數學解題方法
--期末報告

第八組

411131136 侯逸樺 / 411131118 董奕寬
411131114 林進暄 / 411131126 李霖嘉
411131138 侯卉榛 / 411031146 楊煥宇

主題:摺紙

- 歷史
- 基礎定理
- 摺痕特點
- 芳賀定理
- 手作環節
- 延伸:黃金比例

摺紙

- 前言:說到摺紙你會想到甚麼？or有甚麼感覺？
- 摺紙的歷史？
- 摺紙X數學
- 手做時間！(正三角形/正五邊形/正六邊形/正八邊形)

說到摺紙你會想到甚麼？or有甚麼感覺？

包禮物會用到

想念故人

紙星星

有時過節會看到

數學課會看到

千變萬化

很多很厲害的作品！

美術課

很無聊？

很花時間？

紙鶴

拜拜會看到

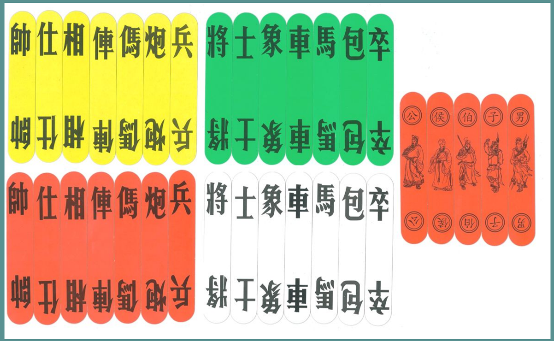
很簡單？

紙蓮花

摺紙的歷史？

紙是東漢的蔡倫發明的，似乎理當認為摺紙起源於中國。

摺紙在中國民間，常用金銀紙摺成蓮座狀作為祭祀用。現在也有用四色牌等素材作成各種立體作品。



摺紙的歷史？

其實，較多的文獻推測，比較貼近當下摺紙藝術的形式該是起源於日本始於平安時代的說法佔據主流，但也有存疑的，認為其始於日本十四世紀的禮儀包裝。後來經日本摺紙創作家吉澤章加以改良，使之創新。吉澤章開創了許多現代摺紙技術。

摺紙的歷史？

摺紙在歐洲，有認為是餐巾摺疊的延續。

西方的摺紙藝術在19世紀以前和東方是各自獨立發展的。早在18世紀，法國人提出了將摺紙加入孩童的學校教育課程內，到了19世紀，德國教育家Friedrich Froebel也提出了類似的概念，強調用摺紙概念教導兒童學習數學

摺紙的歷史？

在墨西哥和中美洲地區, 也存在著傳統的紙工藝, 其中就有運用到了摺疊的技法。

Hundreds of Years Later~

現今摺紙&應用

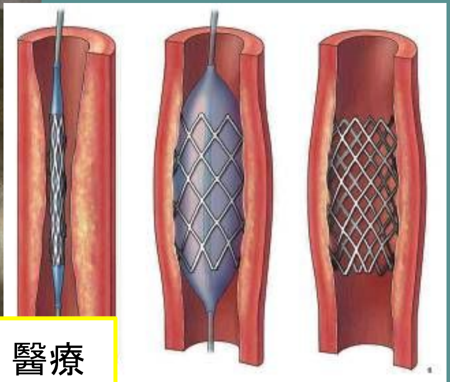
電影角色

遊戲角色

航空

建築

小動物

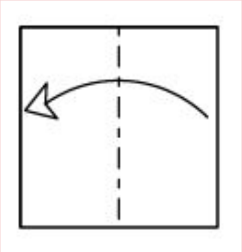


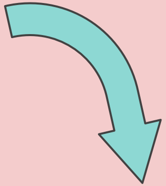
醫療

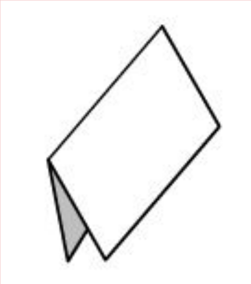
基礎摺紙定理

定義:將紙張(不論材質)(盡量)只透過摺疊來創造出各種形狀或花樣

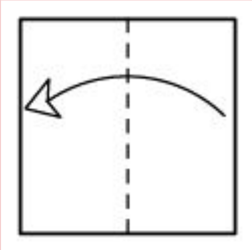
基本折法:



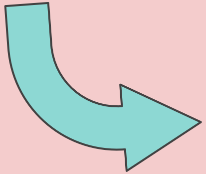




山線



谷線



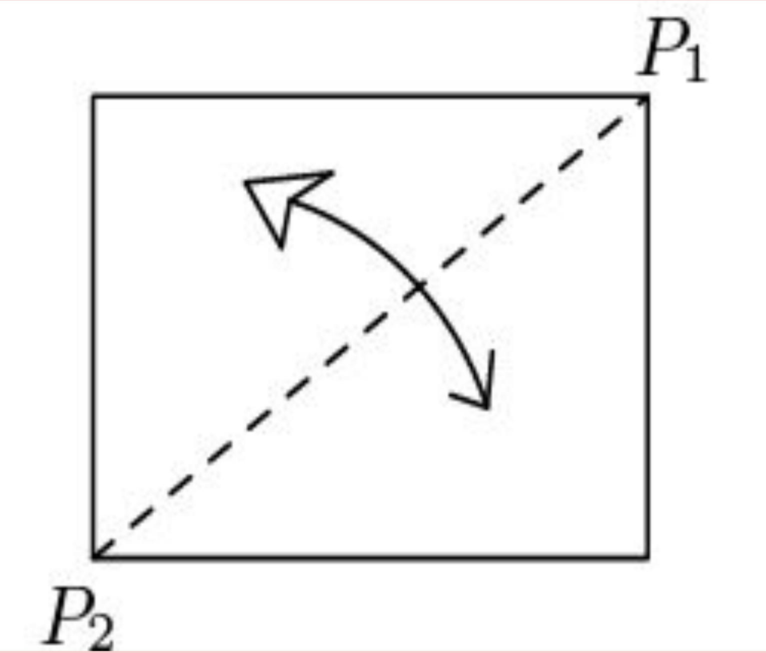
摺紙7公理

- 摺紙界稱之為HuzitaAxioms。
- 1991年由日裔義大利數學家藤田文章（Humiaki Huzita）報告前六條
- 第七條於2001年由羽鳥公士郎發現
- 羅伯特·朗證明這七個公理已是摺紙幾何的全部公理

