

數學解題方法第 3 組
期末報告主題

黑暗騎士 & 英式奶茶

411131123 施語柔

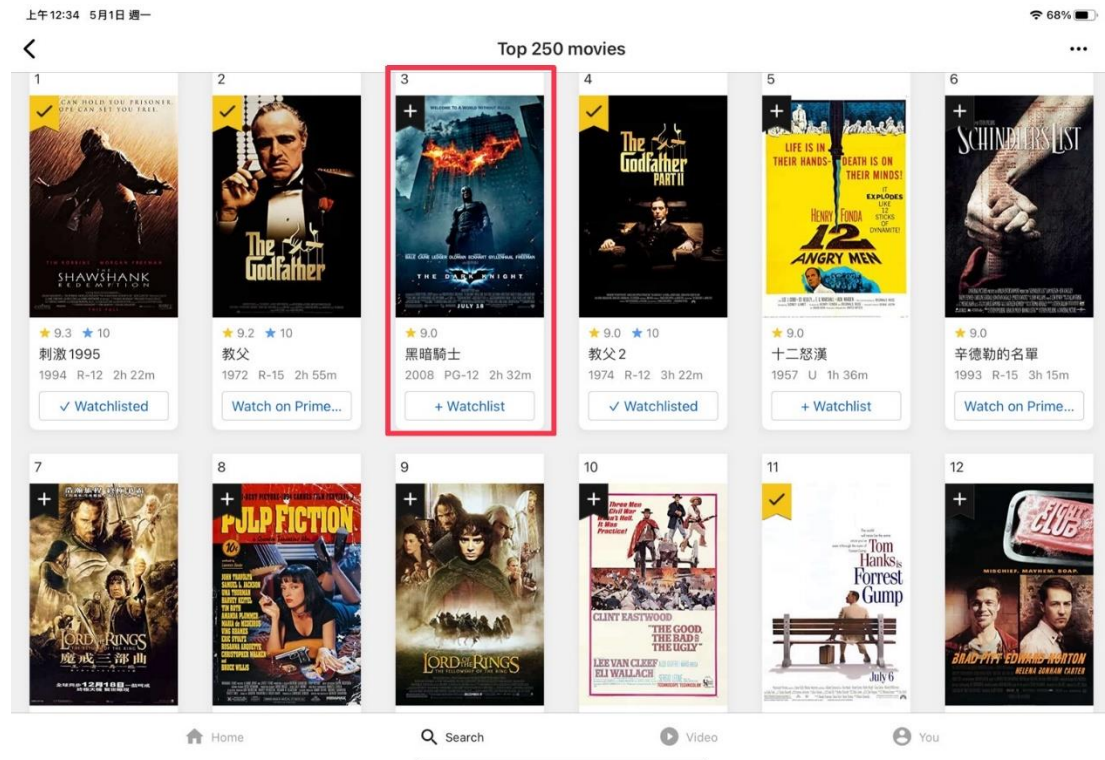
410831227 張滄昇

410831231 王冠翔

410831107 廖崑良

410931251 王俊淵

主題一：《黑暗騎士中的賽局》



IMDb(Internet Movie Database)是全球最多人使用的電影評分資料庫，其中，評分前 250 名的第三名《黑暗騎士》更是之中的經典，

本次報告會就電影中的競局理論知識下去分析：

本次報告會就電影中的競局理論知識下去分析：

1. 海盜賽局【小丑搶銀行案】

海盜賽局已於上學期報告，本次不報告

2. 囚徒困境【船隻實驗】

警方逮捕甲、乙兩嫌疑犯，但沒有足夠證據指控二人有罪。

於是警方分開囚禁兩人，並分別給他們選擇是否招供彼此，因此最後就會有 4 種結論對應到他們的懲罰為何。

警方逮捕 A、B 兩名嫌疑犯，但沒有足夠證據指控二人有罪。於是警方分開囚禁嫌疑犯，分別和二人見面，並向雙方提供以下相同的選擇：若一人認罪並作證招供對方（背叛對方），而對方保持沉默，此人即刻獲釋，沉默者將判監 15 年。若二人都保持沉默（合作），則二人同樣

