數學思維解題
第57屆科展作品講解

第五組:王姵文410831102、張宸睿410831113、李冠言410831118
黃子宸410831120、施昕湧410831240、張洨毓410731134

讓牛頓步上尋根的階梯
—複係數多項方程式的求解與推廣

最佳創意獎

分析類別:代數

研究動機:

我們在<數學傳播>月刊中看見了與所學完全不同的方法，這個方法的圖示如栽種植物般，將大籬笆放在培養皿上，然後栽種尋根的種子……，而n個新芽長出n條藤，並四處攀援，最後向上尋根。我們對此方法十分有興趣，於是將它做為我們專題研究的主題。

讓牛頓步上尋根的階梯
—複係數多項方程式的求解與推廣

研究目的:

一、以庫恩植物栽培法為依據，並限制尋根之規則，期能較迅速逼近複係數方程式的零點。

二、證明尋根方法的理論依據。

三、比較牛頓法與階梯法及其他方法的優缺點，並尋找更實在好用的方法。

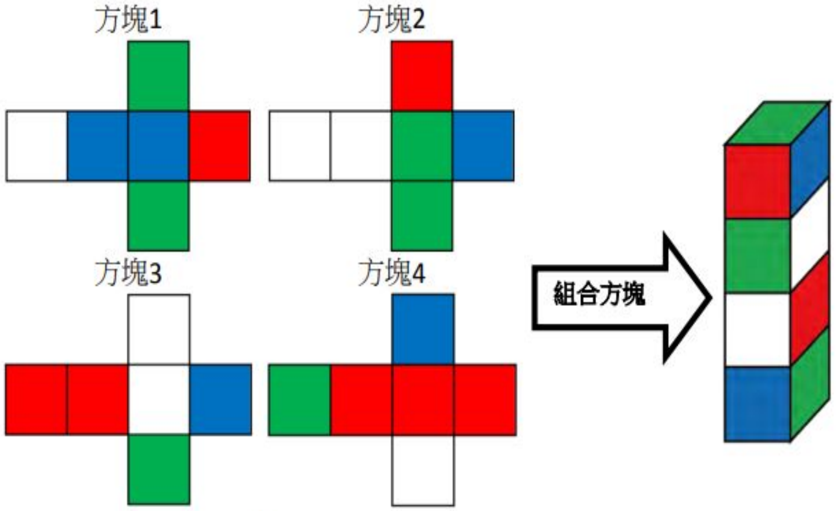
立即瘋解的情形探討

最佳(鄉土)教材獎

分析類別：數論

研究動機:

「立即瘋」遊戲的器材



如果改變紅、白、藍、綠四種顏色的塗色情形，其結果也一定有解嗎？

透過「排列組合」單元中的分類討論方式來研究「立即瘋」遊戲，並找出其中的規則。

立即瘋解的情形探討

研究目的:

在同一個方塊的六個面中，塗上紅、白、藍、綠四種顏色(每個面只塗上一種顏色)，若存在任一個顏色出現三個面時，我們以 S 表示，則 4S 表示四個方塊均為 S；若存在相異兩個 顏色各出現兩個面時，我們以 T 表示，則 4T 表示四個方塊均為 T。因此，本研究主要探討的 問題是：在「立即瘋」遊戲的規則下，針對紅、白、藍、綠四種顏色的分佈為 4S 及 4T 的情形， 探討是否有其對應解。

道同互相為「蒙」—
蒙日定理共點共線共圓的問題
探討與推廣

第一名

分析類別：幾何

研究動機:

本研究將延續並進一步探討

「Monge’s theorem 的性質探討與推廣」

其中包含蒙日點位置與各圓半徑、座標的幾何量關係，以及探討 n 圓中各蒙日點間的關係，並試圖定義「蒙日圓」的作法以將蒙日線與廣義蒙日點定理也推廣至 n 圓情形。

道同互相為「蒙」
–蒙日定理共點共線共圓的問題探討與推廣

研究目的:

本研究目的試圖將三圓中的蒙日定理推廣至n個圓、球、多邊形及多面體等位似圖形的情形，並探討其中相關的性質，問題如下：

(一)探討平面上四圓、五圓以至n個圓中蒙日點的相關性質與推廣。

(二)探討平面上代表n個圓的蒙日圓，其存在性及相關性質。

(三)試圖將上述性質推廣至空間中的球體。

(四)試圖將上述性質推廣至多邊形與多面體等位似圖形。

面積最大值定點

佳作

分析類別：代數、幾何

研究動機:

「直線 $y=-4/3x+8$ 與 x、y 軸分別交於 A、B 兩點，動點 P、Q 分別從原點 O 同時出發，P 點以每秒 2 單位的速率沿著 OAB 的邊界逆時針運動，Q 點沿著 OAB 的邊界順時針以每秒 1 單位的速率運動，一直到 P、Q 兩點移動到 B 點相遇時就停止。試問 P、Q 的運動過程中，面積的最大值為_____。」

當我們將 P 點的速率改為每秒 1 單位或 3 單位時，發現其面積最大值與速率 v 成反比，當面積達最大時，P 點位置竟然不受速率 v 的影響，我們稱它為面積最大值定點，開始我們的研究。

面積最大值定點

研究目的:

一、在直角三角形OAB 中，探討 P 點在不同速率下，於 P、Q 兩點相遇之前，三角形 OPQ 面積的最大 值、此時 P、Q 的坐標及其幾何意義。

二、在一般三角形OAB 中，探討 P 點在不同速率下，於 P、Q 兩點相遇之前，三角形OPQ 面積的最大 值、此時 P、Q 的坐標及其幾何意義。

三、在任意三角形OAB 中，以速率 v 為變數，探討最大面積函數 $F(v)$的圖形，並且比較其差異性。

四、在正 n 邊形中，$n = 4$、5、6、8，探討 P 點在不同速率下，於 P、Q 兩點相遇之前，三角形OPQ 面積的最大值、此時 P、Q 的坐標及其幾何意義。

The Magic Power of Sequencing Polyominoes

最佳團隊合作獎

分析類別:數論

研究動機:

計算多方塊的種類是複雜的，在相對應的數論問題上，解決多方塊的計數問題，相當於完成質數分布或質數計算函數的更精確技巧(並且延伸)，目前僅能藉由處理上下界問題，試圖找出多方塊種類隨著連方數增加而變化的趨勢。

同時，多方塊在歐幾里得平面上的排列性質亦是困難的，然而利用 SAW(Self Avoiding Walking)的思維可以用代數模型描述多方塊在平面上的特性，透過模型定義，也容易嚴格證明一些直觀容易理解卻不易解答的問題，進而引起研究與延伸探討的動機。

The Magic Power of Sequencing Polyominoes

研究目的:

一、找出一個足以描述多方塊(one-sided polyomino)的數學模型

二、簡化該模型的規則

三、透過建立數學模型以理解多方塊在歐幾里得平面上的性質

四、找出多方塊種類函數的範圍

五、縮小多方塊種類函數的上界與下界距離

六、整理相同多方塊在平面上組成矩形的條件

閃爍燈之循環性質研究與探討

第三名

分析類別：排列組合

研究動機:

閃爍燈問題：「將n盞燈排成一列，最初將其中某些燈點亮，在以後的每次操作，將上一次未亮且其旁邊僅有一盞燈是亮著的燈點亮，同時將原來已亮的燈熄滅。試問對什麼樣的n，可以找到一種亮燈的方式，使得無論操作幾次，在每一次操作後，至少都有一盞燈是亮著的。」

我們對亮燈方式的循環性質感到好奇。

閃爍燈之循環性質研究與探討

研究目的:

一、探討n個燈直線排列的循環性質。

二、探討n個燈環狀排列的循環性質。

三、探討mxn個燈矩陣排列的循環性質。

四、探討mxnxl個燈三維陣列排列的循環性質。

五、改變操作規則，並探討各種排列之循環性質。

百轉千迴繞曲線
–費氏螺線推廣k階數列曲線之探討

第二名

分析類別:代數

研究動機:

$$\begin{cases} F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 0 \end{cases}$$

