同的箱子裡的方法數 三・試圖將 m = 3,4的幾何解法抽象化到一般的 m 並嘗試尋找「是否存在將 n 顆相同的球放入 m 個相同的箱子裡的方法數的公式？」 四・求得 $f_m(n)$ 各項係數的一般式 五・$< A_{m,r}^{k} >$ 會是 k 階等差數列的條件 六・ $\Delta^i A_m^k$ 的求法

作品名稱	Menger Sponge點邊面的探討
得獎名次	探究精神獎
研究動機	在數列與級數的單元中，曾經遇過以下問題：『一單位長的正方形，第一次將其平分成9塊（九宮格形），然後挖去中間一塊，第二次再將剩餘各小正方形各平分成9塊，分別去掉中間各一塊，後依此類推，試求執行n次後，所刪去掉的面積總量為何？』對於這個圖形我們覺得他呈現一種特別的數學之美，因此我們好奇，像這樣的利用遞迴手法建構出來的平面圖形，能否將類似的概念擴展到三度空間的形體？
研究目的	令M_n，為第 n 階的門格海綿，我們的研究目的如下： ① 針對不同長度的 true edges 求元素數量 ② 針對不同類型的 true faces 元素數量 ③ 針對不同度數的 true vertices 元素數量 ④ 計算 Menger Sponge 的虧格數

作品名稱	尋找消失的鑲接正n邊形
得獎名次	佳作
研究動機	在做練習題時，我們做到一題目：給定三條相異之行線，作一正三角形，使其三頂點分別落在三條平行線上。看到此題目，我們想試著將條件推廣至條相異平行線，如何作出鑲接正 n 邊形的情況。
研究目的	一．n 條平行線鑲接正 n 邊形作圖法及討論解的情形 二．n 條從一點出發的相異射線鑲接正 n 邊形作圖法及討論解的情形 三．n 條交於一點的相異直線鑲接正 n 邊形作圖法及討論解的情形 四．任意 n 邊形鑲接正n邊形作圖法及討論解的情形 五．p 邊形鑲接正三、四邊形作圖法及討論解的情形

作品名稱	正多邊形內接指定內角三角形之研究
得獎名次	第三名
研究動機	第 54 屆中小學科展作品「探討正 n 邊形的內接正三角形」中提到：正 n 邊形的內接正三角形具有某一定點 K ，且可透過定點 K 作出所有內接正三角形。我們想知道，若將「內接正三角形」改成「內接指定內角三角形」，是否同樣存在有定點 K 呢？可否利用幾何座標明確描述定點 K 的位置呢？此外，所有的內接指定內角三角形中，其面積是否具有最大值或最小值呢？我們展開一連串的研究。
研究目的	① 探討適合本篇研究的「指定內角三角形」之作圖法。 ② 探討頂點在三不完全平行且不共點的相異直線上之「指定內角三角形」其定點 K 的存在性。 ③ 探討任意三角形中「內接指定內角三角形」存在之條件和面積極值。 ④ 探討正 n 邊形中「內接指定內角三角形」之面積極值。

作品名稱	變形Chebyshev尋蹤記-連續函數與多倍角公式研究
得獎名次	第一名
研究動機	105年10月，當我在閱讀A.F.Beardon所著之 Algebra and Geometry 時，於習題中發現了切比雪夫多項式的概念。切比雪夫多項式T_m為俄國數學家Pafnuty Chebyshev 所提出，可被以下式子定義：$T_m(\cos(\theta)) = \cos(m\theta)$。看到這題習題後，我開始好奇：對於怎樣的函數會有多項式形式的多倍角公式呢？
研究目的	找出並分類：以下考慮之函數範圍中的多倍角函數。 1. 定義域為$\mathbb{C}$之解析函數 2. 定義域為$[0, \infty)$之連續函數

作品名稱	重整勾股—迭代互質畢氏數
得獎名次	佳作
研究動機	除了費馬三元數（4565486027761,1061652293520,4687298610289），還有更多的互擲幣式數同時出現在貝格倫、普萊斯與菲爾托夫三元樹，因此猜想這三種三元樹中所有互質畢氏數相等。其作品在證明這個猜想，並建立互質畢氏數在這三種三元樹中的迭代路徑。
研究目的	證明貝格倫三元樹、普萊斯三元樹、菲爾斯托夫三元樹中所有互質畢氏數與歐幾里得家族中所有互質畢氏數相等，並建立歐幾里得家族中任一互質畢氏數在貝格倫三元樹、普萊斯三元樹、菲爾斯托夫三元樹中的迭代路徑。

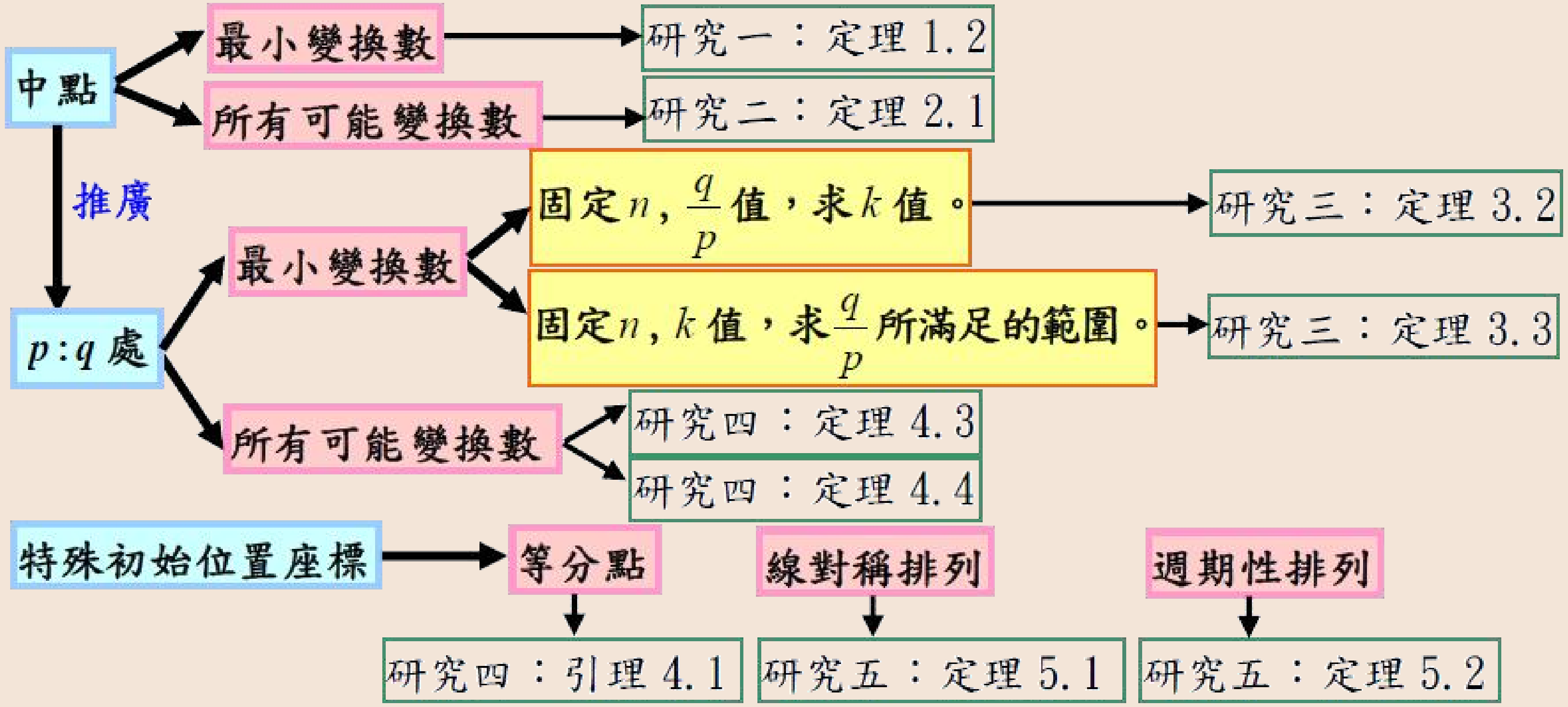
作品名稱	圓周上跳躍回歸問題之研究
得獎名次	第二名
研究動機	第 27 屆環球城市數學競賽試題中，有一個關於圓周上跳躍問題：「12 隻蚱蜢處於圓周上的不同點，牠們將圓周分割成 12 段弧，每步每隻蚱蜢同時沿順時針方向跳到以牠為端點的弧之中點，得到新的 12 段弧，繼續這樣的跳步，則是否能在 12 步後至少有一隻蚱蜢回到初始點？」我們對這樣的回歸性質感到好奇，便展開一連串的研究。
研究目的	圓周上相異 n 個點變換成與下一點所成弧之中點，求某點回歸的最小變換數和所有可能變換數。 圓周上相異 n 個點變換成與下一點所成弧之 p：q 處，求某點回歸的最小變換數和所有可能變換數。 圓周上相異 n 個點在特殊初始位置座標之回歸性質研究。

