中華民國第53屆科展得獎作品

第九組
410931251 王俊淵
410831227 張湑昇
410831231 王冠翔

第一名
連續正整數的鈍角三角形劃分

- 研究動機：一次偶然的機會在書上看到這樣的題目：考慮集合S={2,3,... ,3n+1}，試證明：可將其 分成 個兩兩不相交的三元子集，使得任一子集中的三個數恰好是某鈍角三角形之三邊長。 這題目相當有趣，我們打算研究還擁有這樣性質的集合，本文中，我們將先證明原命題並將 其推廣至另外的集合：{k,k+1,...,3n+k+1}，我們好奇的是什麼樣的 值會使得這樣的集 合也能分出鈍角三角形的子集，文中不斷利用組合數學中分組的方法。
- 研究目的：一、給定n值求出k的最小值的上下界。

  二、給定n值求出k的所有值的上下界。

  三、給定n、k時構造出其鈍角三角形的劃分。
- 類別：三元集、平方和

第二名
孟氏定理與西瓦定理在多邊形中的推廣

研究動機：

在一次課餘的機會裡，因為課程上剛好談到平面向量，所以老師特別介紹了三角形中的『孟氏定理』與『西瓦定理』，當下的我，覺得其結果有一點神奇，但證明並不困難，經過幾天的沈 浸消化之後，我開始去思考有沒有機會將這樣的結果推論到更多邊形的情形，於是我向老師表達 我的想法，老師建議我可以嘗試看看。於是我從邊數較少的情形著手出發，四邊形、五邊形到 n 邊形，逐步完成，雖然過程有一點辛苦，但是每當完成一個小小的『猜測』，就覺得很有成就感。 完成平面上的推論後，我亦試著將其推廣到『立體空間』，在分區科展後，我又陸續的完成空間 中『孟氏共面定理』與『西瓦共點定理』的證明。

研究目的

- 一、孟氏定理在凸四邊形上的推論。
- 二、孟氏定理在凹四邊形上的推論。
- 三、孟氏定理在凸五邊形上的推論。
- 四、孟氏定理在凸n 邊形上的推論。
- 五、將孟氏定理在凸n 邊形上的推論轉 變在n 條直線上的推論。
- 六、西瓦定理在凸四邊形上的推論。
- 七、西瓦定理在凹四邊形上的推論。

研究目的

- 八、西瓦定理在凸五邊形上的推論。
- 九、西瓦定理在凸 n 邊形上的推論。
- 十、將西瓦定理的共『點』擴大成『圓』。
- 十一、將西瓦定理的共『點』換成『正多邊形』。
- 十二、空間中的孟氏共面定理。
- 十三、空間中的西瓦共點定理。

類別：孟氏定理、西瓦定理、n 點共線

第三名
來人阿！把訊息傳出去

- 研究動機：

某天放學，導師告知一群尚未離校的同學隔日課程調動，原訂服裝將由制服更改為體育服，並請這些同學以電話通知將此訊息轉告至班上所有同學。 因此，我們對這訊息傳達過程產生了強烈的好奇心，現在是個講求效率的社會，利用最 少成本達到最大效益已經是必要的條件。如何才能利用最少的傳遞次數使所有人均得知訊 息。我們反覆畫出訊息傳遞的可能，希望能夠利用此次科展的機會，得出傳遞所能的夠的「最 佳」且「最快」方式，並能廣泛運用於生活中。

第三名：來人阿！把訊息傳出去

研究目的

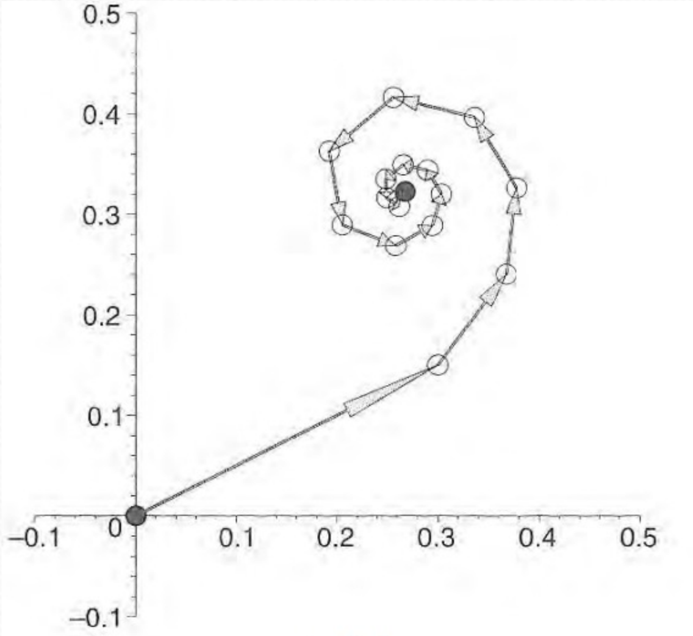
- 一、分析對談過程，以釐清整合方式的差異。
- 二、證明最佳的對談模式。
- 三、找尋最佳對談次數的函數關係。
- 四、簡化對談流程。