公理 1

已知兩點 P1 和 P2，可以摺一條唯一的摺痕通過它們。

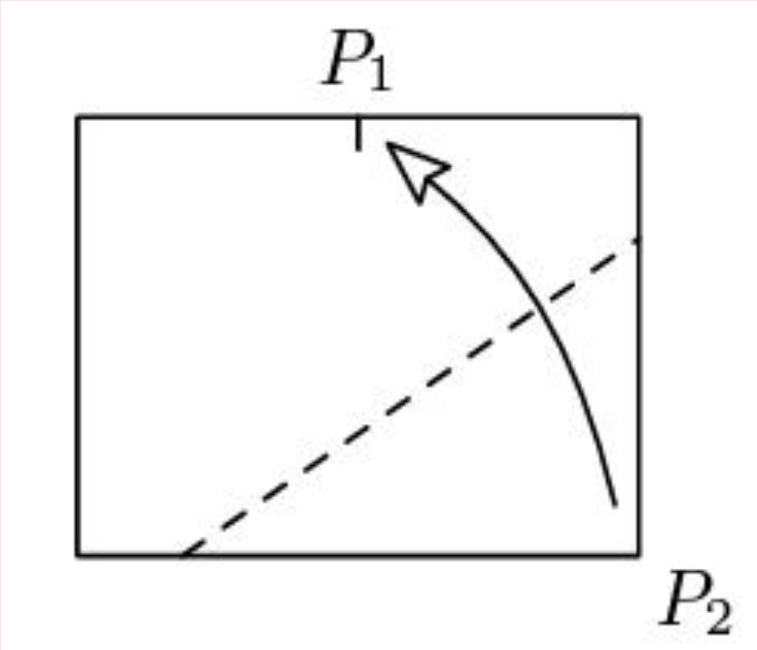
保證兩點之間可作直線。



公理 2

已知兩點 P1 和 P2，可以透過一次唯一的摺疊使它們重合。

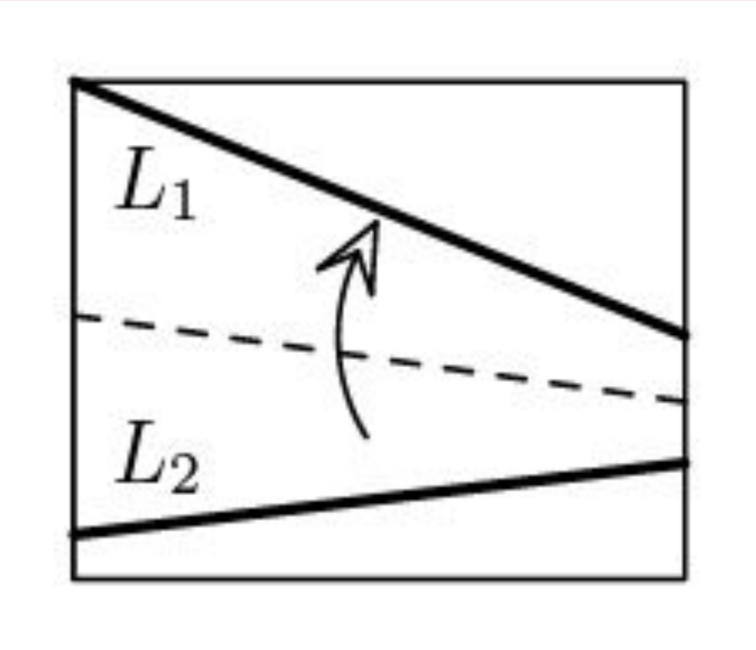
保證可找到兩點間之線段的垂直平分線。



公理 3

已知兩線段 L1 和 L2，可以透過一次的摺疊使它們重合。

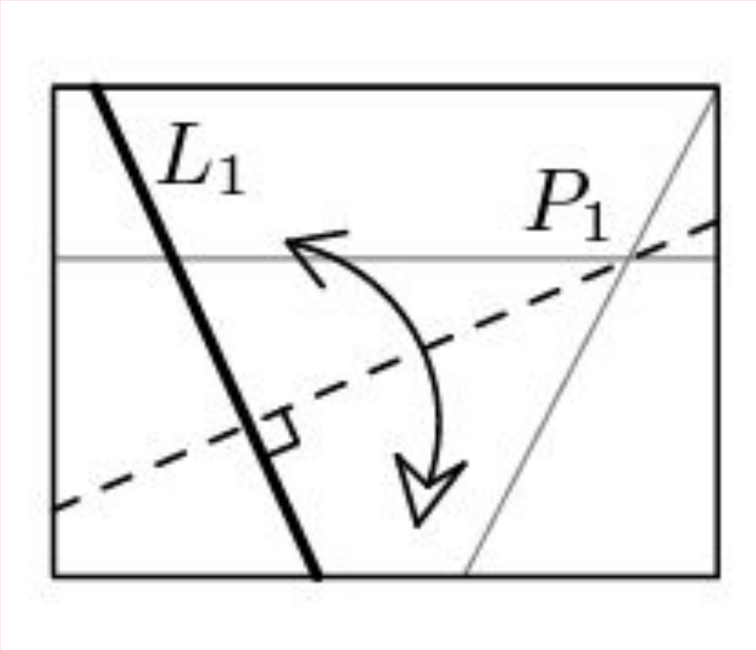
保證可找到角平分線。



公理 4

已知點 P1 和線段 L1, 可以作唯一的摺痕通過 P1 並和 L1 垂直。

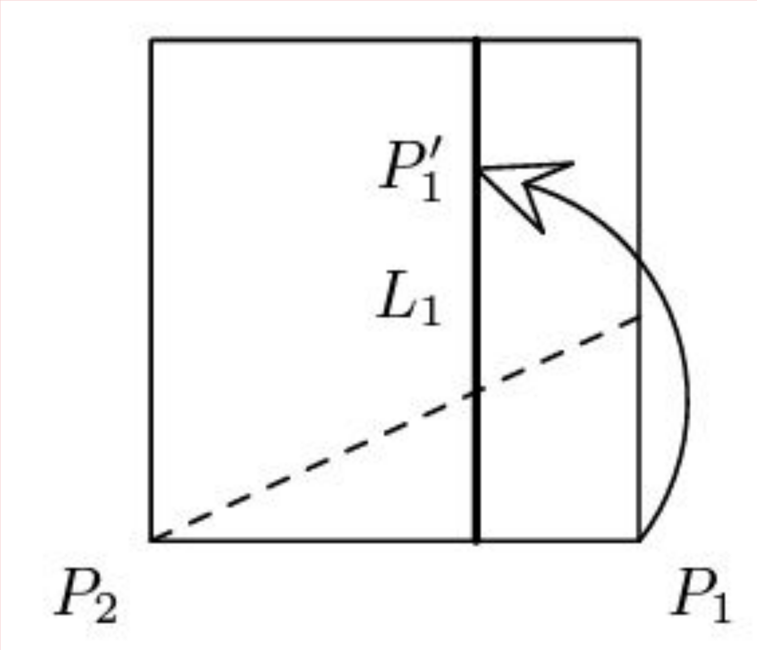
保證可過一點作直線垂直一 已知直線



公理 5

已知兩點 P1 和 P2 和線段 L1，可以透過一次的摺疊使 P1和 L1 重合並且令摺痕通過 P2。

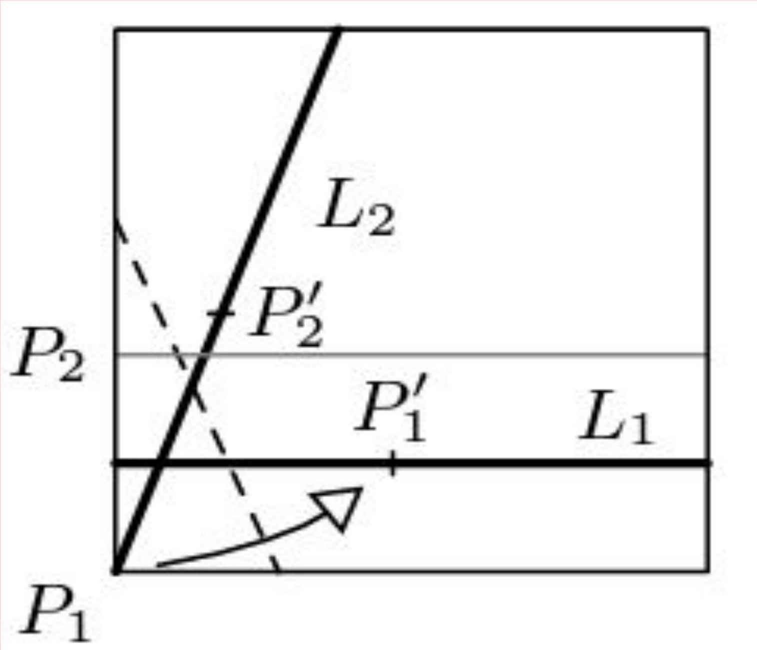
以 P2 為圓心，以 P1P2 為半徑作弧和 L1 相交。



公理 6

已知兩點 P1 和 P2 並兩線段 L1 和 L2, 可以透過一次的摺 疊使 P1 和 P2 分別和線段 L1 和 L2 重合。

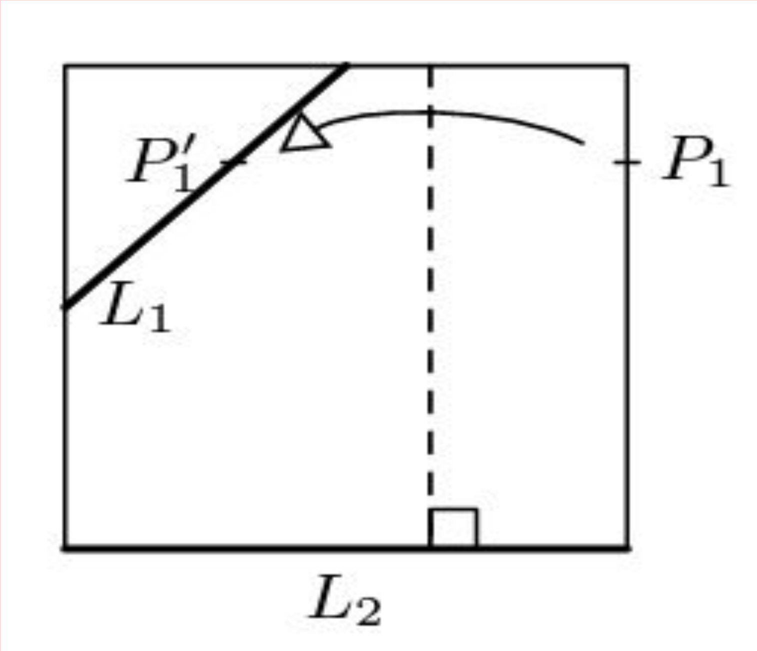
可幫助角度作到等分。



公理 7

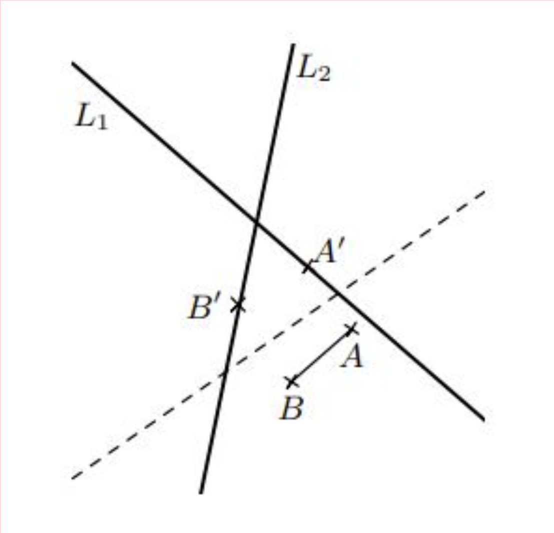
已知點 P1 並兩線段 L1 和 L2,
可以透過一次唯一的摺疊使 P1
和 L1 重合並使摺痕垂直 L2 。