PART TWO

分析作品

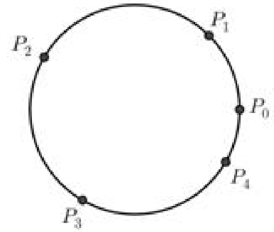
研究過程與方法

研究架構：

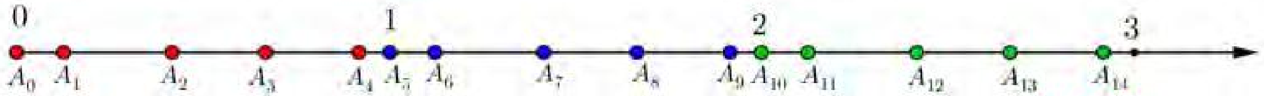


符號與名詞定義

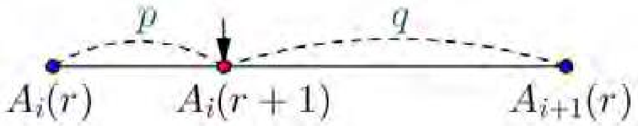
【定義一】圓周上相異 n 個點 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$，將圓周展開成以 P_0 為起始點的射線，以 P_0 為原點，單位長為 1 圓周長，若 $A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}$ 為 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$ 在此射線上的座標，則稱 $\left[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}\right]$ 為 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$ 之**位置座標**。



【定義二】定義數列 $\langle A_i \rangle$，A_i 為點 P_i 的初始位置座標且滿足 $|A_{i+n}-A_i|=1, \forall i\in N\cup\{0\}$。其中位置座標差為整數的任意兩個點在圓周上重合。



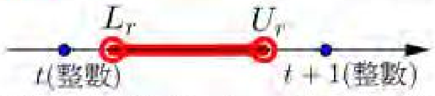
【定義三】圓周上相異 n 個點 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，稱為**一次變換**。設點 P_i 的位置座標為 A_i，P_i 變換 r 次後的點之位置坐標為 $A_i(r)$，其中 $A_i(0)=A_i$。由分點公式知，$A_i(r+1)=\dfrac{qA_i(r)+pA_{i+1}(r)}{p+q}$。



【定義四】若某點經變換 r 次後回到初始位置，則稱此點**變換 r 次後回歸**。

【定義五】設點 P_i 變換 r 次後的點之位置坐標為 $A_i(r)$，若 $A_i(r)$ 的所有可能值之範圍為開區間 (L_r,U_r)，稱 L_r 為 $A_i(r)$ 的**最小極端值**，U_r 為 $A_i(r)$ 的**最大極端值**。

【解題技巧】



(L_r,U_r) 含整數點 $\Rightarrow P_0$ 可能回歸　(L_r,U_r) 不含整數點 $\Rightarrow P_0$ 不可能回歸

研究一

圓周上相異n個點變換成與下一點所成弧之中點，
求某點回歸的最小變換數

研究一

推導 P_i 變換r次後的點之位置坐標 $A_i(r)$ 的公式

$$A_i(r+1)=\frac{A_i(r)+A_{i+1}(r)}{2}$$

研究一

定理 1.1：圓周上相異n個點$P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$，其初始位置座標為$[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}]$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點處，若P_i變換r次後的點之位置坐標為$A_i(r)$，則

$$A_i(r)=\frac{1}{2^r}\left(C_0^rA_i+C_1^rA_{i+1}+C_2^rA_{i+2}+\cdots\cdots+C_r^rA_{i+r}\right)=\frac{1}{2^r}\sum_{k=0}^{r}C_k^rA_{i+k}$$ 。

說明：由$A_0(r)$的通式可觀察到，對於某個固定值r，初始位置座標$[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}]$為滿足$0=A_0<A_1<\cdots<A_{n-1}<1$的任意實數，取$A_0=0$且$A_1=\cdots=A_{n-1}=0$時，可得$A_0(r)$的最小極端值$L_r$，取$A_0=0$且$A_1=\cdots=A_{n-1}=1$時，可得$A_0(r)$的最大極端值$U_r$，若任取一實數$t\in(L_r,U_r)$，則必存在一組初始位置座標$[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}]$，使得$A_0(r)=t$。

研究一

延伸：若存在某隻蚱蜢跳躍 m 次後回到初始點，則 m 的最小值為何？

$$A_0(13)=\frac{1}{2^{13}}\left(C_0^{13}\underbrace{A_0}_{0}+C_1^{13}A_1+C_2^{13}A_2+\cdots\cdots+C_{11}^{13}A_{11}+C_{12}^{13}\underbrace{A_{12}}_{1}+C_{13}^{13}\underbrace{A_{13}}_{1+A_1}\right)$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{11}=1$，

$A_0(13)$ 有最大極端值 $U_{13}=\dfrac{1}{2^{13}}\left(C_1^{13}+C_2^{13}+\cdots\cdots+C_{12}^{13}+\underbrace{2C_{13}^{13}}_{C_0^{13}+C_{13}^{13}}\right)=\dfrac{2^{13}}{2^{13}}=1$

即 P_0 跳躍 13 步後仍在第一圈內，因此不可能回歸。

$$A_0(14)=\frac{1}{2^{14}}\left(C_0^{14}\underbrace{A_0}_{0}+C_1^{14}A_1+C_2^{14}A_2+\cdots\cdots+C_{11}^{14}A_{11}+C_{12}^{14}\underbrace{A_{12}}_{1}+C_{13}^{14}\underbrace{A_{13}}_{1+A_1}+C_{14}^{14}\underbrace{A_{14}}_{1+A_2}\right)$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{11}=0$， $A_0(14)$ 有最小極端值 $L_{14}=\dfrac{1}{2^{14}}\left(C_{12}^{14}+C_{13}^{14}+C_{14}^{14}\right)=\dfrac{106}{16384}<1$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{11}=1$， $A_0(14)$ 有最大極端值

$$U_{14}=\frac{1}{2^{14}}\left(C_1^{14}+C_2^{14}+\cdots\cdots+C_{11}^{14}+C_{12}^{14}+2C_{13}^{14}+\underbrace{2C_{14}^{14}}_{C_0^{14}+C_{14}^{14}}\right)=\frac{1}{2^{14}}\left(2^{14}+14\right)=\frac{16398}{16384}>1$$

由 $A_0(r)$ 之公式可知，當 $r=14$，適當的取 $[A_0,A_1,A_2,\cdots\cdots,A_{11}]$ 之值，可使得 $A_0(14)=1$。

也就是說，若 P_0 變換 m 次後回歸，則 m 的最小值為 14。

推論：圓周上相異 n 個點，若某點變換 m 次後回歸，則 m 的最小值為 $n+2$

研究一

定理 1.2：圓周上相異 n 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，若某點變換 m 次後回歸，則 m 的最小值為 $n+2$。若已知某點在變換 $n+2$ 次後回歸，則當 $n \geq 3$ 時，此點為唯一回歸的點；當 $n=2$ 時，n 個點同時回歸。

（第一部分）證明 m 的最小值為 $n+2$。

由 $A_0(r)$ 之公式可知，當 $r=n+2$，適當的取 $[A_0, A_1, \cdots\cdots, A_{n-1}]$ 之值，可使得 $A_0(n+2)=1$。也就是說，若 P_0 變換 m 次後回歸，則 m 的最小值為 $n+2$。

（第二部分）證明當 $n \geq 3$ 時，若 P_0 變換 $n+2$ 次後回歸，則 P_0 為 n 個點中唯一回歸的點。

（第三部分）證明當 $n=2$ 時，若 P_0 變換 4 次後回歸 $\Leftrightarrow A_0=0, A_1=\frac{1}{2}$ 且 P_0, P_1 同時回歸。

研究一

討論：若 P_0 恰變換 $n+2$ 次即可回歸，則 $P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$ 的初始位置座標 $[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}]$ 須滿足什麼條件呢？

結論：若 P_0 變換 $n+2$ 次後回歸，則當 $n\geq 3$ 時，$P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$ 的初始位置座標 $[A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}]$ 必須滿足 $(2C_1^{n+2})A_1+(C_2^{n+2}+1)A_2+C_3^{n+2}A_3+\cdots+C_{n-1}^{n+2}A_{n-1}=2^{n+2}-C_0^{n+2}-C_1^{n+2}-C_2^{n+2}$，此時

$\dfrac{1}{2}<A_1<1-\dfrac{2n+4}{2^{n+3}-n^2-3n-4}$。

研究二

圓周上相異n個點變換成與下一點所成弧之中點，
求某點回歸的所有可能變換數

研究二

由研究一的結果，我們知道若圓周上相異n個點，某點經m次變換後回歸，則m的最小值為$n+2$。那麼是否所有變換次數大於等於$n+2$，都有可能存在某點回歸呢？經過實際測試發現，在有些變換次數下，無論此n個點在圓周上的初始位置為何，都不可能有任何點回歸。以$n=3$為例，在變換次數為$1,2,3,4$時，所有點位置均仍在第一圈內，不可能回歸。而變換次數為5時，由定理1.2討論知，若此3個點P_0,P_1,P_2之初始位置座標$\left[A_0,A_1,A_2\right]$滿足$A_0=0$且$10A_1+11A_2=16$時，則恰有一個點P_0回歸。而變換次數為$6,7$時，我們以GeoGebra所寫的程式，拉動初始位置，都可得到存在某點回歸的情形。但當變換次數為8時，無論我們如何拉動初始值，完全無法得到有任何點回歸。最後我們發現，當變換次數為$8,9,10,14,15,16,20,21,22,\cdots$時，不存在任何點可回歸。於是我們有了以下猜測：