判監 1 年。若二人都互相檢舉（互相「背叛」），則二人同樣判監 10 年。

		prisoner B	
囚徒困境		招供 (背叛)	沉默 (合作)
prisoner A	招供	 10年 10年	 0年 15年
	沉默	 15年 0年	 1年 1年

【有兩艘渡輪，一艘載滿著一般民眾，一艘是警備押解的囚犯船，兩艘船都被小丑裝著炸彈，但引爆自己船上炸彈的控制器都在另一艘船上。小丑透過廣播跟大家說，先把對方的船炸了，自己就安全了。或者時間到兩艘船都會被小丑炸掉。】

3. 膽小鬼賽局

兩名車手相對驅車而行。如果兩人拒絕轉彎，任由兩車相撞，最終兩人都會死於車禍；但如果有一方轉彎，而另一方沒有，那麼轉彎的一方會被恥笑為「膽小鬼」

【騎著摩托車的蝙蝠俠衝向小丑，小丑嘴巴唸著"Come on!" "Hit me!" 然後就看蝙蝠俠自己避開、摔車，然後暈過去。】

事實上，每個人都是在做對自己最佳的選擇，但到頭來，大家一起吃虧，小丑的名言

"As you know, madness is like gravity...all it takes is a little push."

競局中，為何小丑這麼有把握只要輕輕一推，是因為他把所有人放上了「必然結果」的斜坡上。在這個斜坡上，大家一定會往最糟結果的方向去滾動。

主題二：《英式奶茶就要這樣喝》

《Lady Tasting Tea》

The second part of presentation will be based on a story of **Design of Experiment (DOE)**.

Sir Ronald Fisher, who was honoured with “Father of Modern Statistics”, in the second section of his publication “The Design of Experiments”, also known as “Lady Tasting Tea”.

Back in 1920's, In Cambridge, England, there were always afternoon tea union of upper class, one day, when the servant served a phycologist **Muriel Bristol** a cup of milk tea as milk poured into the tea, she declined it, saying that she preferred the flavour when the milk was poured into the cup before the tea. Fisher sneered that the order of infusion could not affect the flavour, but Dr. Bristol insisted that it did, and she claimed that **she could distinguish the difference**, overhearing the debate, another scientist, William Roach said “Let's test her.”

Fisher proposed to **present 8 cups of tea to Dr. Bristol, 4 of each variety (milk first or tea first)**. Ideally, they should be identical in every respect except the order of pouring. He argued that the best way to present the drinks was to randomize the order. There would be **70 combinations**, but only **1** is correct. If Dr. Bristol had no ability to distinguish between the drinks, each of these 70 ways was equally probable. But her selection would be completely correct for only one of the 70 cases. So, if she had no ability to taste the difference, she had only a 1 out of 70 chance of making no errors.

At last, Dr. Bristol identified all 8 correctly, led to the conclusion that **she could distinguish the difference**.

The incident led Fisher developed “Fisher's Exact Test”, “Design of Experiments” etc.

Our presentation will focus on

1. Null Hypothesis
2. The Significance of the Test (Significance Level)
3. Confidence Interval
4. Randomisation

Extension:

1. ANOVA (Analyse of Variance)
2. Wilcoxin Sign Test
3. Rank Test

實驗設計介紹：

實驗設計(Design of Experiment ; DOE)是一種安排實驗和分析實驗數據的數理統計方法，主要是對想要進行的實驗進行合理配置，透過較小的試驗次數、較短的試驗週期和較低的試驗成本，獲得理想的試驗結果並提出科學的結論。

實驗設計三原則：

1. 隨機化:試驗中的所有試驗單位必須隨機分配 到每個位置，以避免因系統不均質以及個人主觀而產生誤差。
2. 重複性:一個實驗可以在相同的條件下，被重複操作獲得相同的結果，即使不是完全的相同，所存在的差異（實驗的誤差），也必須在一定合理的範圍內。
3. 區組性:將試驗單位依照時間、地理環境、性質等不同條件劃分為若干個較為同質的小群，可以幫助實驗者排除或降低某些已知但不重要的因子對觀測值造成影響，提升試驗的準確程度。