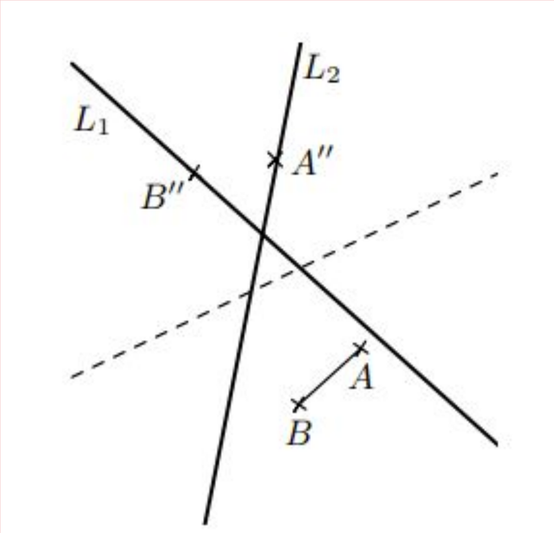
平行 L2 並穿過 P1 的直線會和
L1 相交。



摺紙7公理並不具嚴謹性，有些情況有時有多於一個可能的摺法，也有些時候沒有解。

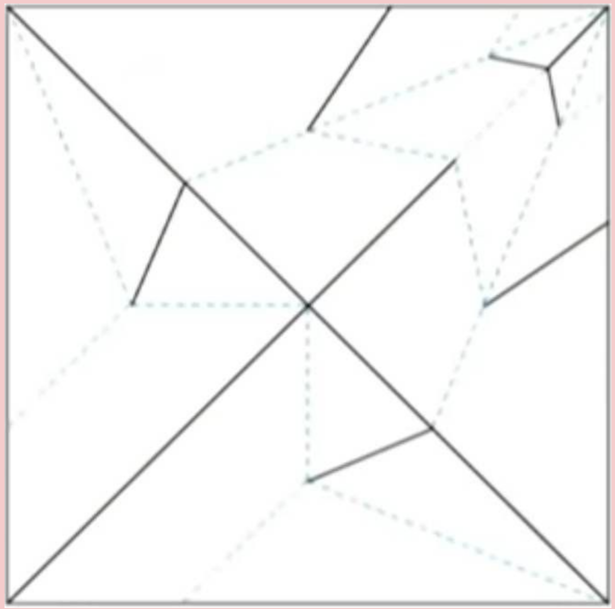
例：透過一次摺疊，使兩點 A 和 B 與 L1 和 L2 重合。





摺痕特點1—前川定理:

在任何一個頂點摺出線時山摺線和谷摺線的數量永遠相差2(輔助線不計)



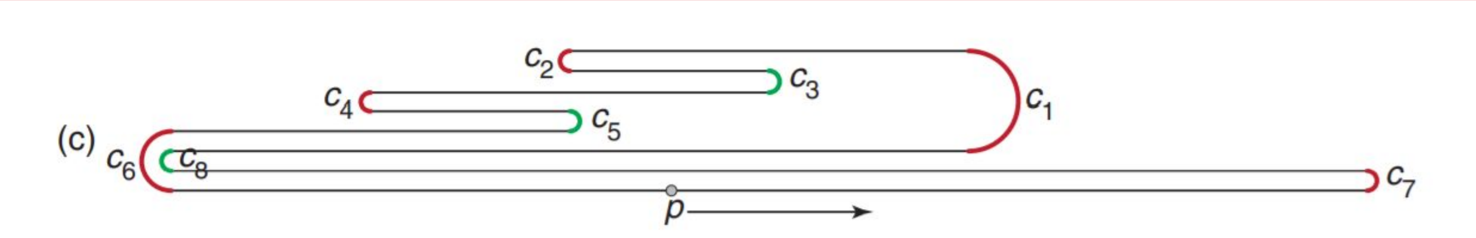
證明

3.由下往上看可以發現圓環形成了一個閉合迴路(圖c)。

4.由p點出發，遇到山摺旋轉180°，遇到谷摺旋轉-180°，最終共旋轉360°返回原點。即：

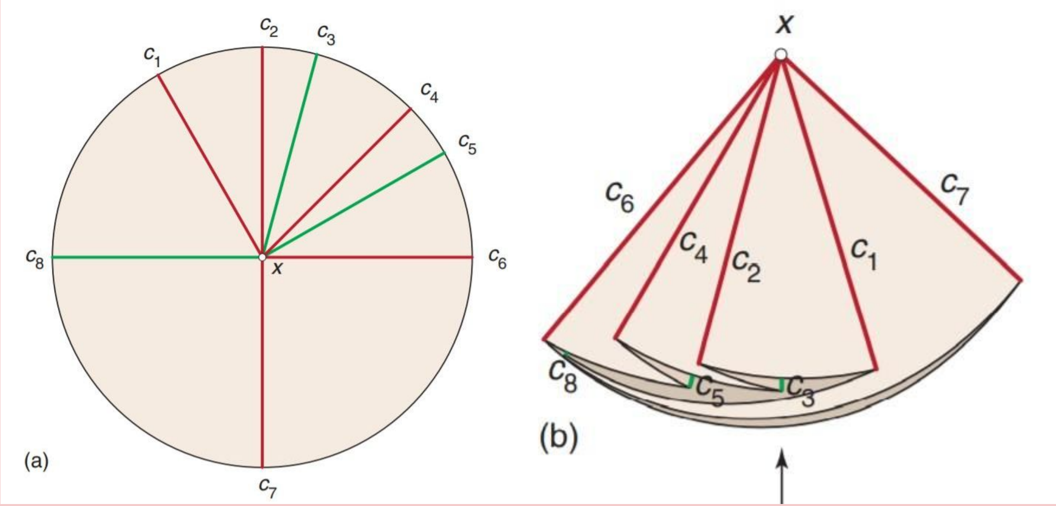
$M*180°+V*(-180°)=360°=>M-V=360°/180°=2$

5.從另一面看，原山摺變成谷摺，原谷摺變成山摺，會得到V-M=2。。



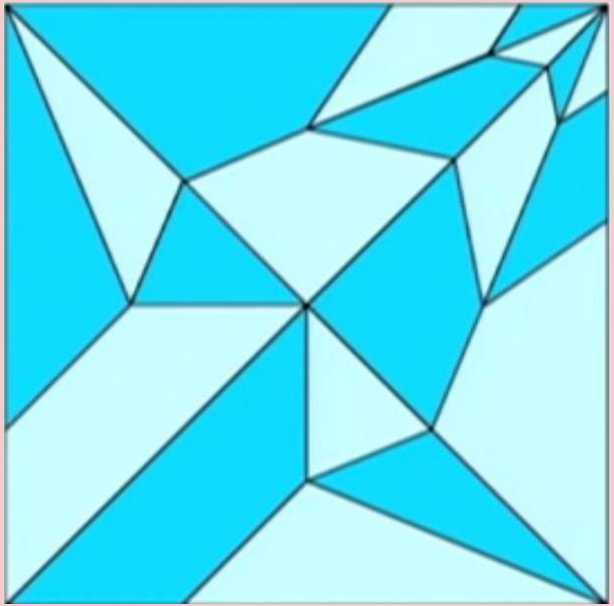
證明

1. 以X為圓心做圓(圖a)
2. 按摺痕折成圖b



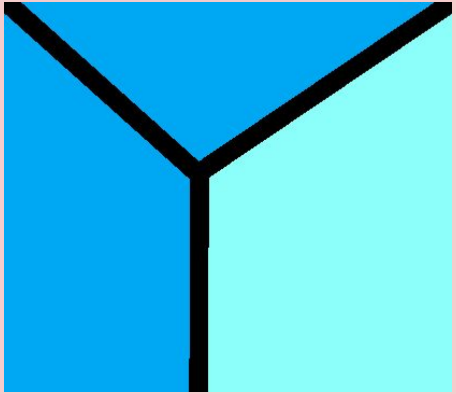
摺痕特點2—雙色法則:

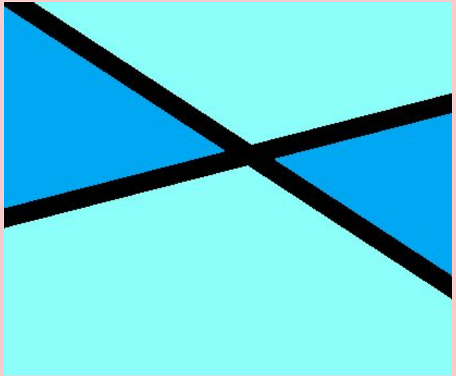
在任何一張圖上都可以用兩種顏色來上色且相同顏色不會相鄰。



證明

根據下圖，我們可以發現，當每個頂點的摺線為奇數時，就可以只用兩種顏色進行填色



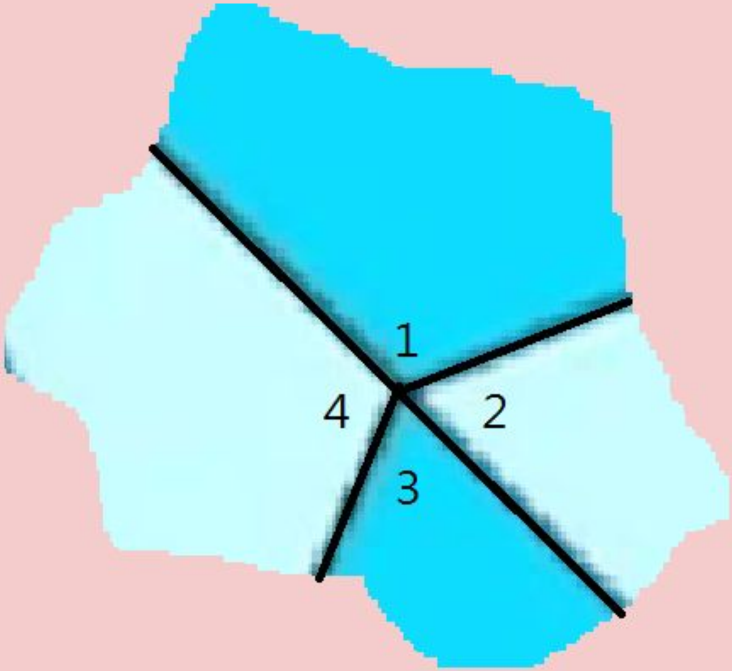


證明

根據前川定理，我們可以設山摺線數量為n條，谷摺線為$n\pm2$條，數量相加即為$2n\pm2$條，所以摺痕圖上的每個頂點的摺線皆為奇數，即代表可以用兩種顏色來上色且相同顏色不會相鄰。

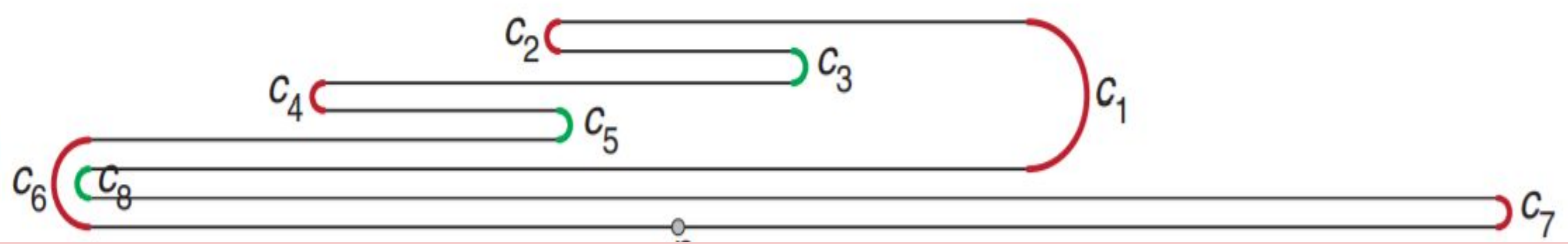
摺痕特點3—角的組合：

將圍著頂點的角進行編號，奇數角加起來為平角(偶數角同理)



摺痕特點4—層次堆疊：

不論如何摺疊紙張永遠不
能穿透摺痕

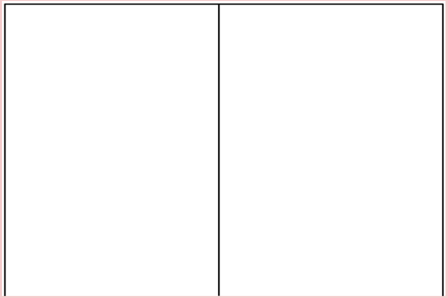


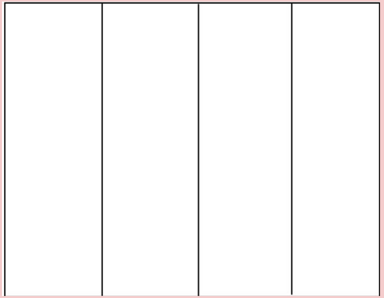
等分矩形

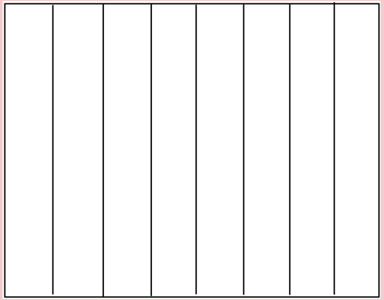
是否可將任一矩形紙張以折疊來分成任意n等分$(n\in R)$？

我們已知二等分、四等分.....2^n等分皆容易達成。

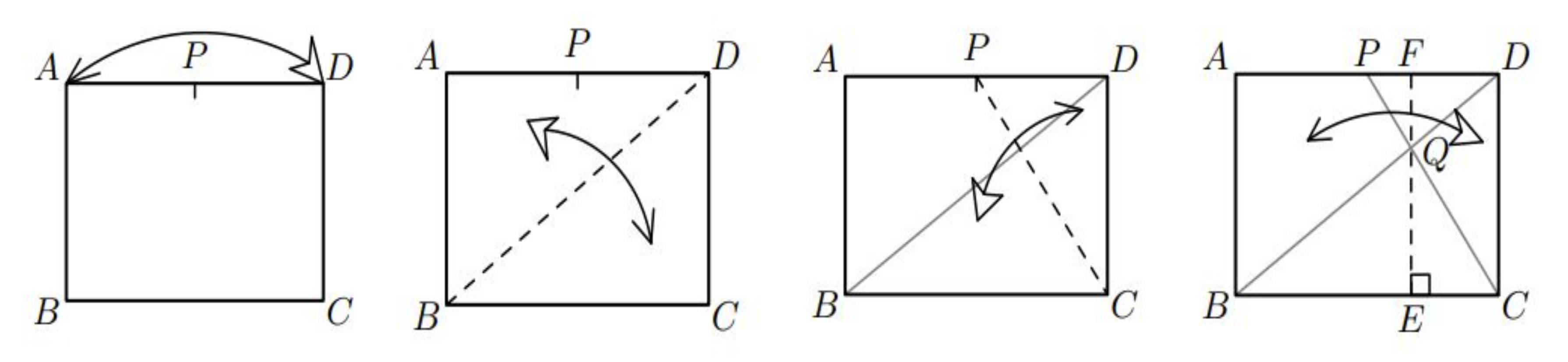
那其他比例可以嗎？例如，可否把一張紙分為三等分呢？



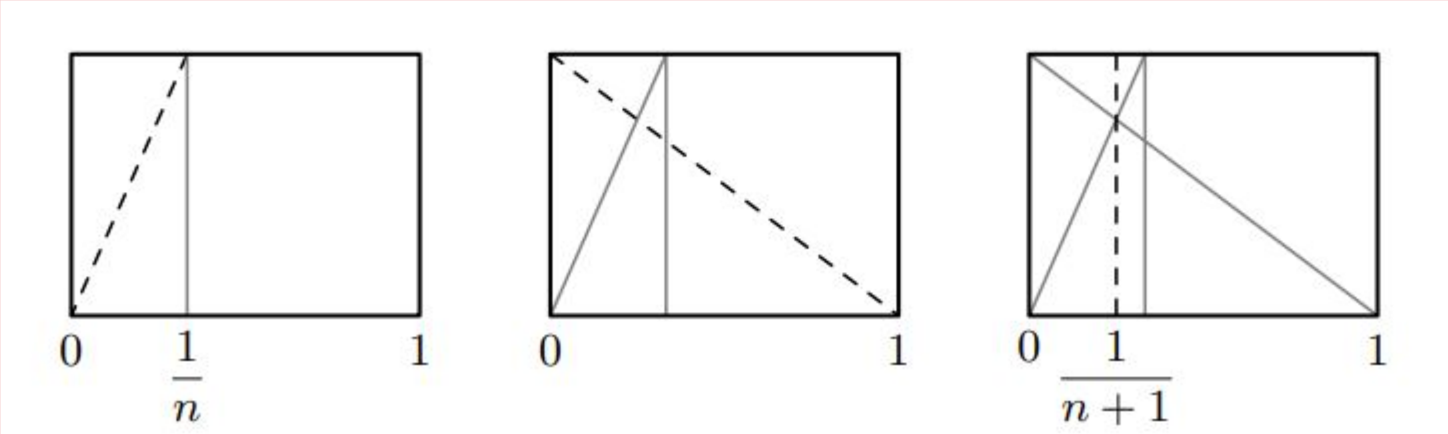




以三等分為例：

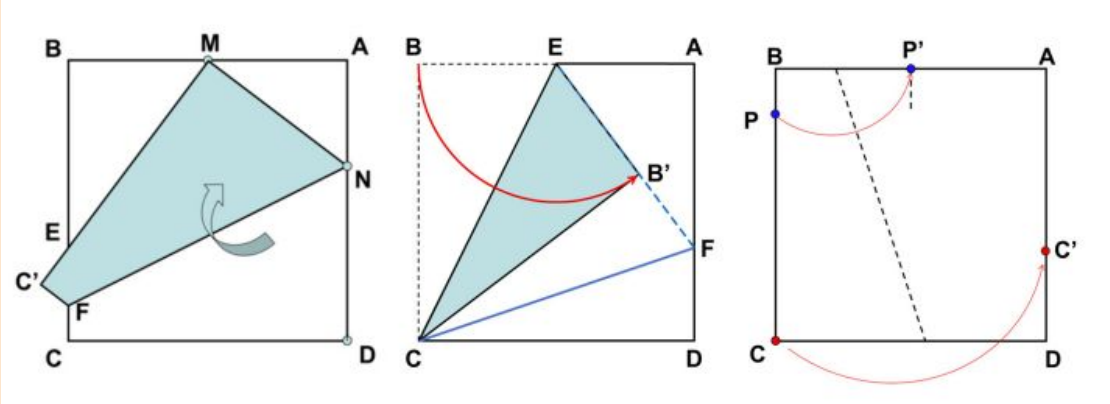


透過相似三角形和數學歸納法來推導，從兩等分可得三等分、三等分可得四等分……，因此任意n等分(n∈R)皆可皆可做到等分摺疊。



芳賀定理

日本筑波大學生物學教授芳賀和夫(**Kazuo Haga**), 在等待實驗結果的時候喜歡用摺紙打發時間, 並在實作的過程中發現了方賀三大定理, 此三定理可以不同方式找到正方形邊上的三等分點。