在本研究中，我們從費氏螺線推廣至k階齊次線性遞迴數列相應的各種曲線，過程中我們配合高中數學中的「數列與級數」、「多項式函數」、「直線與圓」、「極限與函數」、「多項式函數的微積分」來解決研究的問題。

百轉千迴繞曲線
–費氏螺線推廣k階數列曲線之探討

研究目的:

一、依照費氏螺線的樣式，建構推廣費氏矩形及費氏螺線。

二、探討k階遞迴關係中係數在何種條件下，形成推廣費氏螺線或非螺線的性質。

三、在k階齊次線性遞迴數列中，探討後前項極限比與其特徵方程式的實根之性質，再論證出形成螺線以及非螺線的充分條件。

四、建構k階齊次線性遞迴數列相應的曲線，並且將曲線解釋成大自然的圖像。

巴斯卡三角形對質數同餘性質探討

第三名

分析類別:組合學

研究動機:

我們曾經看過一個數奧問題:

> n是一個正整數，$n+1$個正整數$C_0^n, C_1^n, C_2^n, \cdots, C_{n-1}^n, C_n^n$中，除以 5 餘$j(1 \leq j \leq 4)$的個數用$r_j$表示，求證$r_1 + r_4 \geq r_2 + r_3$。
>
> 這題的答案用數學歸納法證明。(數學奧林匹亞大集新編)

但我們好奇是否能將r_1, r_2, r_3, r_4分別的數值求出，於是開始對類似的問題進行探討。

巴斯卡三角形對質數同餘性質探討

研究目的:

本文主要探討組合數對一質數p同餘的性質:

一、給定一組合數C_m^n對p同餘，若不整除，餘數為多少?若整除，含有幾次的質因數?

二、探討同餘後的巴斯卡三角形的特性。

三、n是一個正整數，第n列巴斯卡三角形$C_0^n, C_1^n, \cdots, C_{n-1}^n, C_n^n$中，除以$p$餘j $(0 \leq j < p)$的個數用r_j表示，r_j各別的數值為何?

四、探討在比 5 更大的質數中，是否亦存在與原題目類似的r_j數量大小關係。

永恆的旋轉木馬

第三名

分析類別：代數

研究動機:

競賽題:「橢圓的兩垂直焦點弦被焦點所分成的四段線段長的倒數平方和為定值。」

我們在解題過程中思考題目的各種變化，從四條線到 n 條，甚至到倒數 m 次方和。

並利用極座標與GeoGebra畫出了更多有趣的曲線跟令人驚豔的 3D 模擬圖。

永恆的旋轉木馬

第三名

分析類別:代數

研究目的:

一、固定圓錐曲線方程式的情況下，以焦點為旋轉中心，則 n 條相鄰等角焦半徑經任意旋 轉時的倒數 m 次方和為定值，其中 n>m，n，m屬於正整數。

二、固定圓錐曲線方程式的情況下，以其內任意一點為旋轉中心，則過此點的n條相鄰等 角割線段經任意旋轉時的倒數 m 次方和為定值，其中 n>m，n，m為偶數。

三、在空間中，固定特殊橢圓、拋物、雙曲曲面方程式的情況下，以焦點為旋轉中心，則此焦點向正 N 面體的各頂點做射線交曲面的各線段之倒數 m 次方和為定值。

四、在空間中，任意正多面體之頂點到任意點、線、面之距離 m 次方和為定值。

球球相扣
–球內接正多面體的定值問題探討

佳作

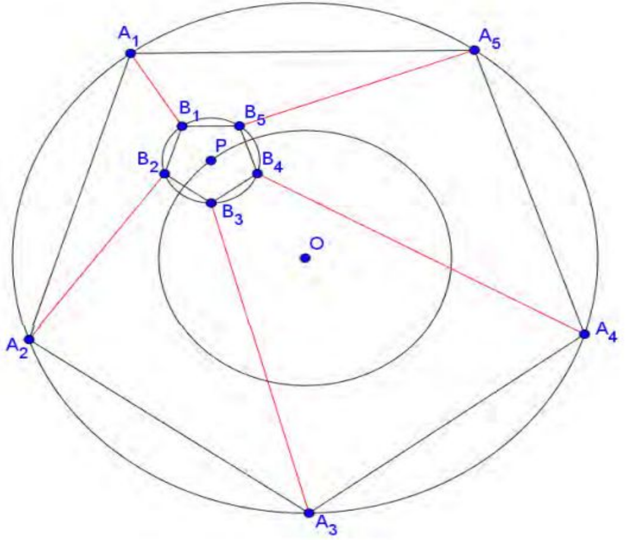
分析類別:幾何

研究動機:

[以 O 為圓心，作同心圓 C_1、C_2，半徑分別為 R_1、R_2，並作圓 C_1 的內接正五邊形 $A_1 \ldots A_5$， 再以圓 C_2 上一動點P為圓心作圓 C_3 ，半徑為 r ，再作圓 C_3 內接正五邊形$B_1 \ldots B_5$，則兩正五邊形各頂點距離二次、四次、六次、八次方和恆為定值。]

定值的問題:

我們發現一個幾何工具「向量」,能將原本複雜的複數幾何算式,透過向量的運算讓式子變得精簡,並可將平面上大部分的結果推廣到空間中,於是我們改用向量的概念嘗試處理問題。



球球相扣
–球內接正多面體的定值問題探討

研究目的:

找出圓上一動點 P 與其內接正 n 邊形之各頂點所衍生的定值之公式，並將部分結果推廣 到空間中的正多面體。

再探勾股鐵路網

佳作

分析類別:代數

研究動機:

接觸第47屆全國科展的「勾股鐵路網」:探討由整數數列產生股差為定值的素勾股數家族，作者發現「最簡股差皆可寫成 $|8k \pm 1|$ 的形式， $k \in Z$」，但沒有對此提出證明，更無法從正整數直接挑出最簡股差。

因此，我想證明「勾股鐵路網」的發現，並提出最簡勾股差判別方法為「最簡股差的所有因數皆可寫成 $|8k \pm 1|$ 的形式，$k \in Z$」。

再探勾股鐵路網

研究目的:

一、證明最簡股差的判別方法。

二、合成各種股差的最簡真分數數列。

三、建立平面座標與空間座標中的「勾股鐵路網」。

數的循環

佳作

分析類別:組合學

研究動機:

我們翻閱第三十五屆的全國數學科展，證明了一個有趣的問題:方塊數論。

藉此我們想深入推廣，繼續研究下面這個問題:任意 n 個正整數之數列(n>1) 其相鄰兩數相減之絕對值形成一新數列，重複這個"運算"，欲證明此"運算"的數列具有「循環性」，並找出其循環節次。

數的循環

研究目的:

一、設計電腦程式來實驗任意 n 個正整數(n＞1)之數列依此"運算"是否具有循環性。

二、理論證明:

(一) 任意 n 個正整數之數列依此"運算"是否具有循環性。

(二) 任意 n 個正整數之數列依此"運算", 找出其循環節次。

電腦程式設計之操作

〈a_i〉				最大值〈M_i〉	總和〈S_i〉
0000	2	4	9	9	15
0001	2	5	7	7	14
0002	3	2	5	5	10
0003	1	3	2	3	6
0004	2	1	1	2	4
0005	1	0	1	1	2
0006	1	1	0	1	2
0007	0	1	1	1	2
0008	1	0	1	1	2

由此可知M_i遞減

由此開始數列內的整數非0即1

直線排列之循環

環狀排列之循環

表一：任意 3 個整數之測試

〈a_i〉						最大值〈M_i〉	總和〈S_i〉
0000	3	2	3	1	4	4	13
0001	1	1	2	3	1	3	8
0002	0	1	1	2	0	2	4
0003	1	0	1	2	0	2	4
0004	1	1	1	2	1	2	6
0005	0	0	1	1	0	1	2
0006	0	1	0	1	0	1	2
0007	1	1	1	1	0	1	4
0008	0	0	0	1	1	1	2
0009	0	0	1	0	1	1	2
0010	0	1	1	1	1	1	4
0011	1	0	0	0	1	1	2
0012	1	0	0	1	0	1	2
0013	1	0	1	1	1	1	4
0014	1	1	0	0	0	1	2
0015	0	1	0	0	1	1	2
0016	1	1	0	1	1	1	4
0017	0	1	1	0	0	1	2
0018	1	0	1	0	0	1	2
0019	1	1	1	0	1	1	4
0020	0	0	1	1	0	1	2