假說檢定：

虛無假設 H_0 ：通常設為原有的情況(現狀)；

對立假設 H_1 ：設為想要的結果。

並設犯錯機率(α)在 5%以下為一個有效的檢定。

則根據定義，

先設 H_0 ：女士沒辦法分辨倒茶的先後順序。

再設 H_1 ：女士可以分辨倒茶的先後順序。

伯努利試驗 Bernoulli Trial:

- ▶ 做一次試驗，只有成功和失敗兩種結果
- ▶ 成功($X = 1$)機率為 p ，失敗($X = 0$)機率為 $1 - p$
- ▶ 若試驗 Y 為成功機率為 p 的伯努利試驗，簡記為 $Y \sim \text{Ber}(p)$
- ▶ 例如：
 - 擲一枚硬幣，正面表示成功，反面表示失敗 ($p = \frac{1}{2}$)
 - 擲骰子，擲出6表示成功，其他表示失敗 ($p = \frac{1}{6}$)

二項式分配 Binomial Distribution

- ▶ 重複進行機率為 p 的伯努利試驗 n 次
- ▶ 若試驗 Y 為重複進行 n 次，成功機率為 p 的伯努利試驗，則 Y 為二項式分配，簡記為 $Y \sim b(n, p)$
- ▶ 機率密度函數 (n 次試驗中，成功 k 次的機率)

$$f(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{1-k}$$

例如：擲骰子6次，擲出4次5點的機率

$$f(x = 4) = \binom{6}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

X_n 代表第 n 次試驗，每次結果只有正確(1)或錯誤(0)

則 $X_n \sim \text{Ber}(0.5)$ 【0.5 為猜對機率】

隨機化檢定：

在離散的統計數據中，為使犯錯機率(α)控制在某特定值(通常為 0.05)，必須在某一點的資料做輔助性試驗，使得出來的 α 值固定

根據此題，

拒絕域：

$$CR_1: \left\{ X: \left(\sum_1^8 x_i \right) \geq 8 \right\}, CR_2: \left\{ X: \left(\sum_1^8 x_i \right) \geq 6 \right\}$$

$$\alpha_1 = P(CR_1|H_0) = \frac{1}{70} = 0.0143 \leq \mathbf{0.05}$$

$$\alpha_2 = P(CR_2|H_0) = \frac{1}{70} + \frac{16}{70} = 0.2428 \geq \mathbf{0.05}$$

結論

$$Y = (\sum_1^8 x_i) \quad \text{【} Y = \text{女士正確挑出的杯數} \text{】}$$

$Y \geq 8 \Rightarrow$ 拒絕 H_0 (女士可以分辨倒茶的先後順序)

$Y \leq 4 \Rightarrow$ 不拒絕 H_0 (女士沒辦法分辨倒茶的先後順序)

$$Y = 6 \Rightarrow \text{做輔助性實驗使得成功機率} = \frac{0.05 - 0.0143}{0.2428 - 0.0143}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= P(x \in CR|H_0) = P(Y \geq 8) + P(Y = 6, \text{success}|H_0) \\ &= 0.0143 + P(Y = 6|H_0) \times P(\text{success}|H_0) = \mathbf{0.05} \end{aligned}$$

如果女士正確拿出4杯先倒牛奶的奶茶(**8杯全答對**)，則在95%信心水準之下，女士可以分辨倒茶的先後順序。

如果女士正確拿出3杯先倒牛奶的奶茶(**錯誤取出 2 杯，答對 6 杯**)，在95%信心水準之下，需要做輔助性實驗使得成功機率

$$\leq \frac{0.05 - 0.0143}{0.2428 - 0.0143} \text{代表女士仍可以分辨倒茶的先後順序。}$$

故事的最後，根據當時在現場的人回憶，這位女士居然準確地判別了 8 杯茶！

也就是拒絕 H_0 （女士可以分辨倒茶的先後順序）

之後，費雪在他的著作【實驗設計 The Design of Experiments】敘述若做 12 杯，先倒牛奶及先倒紅茶各 6 杯的 942 種結果，又大力推廣變異數分析(Analysis of Variance ; ANOVA) 還創造了費雪真實檢定(Fisher's Exact Test)

Reference:

The Design of Experiments; Ronald A. Fisher (1935)