類別：樹、訊息傳遞、高斯

第三名：命中注定我「繞」你

研究動機 「碎形」 -

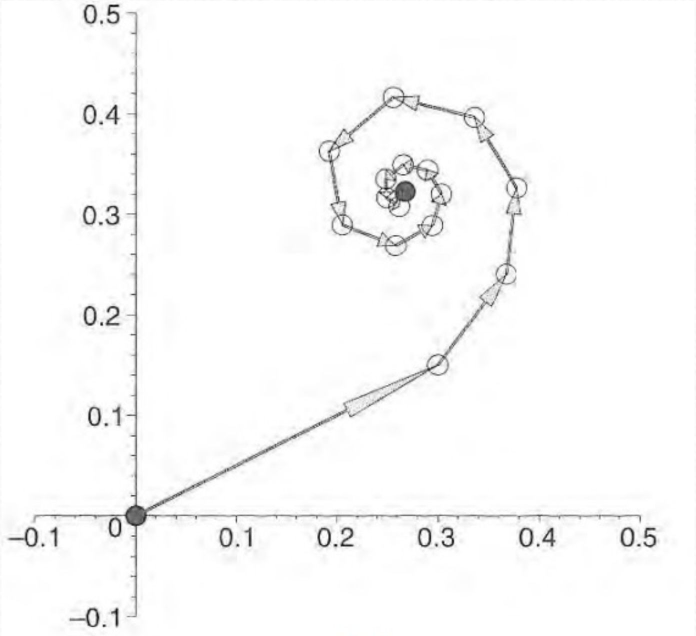
—為以某種方式與整體相似部份所組成的圖形。觀察校園裡自然界的呈現，松樹的枝枒是一種自我相似的碎形，羊齒蕨的葉片也是一種碎形。在專題研究課中，我們對於動手玩碎形這本書裡的某個圖（如圖一）感到好奇：



▲ 圖一

第三名：命中注定我「繞」你

該圖形重複不斷的繞行後，最後集中到一個點吸子(attractor) 。在歷屆科展中對於平面上質點繞行軌跡已經有所探討，而我們生活中的世界是個三維空間，三維空間中點吸子的軌跡又是如何？開啟了一系列的研究與探討



▲ 圖一

研究目的

- 一、探討當瓢蟲的轉向角為$\emptyset(\mathbf{0} \le \emptyset \le \mathbf{2}\boldsymbol{\pi})$，仰角為$\boldsymbol{\theta}\left(-\frac{\pi}{2} \le \boldsymbol{\theta} \le \frac{\pi}{2}\right)$時，各轉向角與仰角所 對應的收斂點 P 在空間坐標中的關係。
- 二、探討當瓢蟲分別固定仰角$\boldsymbol{\theta}\left(-\frac{\pi}{2} \le \boldsymbol{\theta} \le \frac{\pi}{2}\right)$與轉向角$\emptyset(\mathbf{0} \le \emptyset \le \mathbf{2}\boldsymbol{\pi})$時的收斂點 P 的位置。
- 三、探討各轉向點$\boldsymbol{P_n}$ $(\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N})$之關聯性

研究目的

- 四、從旋轉矩陣探討瓢蟲的繞行模式。
- 五、從高觀點研究瓢蟲的收斂模式。
- 六、探討瓢蟲繞行模式的應用。

類別：等比級數、仿射、位似旋轉

第三名
平方數列

- 研究動機：在高一上專題課時，老師提及一道有趣的題目，出自於 2003 年 TRML 團體賽第七題， 題目如下： 試將1~16這16個數排成一列，使得相鄰兩項之和為完全平方數，且首項大於末項。 我們當時覺得驚訝！1~16是特例嗎？1~17可以嗎？哪些n可將1~n排成相鄰兩項之和為平方數的數列（以下稱為平方數列）？在好奇心及好勝心的驅使下，展開研究的旅程！
- 研究目的：

一、找出哪些n可以將1~n排成「平方數列」，並給出一般化的構造方法。

二、探討平方數列的排法是否唯一。

三、找出哪些n無法將1~n排成平方數列。

- 類別：平方數列、平方項鍊、Pell Equation

佳作
大珠小珠落玉盤 - 正多邊形的兩個性質

- 研究動機：有一天在圖書館找書的時候，意外發現一本「數學傳播季刊」，大致瀏覽了一下，其中有一 篇由劉步松教授所寫的「正三角形和正五邊形的兩個性質」特別引起我們的注意，設想如果 是其它邊數為奇數的正多邊形，是否也有這兩個性質？ 而邊數為偶數的正多邊形又如何？ 於是我們便開始著手研究這個問題。
- 研究目的：探討哪些正多邊形具有「這兩個性質」，並找出「這兩個性質」之間的關係，及其背後所代 表的意義。
- 類別：正多邊形、內切圓、三角恆等式