研究二

問題：若某點經 m 次變換後回歸，求 m 的所有可能值。

推論：m 不可能的值為1, 2,· · · · · · ,n-1 ,n ,n+1 ,3n-1,3n,3n+1,5n-1,5n,5n+1 ,· · · · · ·, 其餘皆可能存在某點回歸。

定理 2.1：圓周上相異 n 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，若某點經 m 次變換後回歸，則 m 之充要條件為 $m \geq n+2$ 且 $m \neq kn-1, kn, kn+1$，其中 k 為正奇數。

（第一部份）證明當 $m = kn-1, kn, kn+1$ 時，其中 k 為正奇數，不存在任何點可回歸。

（第二部分）證明當 $kn+2 \leq r \leq kn+(2n-2)$ 時，其中 k 為正奇數，存在某點可回歸。

研究二

【證明】

由定理 1.2 知，$m \geq n+2$。

（第一部份）證明當 $m=kn-1, kn, kn+1$時，其中 k 為正奇數，不存在任何點可回歸。

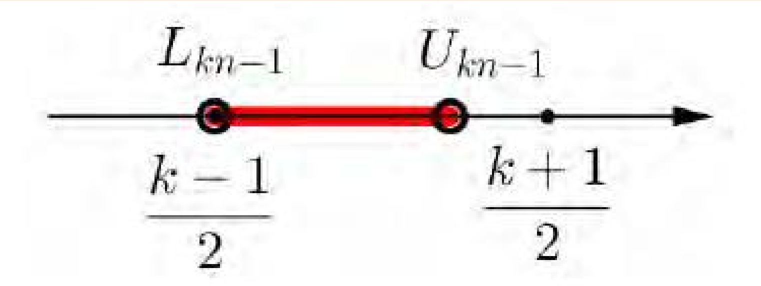
(1)**欲證：若某點經 m 次變換後回歸，則 $m \neq kn-1$。**

$$A_0(kn-1)=\frac{1}{2^{kn-1}}\left(C_0^{kn-1}A_0+C_1^{kn-1}A_1+\cdots+C_n^{kn-1}\underbrace{A_n}_{1}+\cdots+C_{2n}^{kn-1}\underbrace{A_{2n}}_{2}+\cdots\cdots+C_{(k-1)n}^{kn-1}\underbrace{A_{(k-1)n}}_{k-1}+\cdots+C_{kn-1}^{kn-1}\underbrace{A_{kn-1}}_{(k-1)+A_{n-1}}\right)$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=0$，$A_0(kn-1)$有最小極端值

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=1$，$A_0(kn-1)$有最大極端值

故 $\frac{k-1}{2}<A_0(kn-1)<\frac{k+1}{2}$，即 $A_0(kn-1)$不可能為正整數。



研究二

(2)欲證：若某點經 m 次變換後回歸，則 $m \neq kn$。

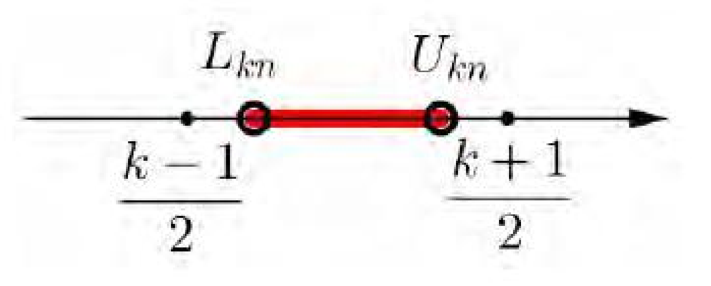
$$A_0(kn)=\frac{1}{2^{kn}}\left(C_0^{kn}A_0+C_1^{kn}A_1+\cdots+C_n^{kn}\underbrace{A_n}_{1}+\cdots+C_{2n}^{kn}\underbrace{A_{2n}}_{2}+\cdots\cdots+C_{(k-1)n}^{kn}\underbrace{A_{(k-1)n}}_{k-1}+\cdots+C_{kn-1}^{kn}\underbrace{A_{kn-1}}_{(k-1)+A_{n-1}}+C_{kn}^{kn}\underbrace{A_{kn}}_{k}\right)$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=0$，

① n 為偶數， $A_0(kn)$ 有最小極端值

② n 為奇數， $A_0(kn)$ 有最小極端值

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=1$， $A_0(kn)$ 有最大極端值



故 $\frac{k-1}{2}<A_0(kn)<\frac{k+1}{2}$，即 $A_0(kn)$ 不可能為正整數。

研究二

(3)欲證：若某點經 m 次變換後回歸，則 $m \neq kn+1$。

$$A_0(kn+1)=\frac{1}{2^{kn+1}}\Bigg(C_0^{kn+1}A_0+C_1^{kn+1}A_1+\cdots+C_n^{kn+1}\underbrace{A_n}_{1}+\cdots+C_{2n}^{kn+1}\underbrace{A_{2n}}_{2}+\cdots\cdots+C_{(k-1)n}^{kn+1}\underbrace{A_{(k-1)n}}_{k-1}+\cdots$$

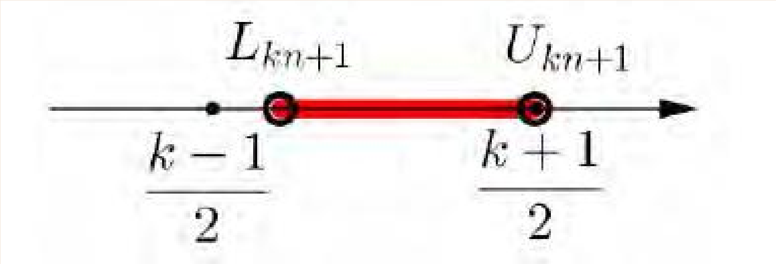
$$+C_{kn-1}^{kn+1}\underbrace{A_{kn-1}}_{(k-1)+A_{n-1}}+C_{kn}^{kn+1}\underbrace{A_{kn}}_{k}+C_{kn+1}^{kn+1}\underbrace{A_{kn+1}}_{k+A_1}\Bigg)$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=0$，

① n 為偶數，$A_0(kn+1)$ 有最小極端值

② n 為奇數，$A_0(kn+1)$ 有最小極端值

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=1$，$A_0(kn+1)$ 有最大極端值



故 $\frac{k-1}{2}<A_0(kn+1)<\frac{k+1}{2}$，即 $A_0(kn+1)$ 不可能為正整數。

研究二

（第二部分）證明當 $kn+2 \le r \le kn+(2n-2)$ 時，其中 k 為正奇數，存在某點可回歸。

(1)當 $r = kn+s$　其中 $2 \le s \le n-1$ 時

$$A_0(kn+s) = \frac{1}{2^{kn+s}}\Big[C_0^{kn+s} A_0 + \cdots + C_n^{kn+s} \underbrace{A_n}_{1} + \cdots + C_{2n}^{kn+s} \underbrace{A_{2n}}_{2} + \cdots + C_{(k-1)n}^{kn+s} \underbrace{A_{(k-1)n}}_{k-1} + \cdots$$

$$+ C_{kn}^{kn+s} \underbrace{A_{kn}}_{k} + C_{kn+1}^{kn+s} \underbrace{A_{kn+1}}_{k+A_1} + \cdots + C_{kn+s}^{kn+s} \underbrace{A_{kn+s}}_{k+A_s} \Big]$$

