第七組-生成函數

410831153 張至言 411131107 洪聖評 411131115 吳杰翰 411131124 陳翊翎 411131135 謝宏輝

前言:

生成函數（Generating function）是在組合數學和數學分析中使用的一種工具，用於研究序列或集合中的元素的性質。生成函數提供了一種序列或集合中的元素與一個或多個變量相關連的方式，從而允許我們通過數學操作來研究它們的性質。生成函數通常用形式冪級數表示，其中每個係數對應於序列或集合中的元素。這些係數可以是實數、複數或其他數學對象，具體取決於所研究的問題，生成函數的變量通常表示序列或集合中的元素的位置或大小。

三大生成函數:

1、普通生成函數（Ordinary Generating Function，OGF）：用於描述離散序列，其中變量表示序列中的位置。例如，如果我們有一個序列 {a_0, a_1 , a_2 , ...}，那麼它的普通生成函數可以表示为：G(x) = $a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots$.

2、指數生成函數（Exponential Generating Function，EGF）：用於描述有序集合，其中變量表示集合中元素的大小。指數生成函數通常用於組合數學中的問題，如排列和組合。例如，如果我們有一個集合 {a_0, a_1 , a_2 , ...} ，那麼它的指數生成函數可以表示為：G(x) = $a_0 + a_1 x^1 + a_2 (x^2 /2!) + \ldots$

3、拉普拉斯生成函數（Laplace Generating Function）：用於描述連續序列或集合，其中變量表示連續變量的取值。拉普拉斯生成函數通常用於概率論和統計學中的問題。例如，如果我們有一個連續序列 {a(t) | t >= 0}，那麼它的拉普拉斯生成函數可以表示為：G(s) = $\int [0,\infty]$ a(t) ＊ $e^{(-st)}\, dt$

問題一:

目前台幣的發行一共有一元、五元、十元、五十元四種銅板，現在若把 一張百元鈔票換成全部是銅板，一共有多少種不同的方法？

（註） 如果我們把問題想成：用銅板來湊成 k 元的方法數為 a_k ，則我們是在求 a_k ，下列為一些簡單的數據。

$a_0=1$, $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=1$, $a_4=1$, $a_5=2$, $a_6=2\cdots$

$\underline{0}\quad \underline{1}\quad \underline{1\ \ 1}\quad \underline{1\ \ 1\ \ 1}\quad \underline{1\ \ 1\ \ 1\ \ 1}\quad \cdots$

$\underline{0}\quad \underline{5}\quad \underline{5\ \ 5}\quad \underline{5\ \ 5\ \ 5}\quad \underline{5\ \ 5\ \ 5\ \ 5}\quad \cdots$

$\underline{0}\quad \underline{10}\quad \underline{10\ \ 10}\quad \underline{10\ \ 10\ \ 10}\quad \underline{10\ \ 10\ \ 10\ \ 10}\quad \cdots$

$\underline{0}\quad \underline{50}\quad \underline{50\ \ 50}\quad \underline{50\ \ 50\ \ 50}\quad \underline{50\ \ 50\ \ 50\ \ 50}\quad \cdots$

在上面圖 1 中，我們將在每一列各選一堆（劃底線），若以一個 χ 代表一元，則可以轉成下式：

$$\left(1+x+x^2+\cdots\right)\left(1+x^5+x^{10}+\cdots\right)\left(1+x^{10}+x^{20}+\cdots\right)\left(1+x^{50}+x^{100}+\cdots\right) \quad (1)$$

如果把（1）式化成 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 的形式，則 a_k 為所求。

在這裡 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 為一**冪級數**（Power series）。不過為了便於生成函數的研究，下面假設是必要的。

（假設） $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 在 x 點收斂。

令數列（ a_k ）為實數數列，函數 $G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ，稱為該序列的**生成函數**(generating function)。

我們不難發現（1）式可以寫成 $\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^{10}}\cdot\frac{1}{1-x^{50}}$

為了求問題 1 的解，我們假設

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$
$$\frac{1}{(1-x)(1-x^5)}=\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$$
$$\frac{1}{(1-x)(1-x^5)(1-x^{10})}=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^x$$
$$\frac{1}{(1-x)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{50})}=\sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n$$

$$A_n=B_n=C_n=D_n \ ,\ \forall n<0$$

由於

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \left(1-x^5\right)\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^{n+5}$$