由此可知M_i遞減

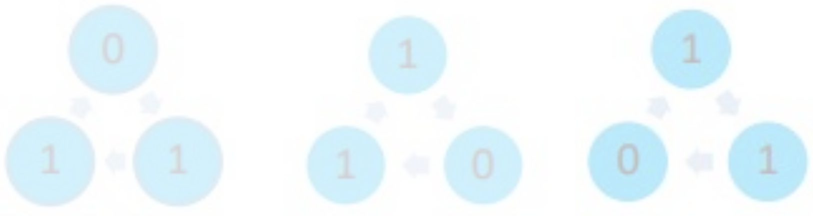
由此開始數列內的整數非0即1

直線排列之循環

環狀排列之循環

數的循環

理論證明與討論過程



定理甲:數列中含有三個相異數以上，經有限次運算後，則最大值M0一定會遞減

Case1: 若數列<a0>中M0的相鄰數是不為 0 且較M0小的數，則M0與此相鄰數相減必立即嚴格遞減。

Case2: 若數列<a0>中M0的相鄰數是 0 則經有限次運算後也必遞減

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & M_0 & & & \\
\langle a_0 \rangle & 0 & 0 & 2 & 9 & 1 & 0 & 8 \\
\langle a_1 \rangle & 0 & 2 & 7 & 8 & 1 & 8 & 8
\end{array}
$$

將數列 9 8 0 0 9 0 0 0 0 9 0 0 0 0 0 3 8 1 0 0 0

繞排得 $\langle a_0 \rangle$為 1 0 0 0 9 8 0 0 9 0 0 0 0 9 0 0 0 0 0 3 8

L線 R線

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	0	0	0	9	8	0	0	9	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0	3	8
1	0	0	9	1	8	0	9	9	0	0	0	9	9	0	0	0	0	3	5	7
1	0	9	8	7	8	9	0	9	0	0	9	0	9	0	0	0	3	2	2	6
1	9	1	1	1	1	9	9	9	0	9	9	9	9	0	0	3	1	0	4	5
8	8	0	0	0	8	0	0	9	9	0	0	0	9	0	3	2	1	4	1	4
0	8	0	0	8	8	0	9	0	9	0	0	9	9	3	1	1	3	3	3	4
8	8	0	8	0	8	9	9	9	9	0	9	0	6	2	0	2	0	0	1	4
0	8	8	8	8	1	0	0	0	9	9	9	6	4	2	2	2	0	1	3	4
8	0	0	0	7	1	0	0	9	0	0	3	2	2	0	0	2	1	2	1	4
8	0	0	7	6	1	0	9	9	0	3	1	0	2	0	2	1	1	1	3	4
8	0	7	1	5	1	9	0	9	3	2	1	2	2	2	1	0	0	2	1	4
8	7	6	4	4	8	9	9	6	1	1	1	0	0	1	1	0	2	1	3	4
1	1	2	0	4	1	0	3	5	0	0	1	0	1	0	1	2	1	2	1	4
0	1	2	4	3	1	3	2	5	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3
1	1	2	1	2	2	1	3	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	3
0	1	1	1	0	1	2	2	4	1	0	0	0	0	0	0	0	2	2	3	2
1	0	0	1	1	1	0	2	3	1	0	0	0	0	0	0	2	0	1	1	2
1	0	1	0	0	1	2	1	2	1	0	0	0	0	0	2	2	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	2	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	2	1	0	0	1	0	1