佳作
君子“號球”

- 研究動機

在數學專題課時，老師提供了 2011、2012 年亞太數學奧林匹亞競賽的初選考題，讓我 們分組進行研討，其中 2011 年的第 2 題引起了我們極大的興趣：「將 10 個箱子編號為 1 , 2 , 3 , ... , 10，另將10個球編號為1 , 2 , 3 , ... , 10。今規定編號i的球只能放入編號1 , 2 , 3 , ... , i 的箱子 , i = 1 , 2 , 3 , ... , 10。求恰有一個空箱子的放球方法數?」 經過我們與老師的討論，發現此題運用高一的「遞迴數列」與「排列組合」便能輕鬆解 出，然而題目背後似乎還隱藏著許多可以延伸的部分，於是我們決定探索下去，希望可以從中獲得更多的成果。

研究目的

一、設 m 個箱子編號為 1,2,3, … , m，另有 m 個球編號為 1,2,3, … , m。今規定編號 i 的球 只能放入編號 1,2,3, … , i 的箱子，其中 i = 1,2,3, … , m。茲討論各種情況如下：

(一) 找出 m 個箱子空第 a 個箱子的方法數。($a \leqq m$)

(二) 找出 m 個箱子空任一個箱子的總方法數。

(三) 找出 m 個箱子空第 a 和 b 個箱子的方法數。($a<b \leqq m$)

(四) 找出 m 個箱子空任兩個箱子的總方法數。

(五) 找出 m 個箱子空任 n 個箱子的總方法數。($n<m$)

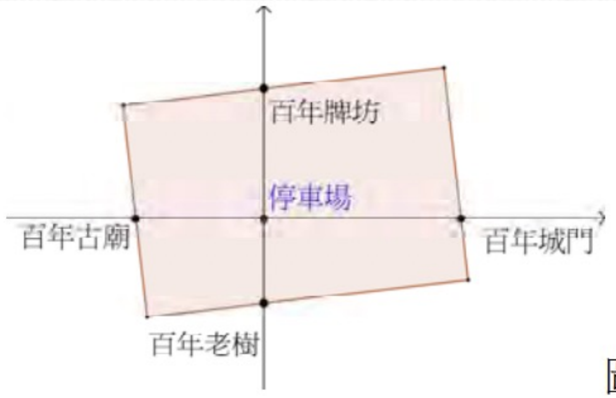
研究目的

二、給定其他不同類型的限制條件，並討論其方法數。

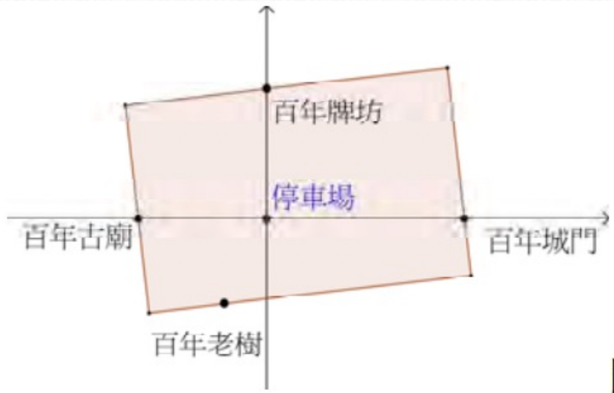
- 類別：遞迴數列、排列組合、尤拉三角形

佳作
循規蹈矩

- 研究動機 一地區希望在一個垂直的十字路口蓋一個矩形的停車場(如圖c)，十字路口的東、西、南、 北各有百年城門、百年古廟、百年老樹、百年牌坊，受限於文化資產保存法的規定，停車場的設 置必須避開這些百年古蹟，試問這樣的停車場是否存在？以及它的最大面積為何？



圖①



圖②

研究目的

- 一、給定平面坐標軸上四點 A,B,C,D (x, y 軸之正向及負向各一點)，是否存在一個矩形通過這四 點，這個矩形的最大面積及最大周長為何。
- 二、給定平面坐標軸上三點 A, B , C 及不在軸上一點 D (如圖d)，是否存在一個矩形通過這四點， 這個矩形的最大面積為何。
- 三、給定平面相異四點，其中任三點不共線，是否存在一個矩形通過這四點，這個矩形的最大面 積為何。
- 四、任給平面三點，是否存在通過這三點的正三角形。

研究目的

- 五、任給平面三點，是否存在通過這三點且與原三角形相似的三角形。
- 六、給定空間坐標軸上六點(x, y ,z軸之正向及負向各一點)，是否存在一個長方體通過這六點， 這個長方體的最大體積為何

類別：等角多邊形、費馬點