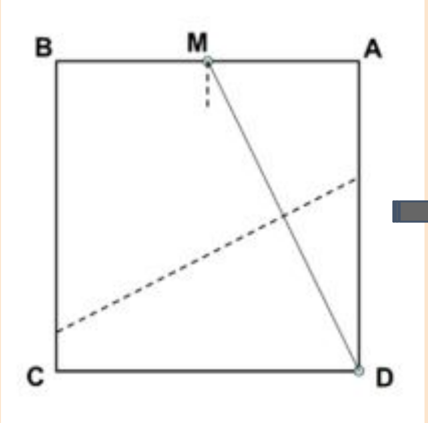


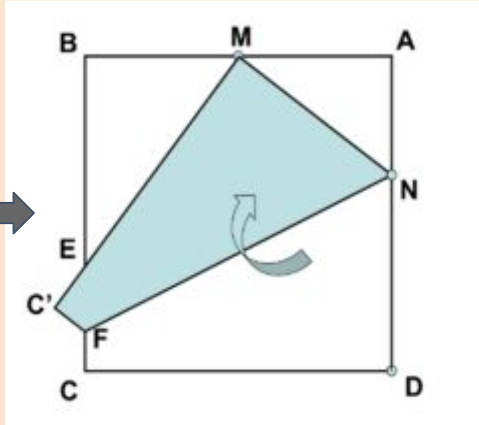
分別代表正方形色紙 ABCD中將各頂點或邊上的點摺至上方中點(M、E、P'), 則所得的E、F與 C'點均為色紙邊長的三等分點。

芳賀第一定理

把正方形紙 ABCD 的一邊AB對摺，打開得到中點 M，再把點 D 摺向 M。我們可以得到以下結果：

$$\overline{AN} : \overline{AM} : \overline{MN} = 3 : 4 : 5$$
$$\overline{ME} : \overline{EC'} = 5 : 1$$
$$\overline{BE} : \overline{EC} = 2 : 1$$
$$\overline{BF} : \overline{FC} = 7 : 1$$

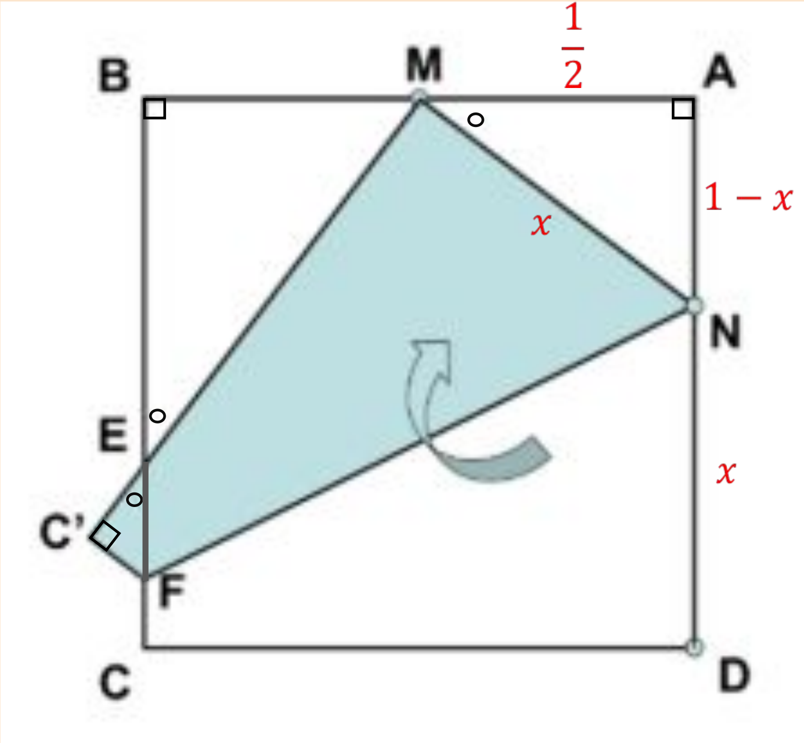




且當$\overline{AM}$為任意n等分點時，$\overline{AN} : \overline{AM} : \overline{MN}$必為勾股數比例。

https://www.geogebra.org/m/h4jqym6r?fbclid=IwAR39r4nLf97kXz592DIFXNLPnimf4alFLjooxhmBJbKm9-abyQsTrEJPJkE

芳賀第一定理



設正方形 ABCD 邊長為1，

$\overline{ND} = x = \overline{NM}$，$\overline{AN} = 1 - x$，$\overline{AM} = \frac{1}{2}$

在△AMN中，可列式$x^2 = (1-x)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

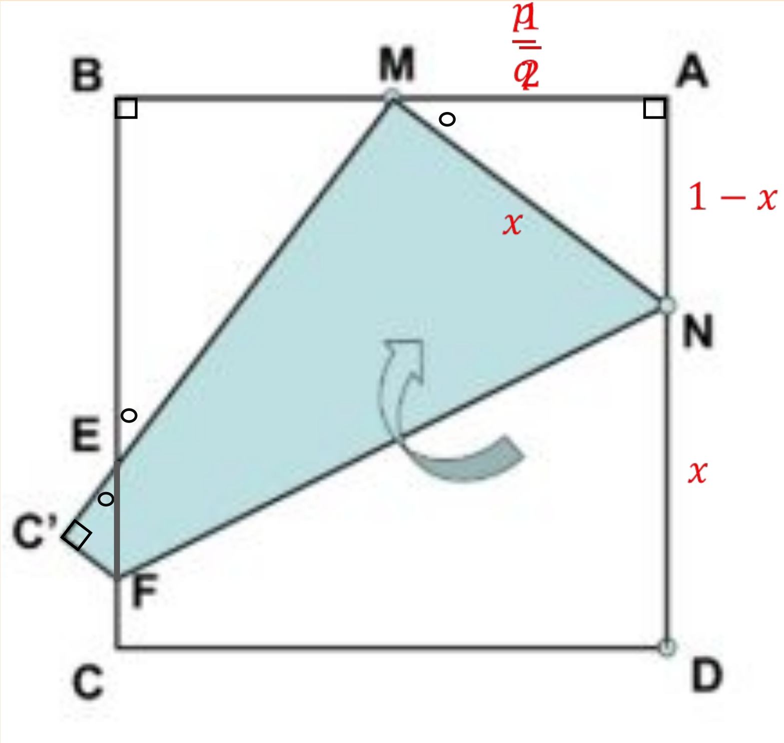
解方程式後，$x = \frac{5}{8}$

且 $\overline{AN} : \overline{AM} : \overline{NM} = \frac{3}{8} : \frac{4}{8} : \frac{5}{8} = 3 : 4 : 5$

之後可從相似三角形關係去求$\overline{BE}$、$\overline{CF}$、$\overline{EF}$的比例關係

以此得到$\overline{BE} : \overline{EC} = 2 : 1$

芳賀第一定理



在M非$\frac{1}{2}$等分點時，$\overline{AN}:\overline{AM}:\overline{NM}$為何同是畢氏三元數？

與$\overline{AM}=\frac{1}{2}$時同理，假設$\overline{AM}=\frac{p}{q}$，$p$、$q\in\mathbb{N}$

則式子改為 $x^2=(1-x)^2+\left(\frac{p}{q}\right)^2$

解方程式後，$x=\frac{q^2-p^2}{2q^2}$

此時 $\overline{AN}:\overline{AM}:\overline{NM}=\frac{q^2-p^2}{2q^2}:\frac{p}{q}:1-\frac{q^2-p^2}{2q^2}$