L 線右移，R 線左移至兩線重疊或交錯，此時最大數 9 必消失

定理乙：數列經有限次運算後不是均變為 0，就是變成0、m 兩種數字

Case1：若數列<a0>內共有2 個數經有限次運算後必全為 0。

Case2： 若重複上述之數列$\langle a_0\rangle$ k 次得到形如

$\langle a_0\rangle' \equiv a_1a_2a_3\cdots a_{2n}, a_1a_2a_3\cdots a_{2n}, \cdots\cdots a_1a_2a_3\cdots a_{2n}$，則經有限次運算後亦全為 0：

1	3	0	5	1	3	0	5	1	3	0	5	5
2	3	5	4	2	3	5	4	2	3	5	4	5
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Case3: 若數列<a0>中除了 0 與M0外，尚有另一數Mi，而Mi＜M0，由定理甲得知M0必會 遞減，而一直遞減的結果，每一項均變為 0，因為Mi必遞減，而底限為 0，自然最後 每一數均變為 0，除非當<ai>數列中僅剩下0與Mi兩種數，故定理乙得證。

定理丙：數列個數不是2^n個且$a_i \in \{0、m\}$時，經有限次運算則產生循環或歸零

當數列運算到只剩0、m兩種數字，若此數列中有k個整數，則由0、m組成k個的直線排列情形就只有$2k$種，最多運算$2k+1$次，必有重複的情況，此時便會產生循環或歸零 故定理丙得證。

$\langle a_0 \rangle$	$\equiv$	0	m	0	0	m
		m	m	0	m	m
		0	m	m	0	0
		m	0	m	0	0
		m	m	m	0	m
$\langle a_5 \rangle$	$\equiv$	0	0	m	m	0
		0	m	0	m	0
		m	m	m	m	0
		0	0	0	m	m
		0	0	m	0	m
$\langle a_{10} \rangle$	$\equiv$	0	m	m	m	m
		m	0	0	0	m
		m	0	0	m	0
		m	0	m	m	m
		m	m	0	0	0
$\langle a_{15} \rangle$	$\equiv$	0	m	0	0	m

引理III: 任意數列經有限次運算後，必可得某一數列，其總和為 0。

由定義 $m+m \equiv m-m \equiv 0$，故 $2m \equiv 0$，$\sum_{k=1}^{n} b_k \equiv$ 偶數個 $m \equiv 0$

引理IV: n、$k\in N$，則$C_k^{2^n-1}$ 必為奇數。

證明：$C_k^{2^n-1}=\dfrac{(2^n-1)!}{k!(2^n-1-k)!}=\dfrac{(2^n-1)(2^n-2)\cdots(2^n-k)}{1\times 2\cdots\cdots\times k}$，

k與2^n-k，含有相同的2的次方之因子，所以約分後，分子分母皆為奇數，又

$C_k^{2^n-1}\in N$，所以$C_k^{2^n-1}$必為奇數。

定理丁：數列個數為$2n$，其中$ai \in \{0、m\}$且含有偶數個 m，則此數列經運算 $2n-1$次必歸零，終止成每一項皆為 0 的數列 a

證明：一數列經過1、2、3...2n-1次運算統整如下

a_1 ， a_2 ， a_3 ， ……………………………… ， a_{2^n}

第一次運算 a_1+a_2 ，a_2+a_3 ，a_3+a_4 ， …………… ， $a_{2^n}+a_1$

第二次運算 $C_0^2a_1+C_1^2a_2+C_2^2a_3$ ， $C_0^2a_2+C_1^2a_3+C_2^2a_4$ ， ………. ，$C_0^2a_{2^n}+C_1^2a_1+C_2^2a_2$

第三次運算 $C_0^3a_1+C_1^3a_2+C_2^3a_3+C_3^3a_4$ ， ……………….. ，$C_0^3a_{2^n}+C_1^3a_1+C_2^3a_2+C_3^3a_3$