取 $A_0 = 0$ 且 $A_1 = \cdots = A_{n-1} = 0$，

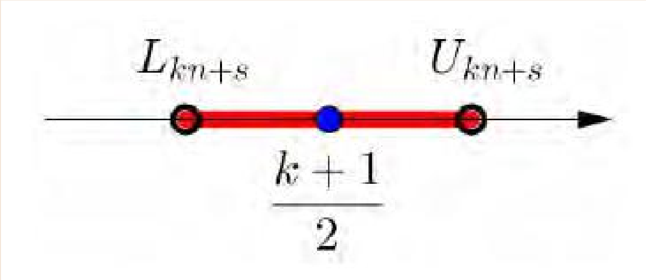
① $kn+s$ 為偶數， $A_0(kn+s)$ 有最小極端值

② $kn+s$ 為奇數， $A_0(kn+s)$ 有最小極端值

取 $A_0 = 0$ 且 $A_1 = \cdots = A_{n-1} = 1$， $A_0(kn+s)$ 有最大極端值

由 $A_0(r)$ 之公式可知，適當的取 $[A_0, A_1, A_2, \cdots\cdots, A_{n-1}]$ 之值，

可使得 $A_0(kn+s) = \dfrac{k+1}{2}$。



研究二

(2)當 $r=hn+s$　其中 h 為偶數且 $0\le s\le n-2$ 時

$$A_0(hn+s)=\frac{1}{2^{hn+s}}\Big[C_0^{hn+s}\underbrace{A_0}_{0}+\cdots+C_n^{hn+s}\underbrace{A_n}_{1}+\cdots+C_{2n}^{hn+s}\underbrace{A_{2n}}_{2}+\cdots+C_{(h-1)n}^{hn+s}\underbrace{A_{(h-1)n}}_{h-1}+\cdots$$

$$+C_{hn}^{hn+s}\underbrace{A_{hn}}_{h}+C_{hn+1}^{hn+s}\underbrace{A_{hn+1}}_{h+A_1}+\cdots+C_{hn+s}^{hn+s}\underbrace{A_{hn+s}}_{h+A_s}\Big]$$

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=0$，

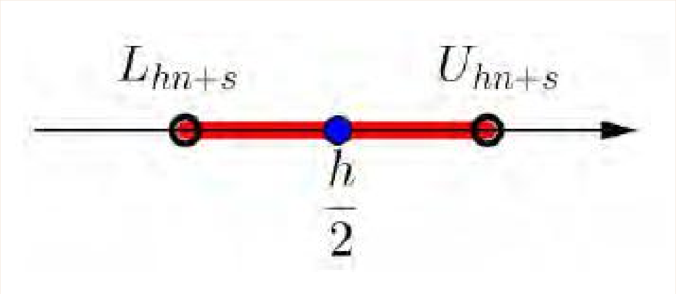
① $hn+s$ 為偶數， $A_0(hn+s)$ 有最小極端值

② $hn+s$ 為奇數， $A_0(hn+s)$ 有最小極端值

取 $A_0=0$ 且 $A_1=\cdots=A_{n-1}=1$， $A_0(hn+s)$ 有最大極端值

由 $A_0(r)$ 之公式可知，適當的取 $[A_0,A_1,A_2,\cdots\cdots,A_{n-1}]$ 之值，

可使得 $A_0(hn+s)=\frac{h}{2}$。■



研究三

圓周上相異n個點變換成與下一點所成弧之 p：q處，
求某點回歸的最小變換數

研究三

定理 3.1：圓周上相異 n 個點 $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$，其初始位置座標為 $[A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}]$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，若 P_i 變換 r 次後的點之位置座標為 $A_i(r)$，則

$$A_i(r) = \frac{1}{(p+q)^r}\left[C_0^r q^r A_i + C_1^r p q^{r-1} A_{i+1} + C_2^r p^2 q^{r-2} A_{i+2} + \cdots\cdots + C_r^r p^r A_{i+r}\right]$$

$$= \frac{1}{(p+q)^r}\sum_{k=0}^{r} C_k^r p^k q^{r-k} A_{i+k}$$

研究三

1. 由數學歸納法證明定理3.1 $A_0(r)=\dfrac{1}{(p+q)^r}\left[C_0^r q^r \underbrace{A_0}_{0}+C_1^r pq^{r-1}A_1+C_2^r p^2q^{r-2}A_2+\cdots\cdots+C_r^r p^r A_r\right]$

2. 由$A_0(r)$的最小極端值L_r與最大極端值U_r的通式（$L_r<A_0(r)<U_r$)

(1)取 $A_0=0$ 且 $A_1=A_2=\cdots=A_{n-1}=0$ 時，$A_0(r)$ 會有最小極端值 L_r ：

$$L_r=\frac{1}{(p+q)^r}\left[\left[\left(C_n^r p^n q^{r-n}+\cdots+C_{2n-1}^r p^{2n-1}q^{r-(2n-1)}\right)+\left(2C_{2n}^r p^{2n}q^{r-2n}+\cdots+2C_{3n-1}^r p^{3n-1}q^{r-(3n-1)}\right)+\cdots+\left\lfloor\frac{r}{n}\right\rfloor C_r^r p^r\right]\right.$$

$$=\frac{1}{(p+q)^r}\sum_{i=n}^{r}\left\lfloor\frac{i}{n}\right\rfloor\cdot C_i^r p^i q^{r-i}$$

(2)取 $A_0=0$ 且 $A_1=A_2=\cdots=A_{n-1}=1$ 時，$A_0(r)$ 會有最大極端值 U_r ：

$$U_r=\frac{1}{(p+q)^r}\left[\left(C_1^r pq^{r-1}+\cdots+C_n^r p^n q^{r-n}\right)+\left(2C_{n+1}^r p^{n+1}q^{r-n+1}+\cdots+2C_{2n}^r p^{2n}q^{r-2n}\right)+\cdots+\left\lfloor\frac{r+n-1}{n}\right\rfloor C_r^r p^r\right]$$

$$=\frac{1}{(p+q)^r}\sum_{i=1}^{r}\left\lfloor\frac{i+n-1}{n}\right\rfloor\cdot C_i^r p^i q^{r-i}$$

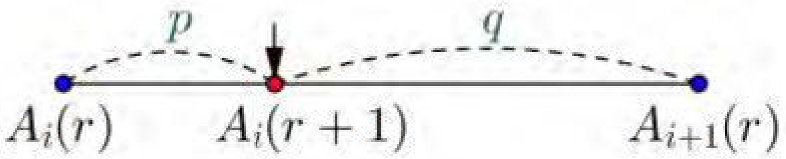
研究三

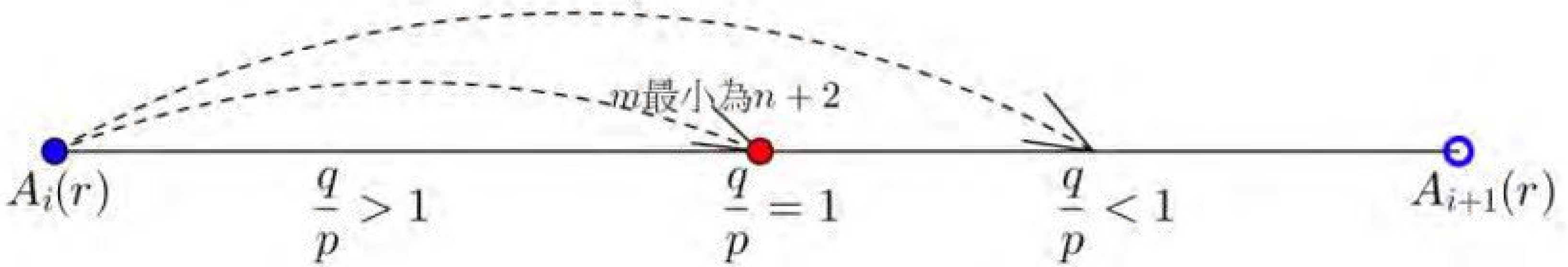
圓周上相異n個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之p:q處，若某點經m次變換後回歸，假設m的最小值為$n+k$ 。則以下性質會成立：

性質一：當 $\frac{q}{p}$ 越小時，k 會越小。**即當 P_i 每次跳躍跳離原位置越遠時，會越快可能回歸**。

性質二：無論 p,q 為何，且無論 n 個點之初始位置為何，在變換 n 次後皆仍在第一圈內，不可能有任何點回歸。（同理 P4.直觀證明）

性質三：若 $\frac{q}{p}=1$時，$k=2$。（定理 1.2）





研究三

定理 3.2：圓周上相異n個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，若某點經 m 次變換後回歸，則：

(1)當 $\dfrac{q}{p}<1$時， m 的最小值為 $n+1$ 。

(2)當 $\dfrac{q}{p}=1$時， m 的最小值為 $n+2$ 。

(3)當 $\dfrac{q}{p}>1$ 且 k 為最小自然數滿足 $\dfrac{1}{(p+q)^{n+k}}\sum_{i=1}^{n+k}\left[\dfrac{i+n-1}{n}\right]C_i^{n+k}p^iq^{n+k-i}>1$時， m 的最小值為 $n+k$ 。此時 $k\geq 2$ 。

研究三

目的：找出某點回歸的最小變換次數為$n+k$時，$\dfrac{q}{p}$的範圍為何?