$=q^2-p^2:2pq:q^2+p^2$

由此可知，只要$\overline{AM}$是有理數，則△AMN的三個邊長的比例必然是畢氏三元數。

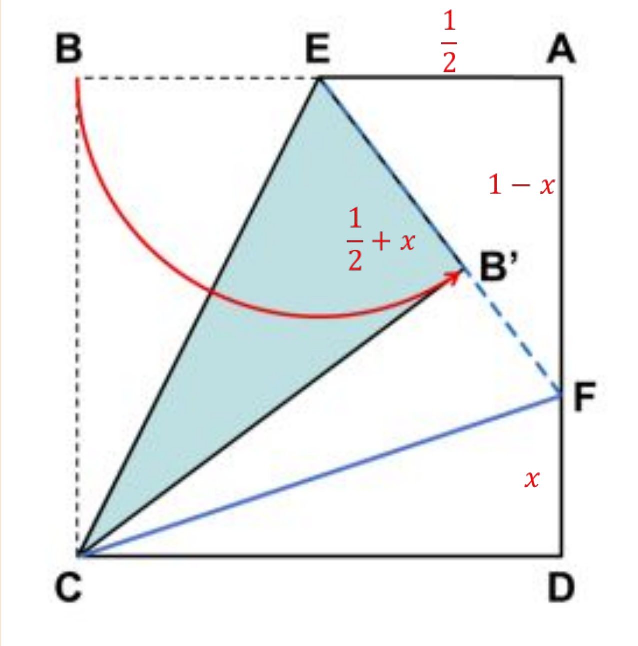
芳賀第二定理

在正方形紙 ABCD 中，將 $\overline{\mathbf{AB}}$ 對摺在中點 E 作摺痕，接著把端點 C、E 連線將 B 往右下摺得 B' 點， 設 $\overline{\mathbf{EB'}}$ 的延長線摺出和 $\overline{\mathbf{AD}}$ 的交點為 F，則 $\overline{\mathbf{AF}}:\overline{\mathbf{FD}}=2:1$。

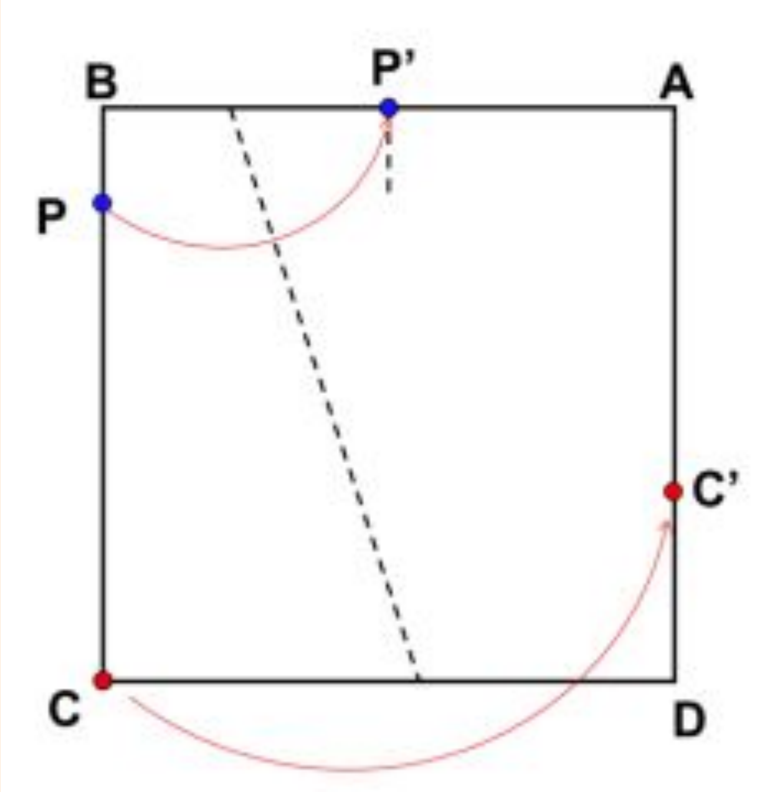
因為 $\overline{\mathbf{B'F}}=\overline{\mathbf{DF}}$

設正方形 ABCD 邊長為1，$\overline{\mathbf{DF}}=x$ ，$\overline{\mathbf{EF}}=\frac{1}{2}+x$

則可得 $\overline{\mathbf{AF}}:\overline{\mathbf{FD}}=2:1$

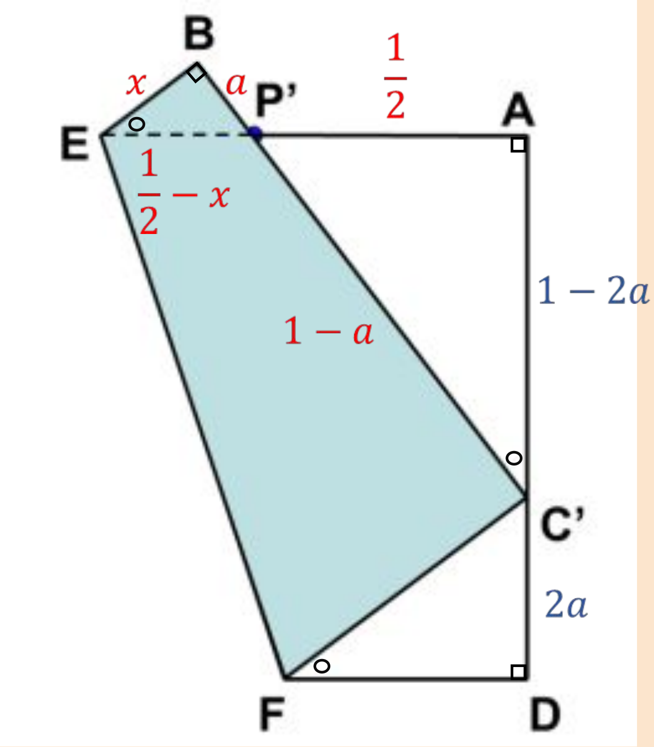


芳賀第三定理



在正方形色紙上方取中點 P'，接著將左方邊上的 C 點摺至右側邊上 C' 點，且此時 P' 點恰與 $\overline{BC}$ 上一點 P 重合，則右側的 C' 點即為邊長 $\overline{AD}$ 的三等分點。

芳賀第三定理



設正方形 ABCD 邊長為1，$\overline{BE}$=x，$\overline{P'B}$=a

可得知$\overline{P'E} = \frac{1}{2} - x$，$\overline{P'C} = 1 - a$

由於$\overline{BE} + \overline{P'E} = \frac{1}{2}$且$\overline{FC'} + \overline{FD} = 1$

可推得$\overline{C'D} = 2a$和 $\overline{C'A} = 1 - 2a$(△P’BE~△P’AC’)

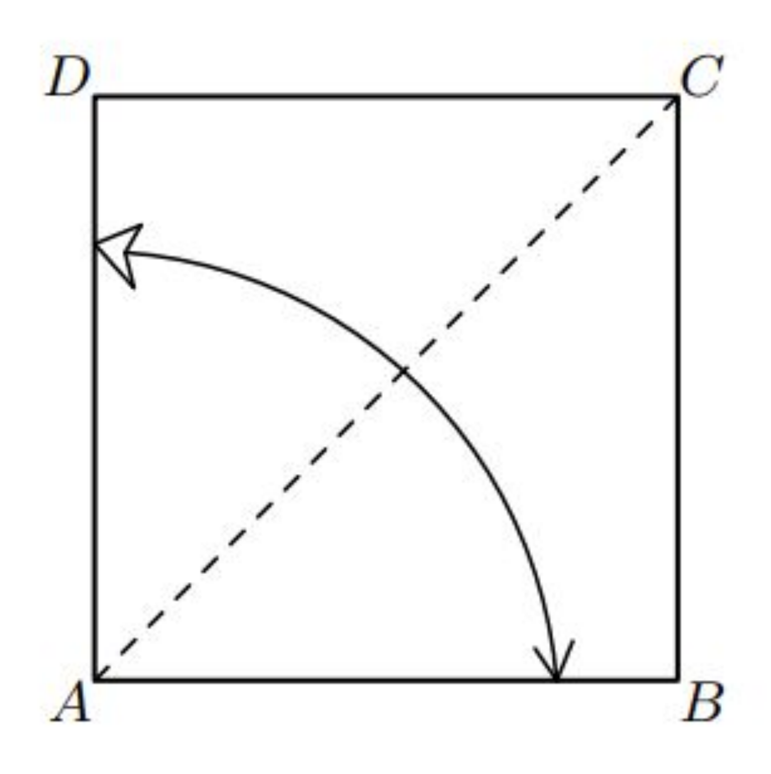
在△P’BE中，$(\overline{P'C})^2 = (\overline{C'A})^2 + (\overline{P'A})^2$

$$\Rightarrow (1-a)^2 = (1-2a)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