運算2^n-1 次得數列： A_1 ， A_2 ， A_3 ， …………………….. ，A_{2^n}

接著逐步分析各項

$$A_1 = C_0^{2^n-1}a_1 + C_1^{2^n-1}a_2 + \cdots + C_{2^n-2}^{2^n-1}a_{2^n-1} + C_{2^n-1}^{2^n-1}a_{2^n}$$
$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n} \equiv 0$$
$$A_2 = C_0^{2^n-1}a_2 + C_1^{2^n-1}a_3 + \cdots + C_{2^n-2}^{2^n-1}a_{2^n} + C_{2^n-1}^{2^n-1}a_1$$
$$= a_2 + a_3 + \cdots + a_{2^n} + a_1 \equiv 0$$
$$A_k = C_0^{2^n-1}a_k + C_1^{2^n-1}a_{k+1} + \cdots + C_{2^n-k}^{2^n-1}a_{2^n} + C_{2^n-k+1}^{2^n-1}a_1 + \cdots C_{2^n-2}^{2^n-1}a_{k-2} + C_{2^n-1}^{2^n-1}a_{k-1}$$
$$= a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{2^n} + a_1 + \cdots + a_{k-2} + a_{k-1} \equiv 0$$

我們可以得知

運算2 n −1 次後每一項皆歸零，得數列為 0 0 0 … 0 終止運算，定理丁得證。

定理戊:

數列個數為 2^n-1，其中 $a_i \in \{0、m\}$數個m，若不歸零，則其循環節次為 2^n-1

證明過程如下：

原始數列 a_1 a_2 a_3 …… a_k …… a_{2^n-1}

運算1次 a_1+a_2 a_2+a_3 a_3+a_4 …… a_k+a_{k+1} …… $a_{2^n-1}+a_1$

運算2次 $C^2_0 a_1+C^2_1 a_2+C^2_2 a_3$，$C^2_0 a_2+C^2_1 a_3+C^2_2 a_4$ $C^2_0 a_{2^n-1}+C^2_1 a_1+C^2_2 a_2$

運算 2^n-1 次 A_1，A_2，A_3 ……，A_K，……，A_{2^n-1}

$$A_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots + a_{2^n-1} + a_1 \equiv 0 + a_1 = a_1$$

$$A_2 = C_0^{2^n-1} a_2 + C_1^{2^n-1} a_3 + \cdots\cdots + C_{2^n-2}^{2^n-1} a_1 + C_{2^n-1}^{2^n-1} a_2 = \sum_{k=1}^{2^n-1} a_k + a_2 \equiv 0 + a_2 = a_2$$

$$A_k = C_0^{2^n-1} a_k + C_1^{2^n-1} a_{k+1} + \cdots\cdots + C_{2^n-2}^{2^n-1} a_{k-1} + C_{2^n-1}^{2^n-1} a_k = \sum_{k=1}^{2^n-1} a_k + a_k \equiv 0 + a_k = a_k$$

$$A_{2^n-1} = C_0^{2^n-1} a_{2^n-1} + C_1^{2^n-1} a_1 + C_2^{2^n-1} a_2 + \dots\dots + C_{2^n-2}^{2^n-1} a_{2^n-2} + C_{2^n-1}^{2^n-1} a_{2^n-1} = \sum_{k=1}^{2^n-1} a_{k-1} + a_{2^n-1} \equiv 0 + a_{2^n-1} = a_{2^n-1}$$

故運算2^n-1次後得數列

a_1 a_2 a_3 …… a_k …… a_{2^n-1}即為原始數列

會產生循環，循環節次為2^n-1，故定理戊得證

結論

（一）任意 n 個正整數之數列依此運算具有循環性。

定理甲：數列$\langle a_0\rangle$含有三個相異數以上，經有限次運算後，則M_0一定會遞減

定理乙：$\langle a_0\rangle$經有限次運算後不是均變為 0，就是變成 0、m 兩種數字

定理丙：數列個數不是2^n個且$a_i \in \{0、m\}$時，經有限次運算則產生循環或歸零

（二）任意 n 個正整數之數列依此運算，必可找出其循環節次。

定理丁：數列個數為2^n其中$a_i \in \{0、m\}$且含有偶數個 m，則此數列經運算2^n-1次必歸零終止成每一項皆為 0 的數列

定理戊：數列個數為2^n-1時，其中$a_i \in \{0、m\}$且含有偶數個 m，則其循環節次為2^n-1