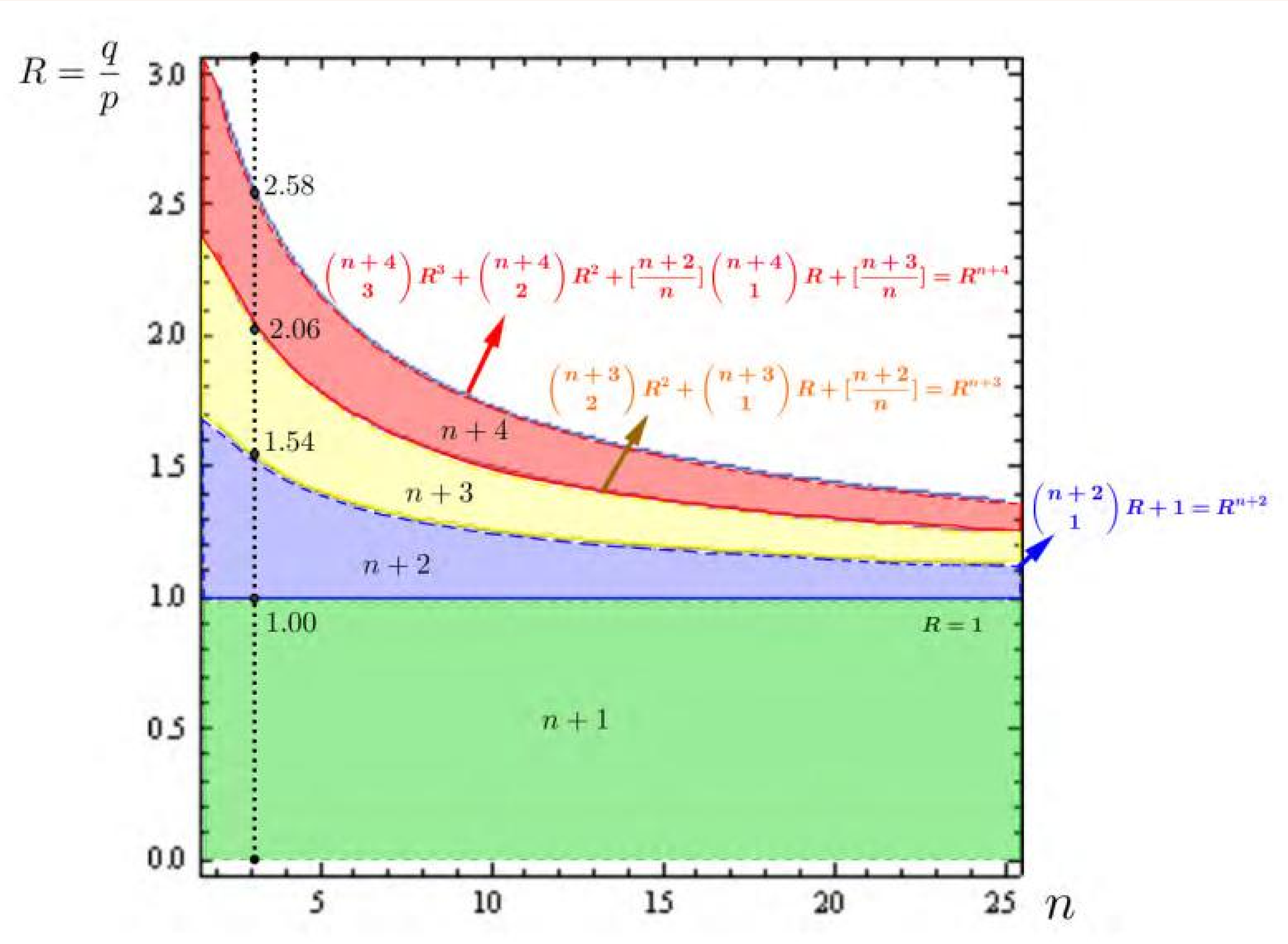
m的最小值 $n+k$																				
	2.5	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22	24	25	27	28	30	31	33
	2.4	6	7	9	10	12	13	15	16	17	19	20	22	23	25	26	28	29	31	32
	2.3	5	7	8	10	11	13	14	16	17	18	20	21	23	24	26	27	28	30	31
	2.2	5	7	8	10	11	12	14	15	17	18	19	21	22	24	25	26	28	29	30
	2.1	5	7	8	9	11	12	13	15	16	17	19	20	22	23	24	26	27	28	30
	2.0	5	6	8	9	10	12	13	14	16	17	18	20	21	22	24	25	26	27	29
	1.9	5	6	7	9	10	11	13	14	15	17	18	19	20	22	23	24	25	27	28
	1.8	5	6	7	9	10	11	12	14	15	16	17	19	20	21	22	24	25	26	27
	1.7	5	6	7	8	9	11	12	13	14	16	17	18	19	20	22	23	24	25	26
	1.6	4	6	7	8	9	10	12	13	14	15	16	17	19	20	21	22	23	25	26
	1.5	4	5	7	8	9	10	11	12	13	15	16	17	18	19	20	21	23	24	25
	1.4	4	5	6	7	9	10	11	12	13	14	15	16	18	19	20	21	22	23	24
	1.3	4	5	6	7	8	9	10	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
	1.2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18	19	20	21	22	23
	1.1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
q/p \ n		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

研究三

定理 3.3：圓周上相異 n 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，其中 $R=\dfrac{q}{p}>1$，若存在某點回歸的最小變換次數為 $n+k$，對於某個自然數 $k\geq 2$，則 R 須滿足不等式 $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{n+k-1}\left\lfloor\frac{i-1}{n}\right\rfloor C_{n+k-i-1}^{n+k-1}(R)^{n+k-i}\leq(R)^{n+k}<\sum_{i=n+1}^{n+k}\left\lfloor\frac{i-1}{n}\right\rfloor C_{n+k-i}^{n+k}(R)^{n+k-i}$。

研究三

$k\,,n\,,\dfrac{q}{p}$ 之關係圖



研究四

圓周上相異n個點變換成與下一點所成弧之 p : q處，
求某點回歸的所有變換數

研究四

首先我們先觀察 $A_0(r)$ 的值所在的範圍 (L_r, U_r)，其中 $L_r = \frac{1}{(p+q)^r}\sum_{i=n}^{r}\left[\frac{i}{n}\right]\cdot C_i^r p^i q^{r-i}$ 且 $U_r = \frac{1}{(p+q)^r}\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{i+n-1}{n}\right]\cdot C_i^r p^i q^{r-i}$。若 (L_r, U_r) 涵蓋某個整數值，則 P_0 變換 r 次後可能回歸，反之則否。我們嘗試針對各種不同的 n, p, q 值，利用 Mathematica 寫程式跑出 L_r, U_r 來觀察其值之變化，有了非常驚人的發現：***當 r 足夠大時，L_r 與 U_r 的小數部分會週期性的趨近於某些定值。即 L_r 與 U_r 對應到圓上的位置會週期性接近某些定點。故 P_0 變換 r 次後可否回歸也能被預期。***

研究四

【例 1】以 $n=3$ 、 $p:q=1:1$ 為例：(以下數值為四捨五入至小數點後第二位之結果)

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
L_r	0	0	0	0.13	0.31	0.50	0.67	0.84	1.00	1.17	1.33	1.50
U_r	0	0.5	0.75	0.88	1.00	1.16	1.33	1.50	1.67	1.83	2.00	2.17
可否回歸	否	否	否	否	否	可	可	可	否	否	否	可

r	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
L_r	1.67	1.83	2.00	2.17	2.33	2.50	2.67	2.83	3.00	3.17	3.33	3.50
U_r	2.33	2.50	2.67	2.83	3.00	3.17	3.33	3.50	3.67	3.83	4.00	4.17
可否回歸	可	可	否	否	否	可	可	可	否	否	否	可