因此

$$A_n = B_n - B_{n-5} \qquad (2)$$

換言之

$$B_n = A_n - B_{n-5} \qquad (3)$$

$$C_n = B_n - C_{n-5} \qquad (4)$$

$$D_n = C_n - D_{n-50} \qquad (5)$$

由（3），（4），（5）及 $A_n = 1$， $\forall n \geq 0$， $B_0 = C_0 = D_0 = 1$，我們可以求得 D_{100} 即為問題 1 的答案。

整數的分割:

在整數的分割問題中可分為整數(有序)分割問題和整數(無序)分割兩種問題，它們分別對應著『分配』問題和『組合』問題。

	分割情況	分割方法數	P(n)
1	1	1	P(1)
2	2，1+1	2	P(2)
3	3，2+1，1+1+1	3	P(3)
4	4，3+1，2+2，2+1+1，1+1+1+1	5	P(4)
$p(n)$ 5	5，4+1，3+2，3+1+1，2+2+1，2+1+1+1，1+1+1+1+1	7	P(5)

整數分割問題:

一個數 n 分成任意多個正整數的方法記為 $p(n)$

一個數 n 分成任意 k 個整數的方法記為 $p_k(n)$

4=1+1+1+1=2+1+1=2+2=3+1

$p(4)=5, p_4(4)=1, p_3(4)=1, p_2(4)=2, p_1(4)=1$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42
$p_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$p_2(n)$	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
$p_3(n)$	0	0	1	1	2	3	4	5	7	8
$p_4(n)$	0	0	0	1	1	2	3	5	6	9

以 6 的分割成 3 份為例：

有出現 1：6=1+x+y，x+y=5 的方法為 $p_2(5)=2$

沒有出現 1：6=(1+x)+(1+y)+(1+z)，x+y+z=3 的方法為 $p_3(3)=1$

所以 $p_3(6)=p_2(5)+p_3(3)$=2+1=3

公式為 $p_k(n)=p_{k-1}(n-1)+p_k(n-k)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42
$p_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$p_2(n)$	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
$p_3(n)$	0	0	1	1	2	3	4	5	7	8
$p_4(n)$	0	0	0	1	1	2	3	5	6	9

整數分割問題 $p(n)$，可以想成下式展開中 x^n 的係數：

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)\ldots(1+x^n+x^{2n}+\ldots)$$

1　1+1　2　2+2　3　3+3

例如：$p(4)=5$，4=1+1+1+1=2+1+1=2+2=3+1

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^2+x^4)(1+x^3)(1+x^4)$$

$$1\cdot1\cdot1\cdot x^4+x^4\cdot1\cdot1\cdot1+x^2\cdot x^2\cdot1\cdot1+1\cdot x^4\cdot1\cdot1+x\cdot1\cdot x^3\cdot1+\ldots=5x^4+\ldots$$

0+0+0+4　(1+1+1+1)+0+0+0　(1+1)+2+0+0　0+(2+2)+0+0　1+0+3+0

整數分割問題 1:

請將 8 分成不同整數的和有幾種方式？(6 種)

8= 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4

$$(1+x+\cancel{x^2+x^3}+\ldots)(1+x^2+\cancel{x^4+\ldots})(1+x^3+\cancel{x^6+\ldots})\ldots(1+x^n+\cancel{x^{2n}+\ldots})$$

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^n)$$

所以要將 8 利用生成函數分成不同整數

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)(1+x^8)\ldots$$

$$=1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+\ldots$$

整數分割問題 2:

請將 20 顆球分到 5 個不同的箱子裡，但箱子裡最少要有 2 顆球，最多只能有 7 顆球，請問有幾種方式？

$$(x^2+x^3+\ldots+x^7)^5$$

5 個不同的箱子

最少 2 顆球　　最少 7 顆球

$$=x^{10}(1+x^2+x^3+x^4+x^5)^5$$

$$=x^{10}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^5$$

$$=x^{10}(1-x^6)^5(1-x)^{-5}$$

資料來源:

1.一般生成函數之應用 - 中央研究院

https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d323/32302.pdf

2.生成函數（Generating functions)

https://stat.nuk.edu.tw/cbme/discrete/disc_math/ch4.pdf