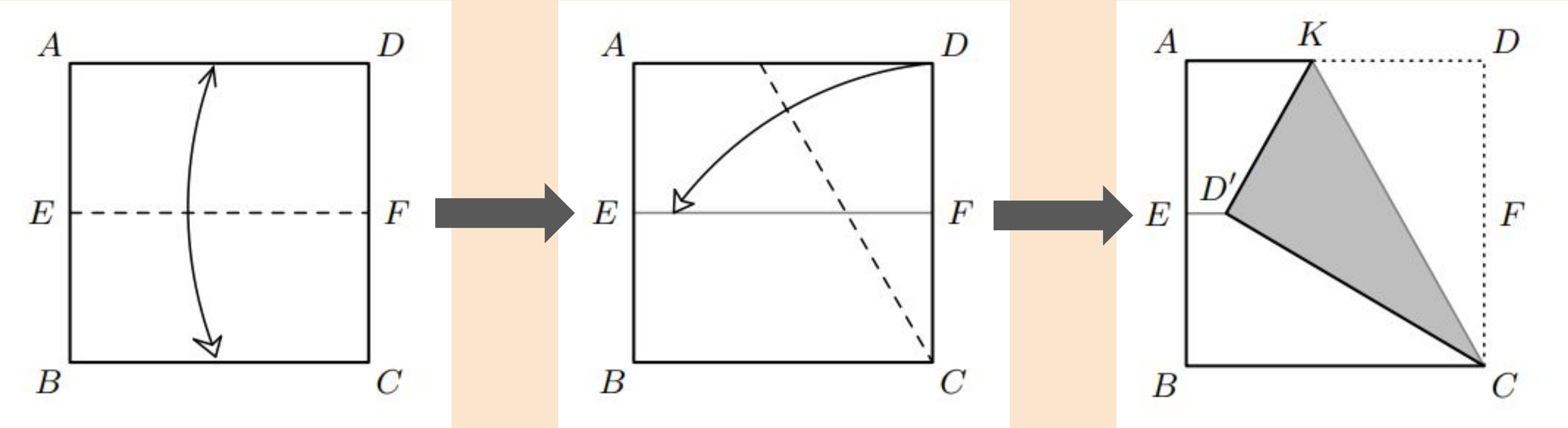
解方程式後、$a = \frac{1}{6}$，即$\overline{C'D} = \frac{1}{3}$為邊長$\overline{AD}$的三等分

摺出角度

摺45度

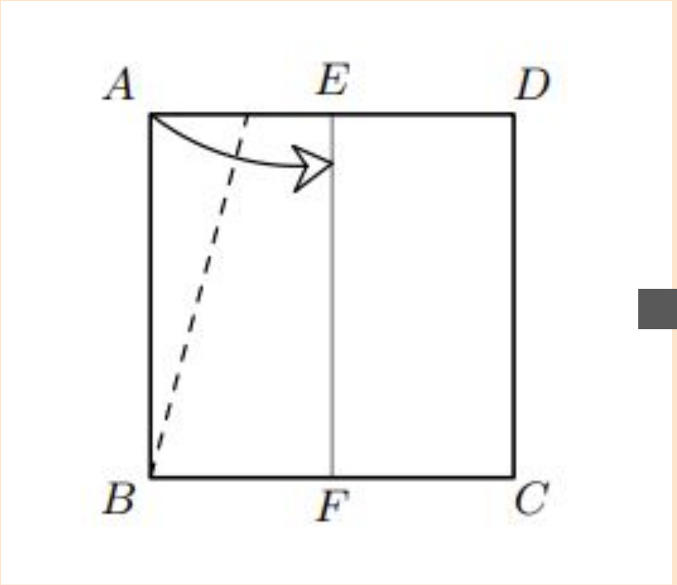


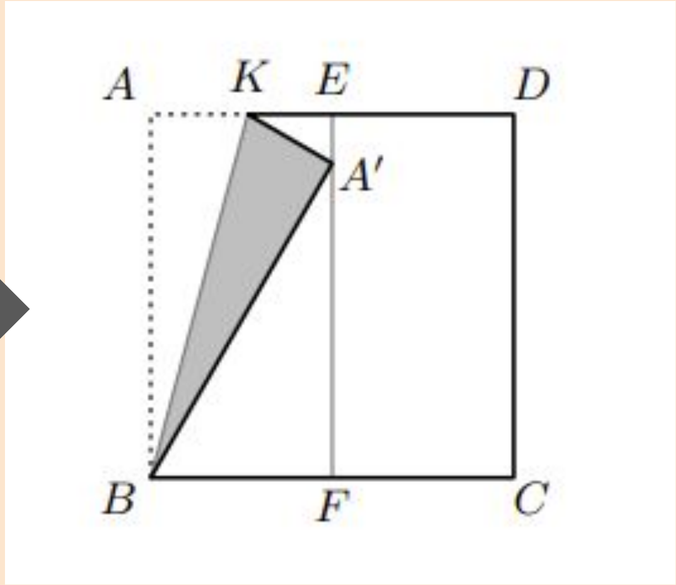
摺30度、60度



$\angle KCD' = 30^\circ$ 、 $\angle KCB = 60^\circ$

摺15度、75度

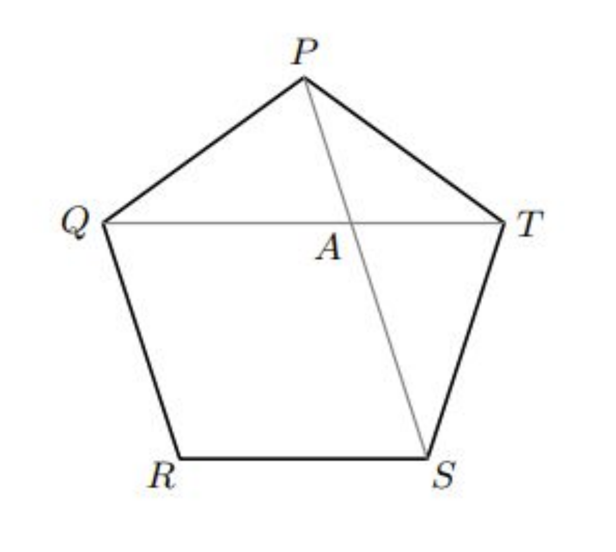




$\angle KBA' = 15°$ 、 $\angle KBF = 75°$

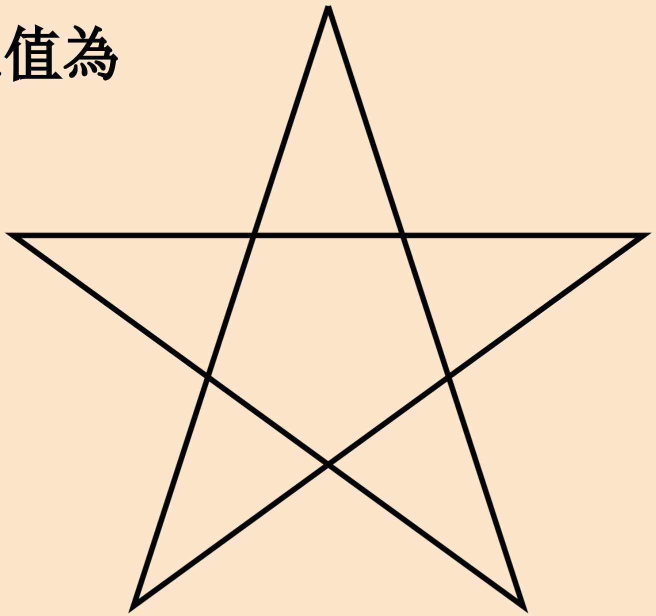
摺36度、72度

在正多邊形中，正五邊形比其他多邊形特殊的地方在於，它的對角線和邊長的比是「黃金比」。且五邊行對角線和邊所成的角度分別是36度和72度。



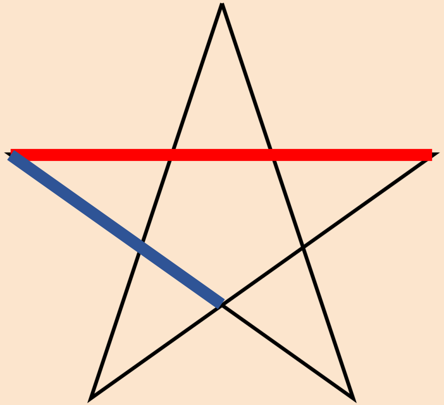
摺36度、72度

當我們畫出正五邊形的所有對角線後可以形成一個五角星。仔細觀察五角星，可以找到幾組互不等的長度，其長度比值為黃金比例。

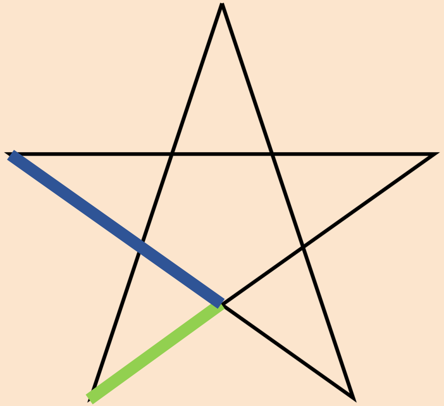


摺36度、72度

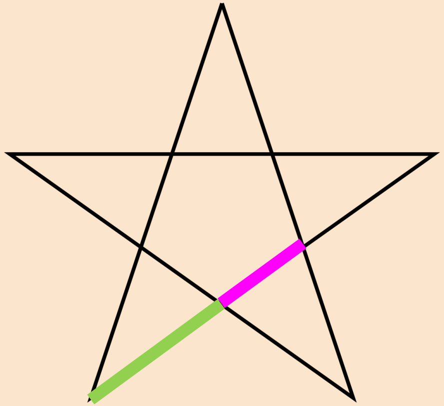
Case 1.



Case 2.