研究四

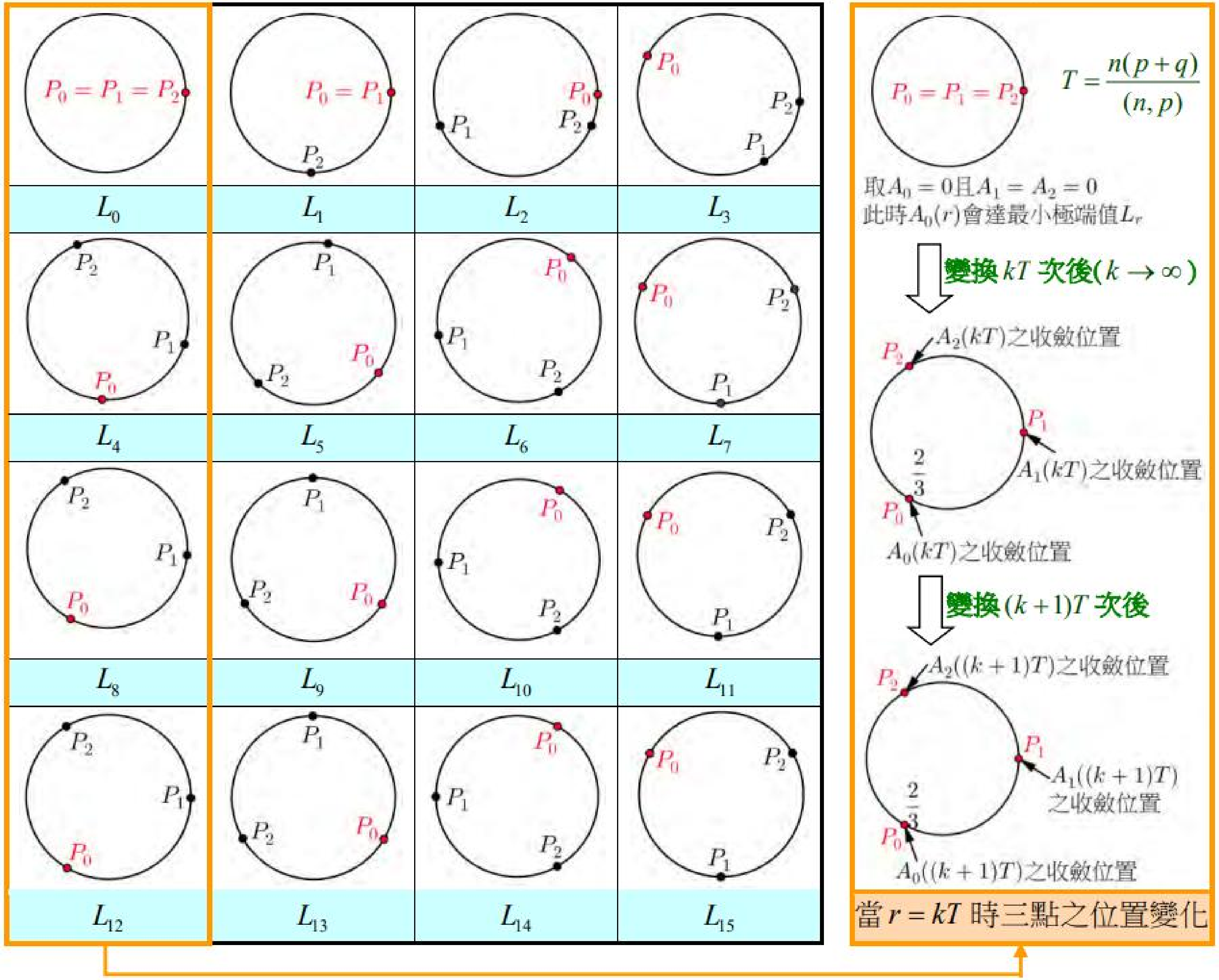
針對 $r = 6k(k \in N \cup \{0\})$ 去觀察 L_r 與 U_r 的小數部分到第 10 位，更可清楚看到其收斂的性質。

r	L_r	U_r
0	0.0000000000	0.0000000000
6	0.6718750000	1.3281250000
12	1.6667480469	2.3332519531
18	2.6666679382	3.3333320618
24	3.6666666865	4.3333333135
	⋮	⋮

【註】由以上表格的數據可說明定理 2.1 所證明的結論。

研究四

為了更清楚瞭解 $A_0(r)$ 的最小極端值 L_r 對應到圓上的位置變化，我們做出 $L_0 \sim L_{15}$ 的位置圖：



研究四

性質一：若同時觀察圓上相異 n 個點 $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$ 的位置變化，可發現當 r 足夠大時，無論 p, q 值為何，此 n 個點的位置會趨近於圓上 n 等分點。

性質二：若單獨觀察 P_0 的位置變化（$A_0(r)$ 的值），當 r 足夠大時，其 L_r 與 U_r 的小數部分以週期為 $T = \dfrac{n(p+q)}{(n,p)}$ 個變換數趨近於某些定值，而這些定值對應到圓周上位置恰為圓上 T 等分點。

性質三：特別觀察 $A_0(r)$ 的極端值 L_r, U_r，在 $r = kT(k \in N)$，其中 $T = \dfrac{n(p+q)}{(n,p)}$ 時，無論 p, q 值為何，當 k 趨近於無限大時，L_r 與 U_r 的小數部分皆會趨近於某一定值。以 $n = 3$ 為例(由例 1~例 3 之表格可知)，此定值分別為 $\dfrac{2}{3}$ 與 $\dfrac{1}{3}$。

研究四

引理 4.1：圓周上 n 等分點 $P_0, P_1 \cdots\cdots P_{n-1}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，其中 $p,q \in N,(p,q)=1$，則此 n 個點以週期為 $\dfrac{n(p+q)}{(n,p)}$ 個變換數全部回歸。

引理 4.2：圓周上相異 n 個點 $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$，逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，若 P_i 變換 r 次後的點之位置坐標為 $A_i(r)$，則 $\lim\limits_{r\to\infty}\left[A_i(r)-A_{i-1}(r)\right]=\dfrac{1}{n}, \forall 1 \le i \le n, i \in N$。換句話說，無論 $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$ 之初始位置座標為何，在無限次變換後，此 n 個點終將變換至圓上 n 等分點。

定理 4.3：圓周上相異 n 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，其中 $p,q \in N$，$(p,q)=1$，當變換次數 r 足夠大時，此 n 個點的位置會收斂至圓周上 n 等分點。同時，此 n 個點會在變換 $T=\dfrac{n(p+q)}{(n,p)}$ 次後再次收斂至相同的位置。

研究四

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lim\limits_{k\to\infty}\left(L_{kT}-[L_{kT}]\right)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{11}{20}$
$\lim\limits_{k\to\infty}\left(U_{kT}-[U_{kT}]\right)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{9}{20}$

定理 4.4：圓周上相異 n 個點 $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，若 P_0 變換 r 次後的點之位置坐標 $A_0(r)$ 的最小極端值為 L_r，最大極端值為 U_r，

$T=2n$，則 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(L_{kT}-[L_{kT}]\right)=\dfrac{n+1}{2n}$；$\lim\limits_{k\to\infty}\left(U_{kT}-[U_{kT}]\right)=\dfrac{n-1}{2n}$。

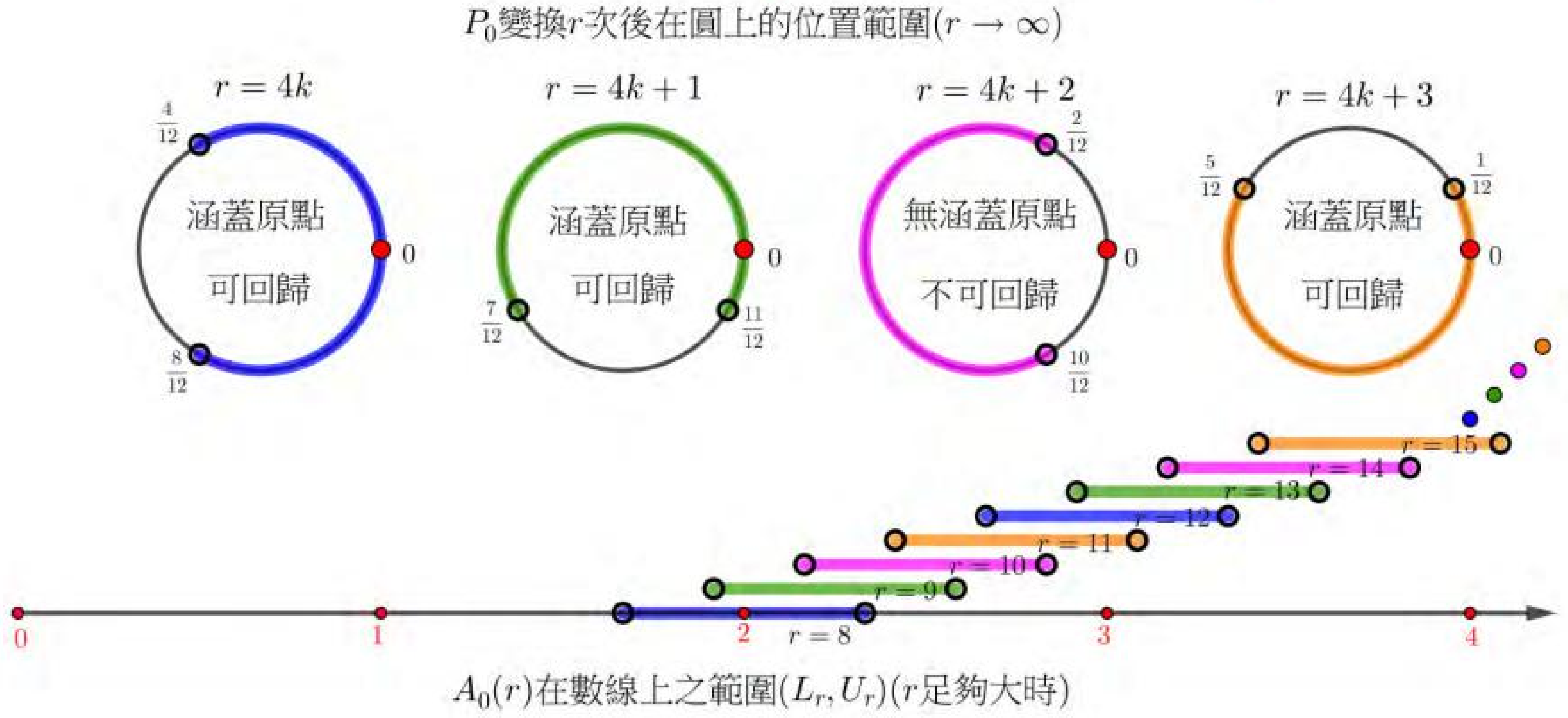
研究四

$\boxed{\text{結論}}$：圓周上相異 n 個點 $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之 $p:q$ 處，若 P_0 變換 r 次後的點之位置坐標 $A_0(r)$ 的最小極端值 L_r 與最大極端值 U_r，$T=\dfrac{n(p+q)}{(n,p)}$，則 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(L_{kT}-[L_{kT}]\right)=\dfrac{n+1}{2n}$；$\lim\limits_{k\to\infty}\left(U_{kT}-[U_{kT}]\right)=\dfrac{n-1}{2n}$。也就是說，當 $r=kT(k\in N)$ 時，L_r 與 U_r 在圓周上的的收斂位置分別在 $\dfrac{n+1}{2n}$ 與 $\dfrac{n-1}{2n}$ 處，而 $r=kT+1, kT+2, \cdots\cdots$ 時，L_r 與 U_r 的收斂位置也隨之確定。因此，$A_0(r)$ 的值之範圍 $\left(L_r, U_r\right)$ 是否會涵蓋整數值皆可得知，則 P_0 變換 r 次後可否回歸也能被預期。

研究四

【例】若 $n=3, p=3, q=1$，P_0 變換 r 次之位置座標 $A_0(r)$ 之範圍為 (L_r, U_r)。由以下圖示可知，

當 r 足夠大，若 $r=4k, 4k+1, 4k+3$，P_0 可能回歸。若 $r=4k+2$，P_0 永不回歸。



因此，我們可以預期，圓周上相異3個點 P_0, P_1, P_2，變換至與下一點所成弧之3:1處，則在變換 2018 次後，無論初始位置座標為何，永遠不可能有任何點可回歸！

研究五

圓周上相異n個點在特殊初始位置座標之回歸性質研究

研究五

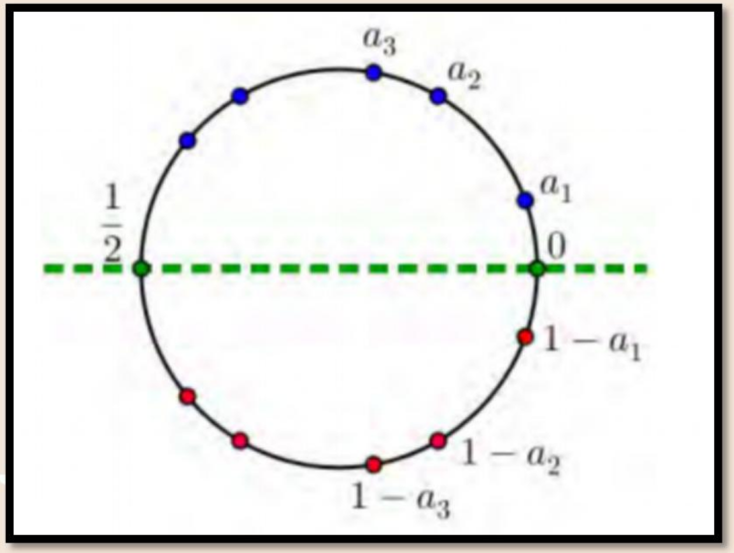
定理 5.1：圓周上相異 $2n$ 個點 $P_0, P_1, \cdots, P_{2n-1}$，且初始位置座標為 $\left[0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \frac{1}{2}, 1-a_{n-1}, \cdots, 1-a_2, 1-a_1\right]$，其中 $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < \frac{1}{2}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，則 P_0 和 P_n 在變換 $4n$ 次後會回歸。

研究五

證明：

令 $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$ 的初始位置座標為 $[A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}]$，其中

$$A_i = \begin{cases} a_i & ,0 \le i \le n-1 \\ \dfrac{1}{2} & ,i = n \\ 1 - a_{2n-i} & ,n+1 \le i \le 2n-1 \end{cases}，\quad 0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < \frac{1}{2}，$$



由定理 1.1 知：$A_0(r) = \dfrac{1}{2^r}\left(C_0^r A_0 + C_1^r A_1 + \cdots + C_n^r A_n + \cdots + C_r^r A_r\right)$

$$A_0(4n) = \frac{1}{2^{4n}}\left(C_0^{4n} A_0 + C_1^{4n} A_1 + \cdots + C_n^{4n} A_n + \cdots + C_{2n}^{4n} A_{2n} \cdots + C_{3n}^{4n} A_{3n} + \cdots + C_{4n}^{4n} A_{4n}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2^{4n}}\Bigg[C_0^{4n} \times 0 + C_1^{4n} \times a_1 + C_2^{4n} \times a_2 + \cdots + C_{n-1}^{4n} \times a_{n-1} + C_n^{4n} \times \frac{1}{2} \\ &\quad + C_{n+1}^{4n} \times (1 - a_{n-1}) + \cdots + C_{2n-2}^{4n}(1 - a_2) + C_{2n-1}^{4n}(1 - a_1) + C_{2n}^{4n} \times 1 \\ &\quad + \underbrace{C_{2n+1}^{4n}}_{C_{2n-1}^{4n}}(1 + a_1) + \cdots + \underbrace{C_{3n-1}^{4n}}_{C_{n+1}^{4n}}(1 + a_{n-1}) + \underbrace{C_{3n}^{4n}}_{C_n^{4n}} \times \frac{3}{2} \\ &\quad + \underbrace{C_{3n+1}^{4n}}_{C_{n-1}^{4n}}(2 - a_{n-1}) + \cdots + \underbrace{C_{4n-1}^{4n}}_{C_1^{4n}} \times (2 - a_1) + \underbrace{C_{4n}^{4n}}_{C_0^{4n}} \times 2\Bigg] \end{aligned}$$

$= \dfrac{1}{2^{4n}}\left(C_0^{4n} + C_1^{4n} + \cdots + C_{4n}^{4n}\right) = \dfrac{2^{4n}}{2^{4n}} = 1$。同理可證得 $A_n(4n) = \dfrac{3}{2} = 1 + A_n$。

研究五

討論：

若將定理 5.1 中「變換成與下一點所成弧之中點」改成「變換成與下一點所成弧之p：q（p≠q）處」，那麼是否有類似的回歸情形呢？

【說明】由定理 5.1 的證明過程中，我們可以觀察到，在 $r=4n$ 時，初始位置座標 $\left[0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},\frac{1}{2},1-a_{n-1},\cdots,1-a_2,1-a_1\right]$ 恰可以利用 $C_k^n=C_{n-k}^n$ 之性質對消或是合併大部份的項，進而得到整數這個漂亮的結果。然而，當我們嘗試變換成與下一點所成弧之 $p:q(p\neq q)$ 處時，顯然沒有這種對消或合併的現象，因此不會產生特定循環或回歸現象。

研究五

接著，若 Po,P1...,Pn-1 在圓周上的排列具週期性，是否也有類似的回歸現象呢？我們利用 GeoGebra 寫出的程式，針對各種不同具週期性排列的初始位置座標去觀察，發現只有兩間隔成一週期時才有明顯的規律，其餘並沒有特定規律。研究結果如下：

定理 5.2：圓周上相異 $2n$ 個點 $P_0,P_1,\cdots,P_{2n-1}$，且初始位置座標為 $\left[0,a,\frac{1}{n},\frac{1}{n}+a,\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}+a\right]$，其中 $0<a<\frac{1}{n},a\neq\frac{1}{2n}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，則一次變換後，$P_0,P_1,\cdots,P_{2n-1}$ 會變換至圓周上 $2n$ 等分點，且此 $2n$ 個點無論變換幾次永不回歸。

研究五

證明：

令 $P_0, P_1, \cdots, P_{2n-1}$ 的初始位置座標為 $[A_0, A_1, \cdots, A_{2n-1}]$，

其中 $A_i = \dfrac{i}{2n}$，i 為偶數，$A_i = a + \dfrac{i-1}{2n}$，$i$ 為奇數

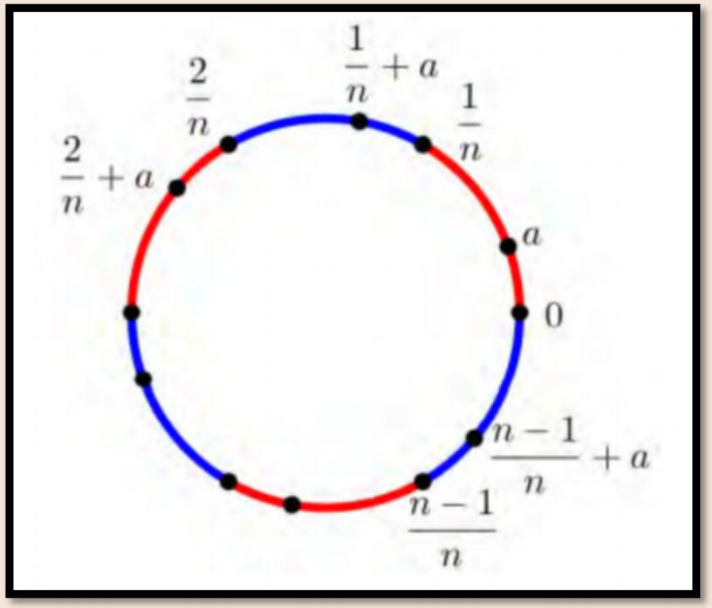
因為 $A_i(r) = \dfrac{1}{2^r}\sum_{k=0}^{r} C_k^r A_{i+k}$　　故 $A_i(1) = \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} C_k^1 A_{i+k} = \dfrac{1}{2}(A_i + A_{i+1})$

當 i 為偶數，$A_i(1) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{i}{2n} + a + \dfrac{i}{2n}\right) = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{i}{n}\right)$

當 i 為奇數，$A_i(1) = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{i-1}{2n} + \dfrac{i+1}{2n}\right) = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{i}{n}\right)$

故 $A_{i+1}(1) - A_i(1) = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{i+1}{n}\right) - \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{i}{n}\right) = \dfrac{1}{2n}$

即 $P_0, P_1, \cdots, P_{2n-1}$ 經一次變換後會為圓周上的 $2n$ 等分點。



由定理 4.1 知，之後此 $2n$ 個等分點位置皆以逆時針轉 $\dfrac{1}{4n}$ 的方式變換。當 i 為偶數時，

$A_i(r) = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{i}{n}\right) + \dfrac{r-1}{4n} = \dfrac{i}{2n} + \left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{r-1}{4n}\right)$，若 P_i 在變換 r 次後回歸，則 $\left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{r-1}{4n}\right) \in N \cup \{0\}$

顯然除非 $a = \dfrac{1}{2n}$，否則此 $2n$ 個點永不回歸。同理可證 i 為奇數的情形。■

研究五

討論：

若將定理 5.2 中「變換成與下一點所成弧之中點」改成「變換成與下一點所成弧之p：q （p≠q） 處」，那麼是否有類似的情形呢？即圓周上相異 2n 個點，若其初始位置座標為 $\left[0, a, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}+a, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}+a\right]$

是否可能在有限次變換後，變換至圓周上 2n 等分點？

【說明】因為 $A_i(r)=\frac{1}{(p+q)^r}\sum_{k=0}^{r}C_k^r p^k q^{r-k} A_{i+k}$ 且 $A_{i+1}(r)=\frac{1}{(p+q)^r}\sum_{k=0}^{r}C_k^r p^k q^{r-k} A_{i+k+1}$

不妨假設 i,r 皆為偶數，則

$$A_{i+1}(r)-A_i(r)=\frac{1}{(p+q)^r}\sum_{k=0}^{r}C_k^r p^k q^{r-k}\left(A_{i+k+1}-A_{i+k}\right)$$

$$=\frac{1}{(p+q)^r}\left[C_0^r q^r\cdot a+C_1^r pq^{r-1}\left(\frac{1}{n}-a\right)+C_2^r p^2q^{r-2}a+C_3^r p^3q^{r-3}\left(\frac{1}{n}-a\right)+\cdots+C_{r-1}^r p^{r-1}q\left(\frac{1}{n}-a\right)+C_r^r p^r a\right]$$

$$=\frac{1}{(p+q)^r}\left[a\left(\underbrace{C_0^r q^r-C_1^r pq^{r-1}+C_2^r p^2q^{r-2}-C_3^r p^3q^{r-3}+\cdots+C_r^r p^r}_{\text{註1}}\right)+\frac{1}{n}\left(\underbrace{C_1^r pq^{r-1}+C_3^r p^3q^{r-3}+\cdots+C_{r-1}^r p^{r-1}q}_{\text{註2}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{(p+q)^r}\left[a\cdot(p-q)^r+\frac{1}{n}\cdot\frac{(p+q)^r-(p-q)^r}{2}\right]=\frac{1}{2n}+\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^r\cdot\left(a-\frac{1}{2n}\right)(*)$$

研究五

【註 1】 $C_0^r q^r - C_1^r pq^{r-1} + C_2^r p^2 q^{r-2} - C_3^r p^3 q^{r-3} + \cdots + C_r^r p^r = \left[p + (-q)\right]^r$

【註 2】 $C_0^r q^r + C_1^r pq^{r-1} + C_2^r p^2 q^{r-2} + C_3^r p^3 q^{r-3} + \cdots + C_r^r p^r = (p+q)^r \cdots\cdots(1)$

$C_0^r q^r - C_1^r pq^{r-1} + C_2^r p^2 q^{r-2} - C_3^r p^3 q^{r-3} + \cdots + C_r^r p^r = (p-q)^r \cdots\cdots(2)$

$\dfrac{(1)-(2)}{2}$ 可得 $C_1^r pq^{r-1} + C_3^r p^3 q^{r-3} + \cdots + C_{r-1}^r p^{r-1} q = \dfrac{(p+q)^r - (p-q)^r}{2}$

由(*)式可知，除非 $p = q$ 或 $a = \dfrac{1}{2n}$ 時， $P_0, P_1, \cdots, P_{2n-1}$ 才有機會變換至圓周上 $2n$ 等分點。

研究結果

研究結果

一、圓周上相異 n 個點變換成與下一點所成弧之$\boxed{\text{中點}}$，求某點回歸的$\boxed{\text{最小變換數}}$。

圓周上相異 n 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，若某點變換 m 次後回歸，則 m 的最小值為 $n+2$。（若某點在變換 $n+2$ 次後回歸，則當 $n\geq 3$ 時，此點為唯一回歸的點；當 $n=2$ 時，n 個點同時回歸。）

二、圓周上相異 n 個點變換成與下一點所成弧之$\boxed{\text{中點}}$，求某點回歸的$\boxed{\text{所有可能變換數}}$。

圓周上相異 n 個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之中點，若某點經 m 次變換後回歸，則 m 之充要條件為 $m\geq n+2$ 且 $m\neq kn-1, kn, kn+1$，其中 k 為正奇數。

研究結果

三、圓周上相異n個點變換成與下一點所成弧之$\boxed{p:q}$處，求某點回歸的$\boxed{\text{最小變換數}}$。

(一)圓周上相異n個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之$p:q$處，若某點經m次變換後回歸，則：

(1)當$\frac{q}{p}<1$時，m的最小可能值為$n+1$。

(2)當$\frac{q}{p}=1$時，m的最小可能值為$n+2$。

(3)當$\frac{q}{p}>1$且k為最小自然數滿足$\frac{1}{(p+q)^{n+k}}\sum_{i=1}^{n+k}\left\lfloor\frac{i+n-1}{n}\right\rfloor C_i^{n+k}p^iq^{n+k-i}>1$時，$m$的最小可能值為$n+k$。此時$k\geq 2$。

(二)圓周上相異n個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之$p:q$處，其中$R=\frac{q}{p}>1$，若存在某點回歸的最小可能變換數為$n+k$，對於某個自然數$k\geq 2$，則R須滿足不等式

$$\sum_{i=n+1}^{n+k-1}\left\lfloor\frac{i-1}{n}\right\rfloor C_{n+k-i-1}^{n+k-1}(R)^{n+k-i}\leq(R)^{n+k}<\sum_{i=n+1}^{n+k}\left\lfloor\frac{i-1}{n}\right\rfloor C_{n+k-i}^{n+k}(R)^{n+k-i}$$

。

研究結果

四、圓周上相異n個點變換成與下一點所成弧之$\boxed{p:q}$處，求某點回歸的$\boxed{\text{所有可能變換數}}$。

(一)圓周上相異n個點，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之$p:q$處，其中$p,q\in N$，$(p,q)=1$，當變換次數r足夠大時，此n個點的位置會收斂至圓周上n等分點。同時，此n個點會在變換$T=\dfrac{n(p+q)}{(n,p)}$次後再次收斂至相同的位置。

(二)圓周上相異n個點$P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$，沿逆時針方向變換成與下一點所成弧之$p:q$處，若P_0變換r次後的點之位置坐標$A_0(r)$的最小極端值為L_r，最大極端值為U_r，$T=\dfrac{n(p+q)}{(n,p)}$，則$\lim\limits_{k\to\infty}\left(L_{kT}-[L_{kT}]\right)=\dfrac{n+1}{2n}$；$\lim\limits_{k\to\infty}\left(U_{kT}-[U_{kT}]\right)=\dfrac{n-1}{2n}$。也就是說，當$r=kT(k\in N)$時，$L_r$與$U_r$在圓周上的的收斂位置分別在$\dfrac{n+1}{2n}$與$\dfrac{n-1}{2n}$處，而$r=kT+1,kT+2,\cdots\cdots$時，$L_r$與$U_r$的收斂位置也隨之確定。因此，$A_0(r)$的值之範圍$(L_r,U_r)$是否會涵蓋整數值皆可得知，則$P_0$變換$r$次後可否回歸也能被預期。

五、圓周上相異n個點在$\boxed{\text{特殊初始位置座標}}$之回歸性質研究。

圓上n個點初始排列方式為等分點、線對稱或是具週期性，在特定條件下具有規律。

THANKS FOR YOUR LISTENING