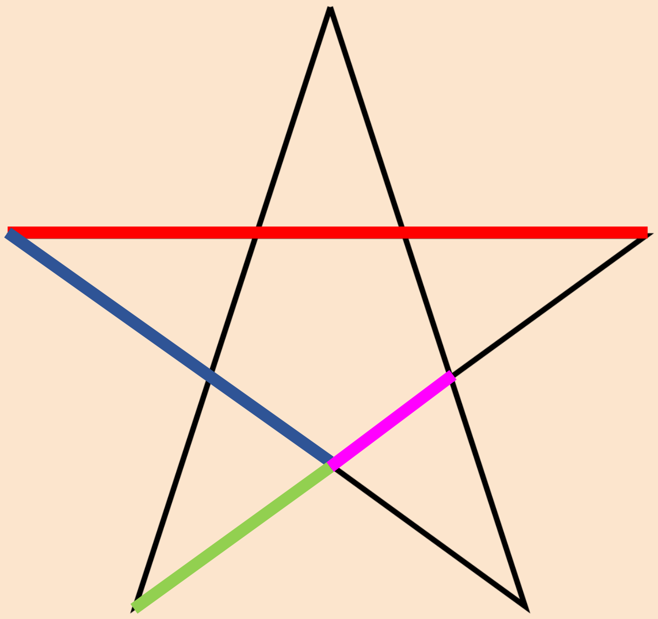
Case 3.



摺36度、72度

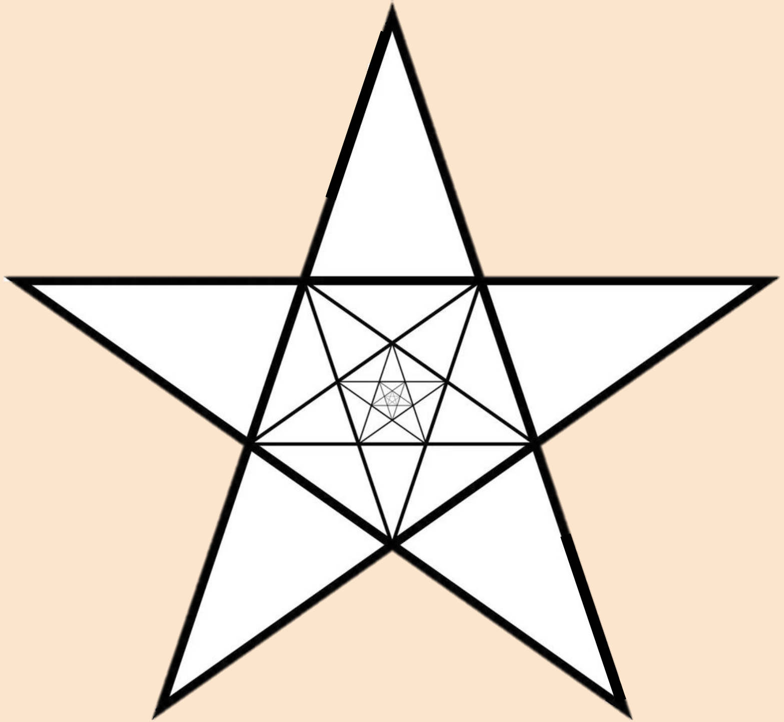
五角星內裡恰好會形成一個比原本的五邊形還小一號的正五邊形，原本五邊形對角線被彼此切割，從切割出的長度我們可以得知：

紅色線段:藍色線段 (Case 1.)
藍色線段:綠色線段 (Case 2.)
綠色線段:粉色線段 (Case 3.)

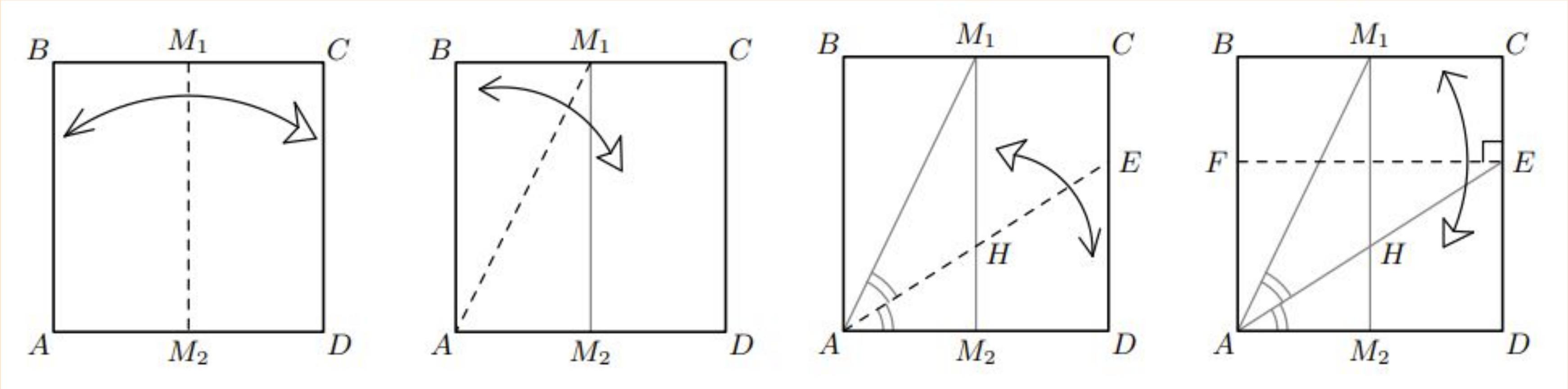


要摺出36° 和 72° 可能與黃金比例有關

摺36度、72度

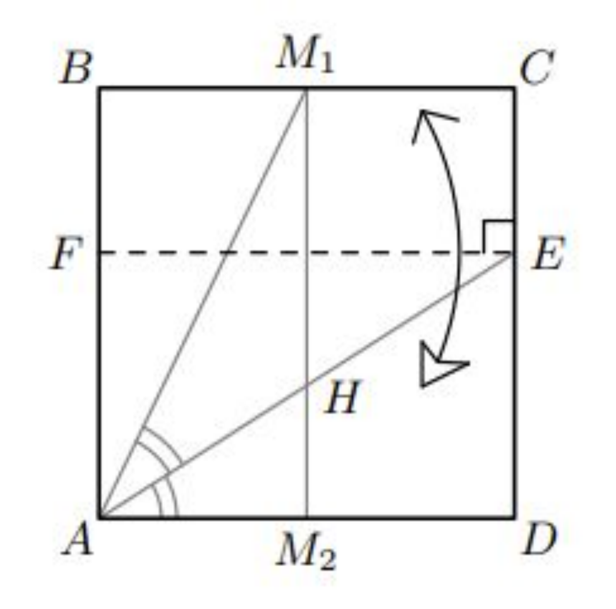


摺36度、72度



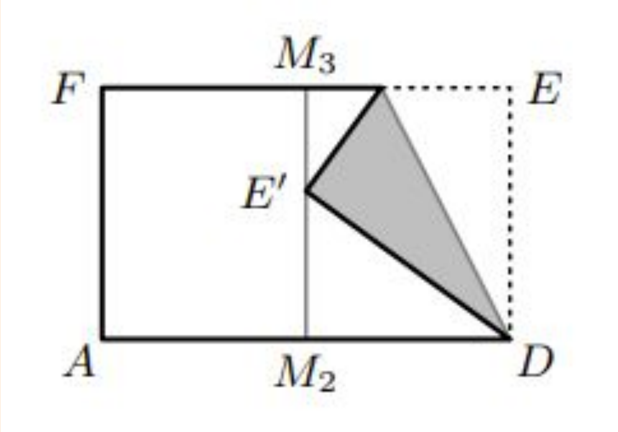
由此, AFED 為黃金矩形

摺36度、72度



$\overline{M_1M_2} : \overline{HM_2} = \sqrt{5} + 1 : 1$

$\overline{AD} : \overline{ED} = \overline{M_1M_2} : 2\overline{HM_2} = \sqrt{5} + 1 : 2$

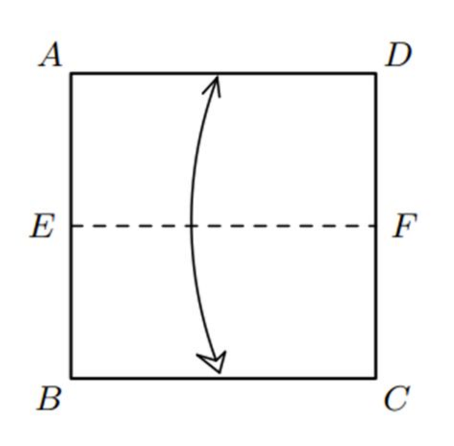


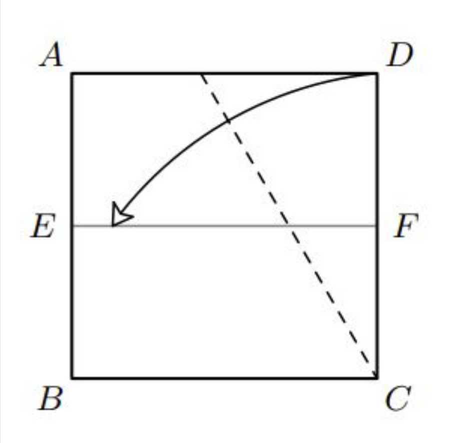
其中，$\angle M_2DE' = 36°$

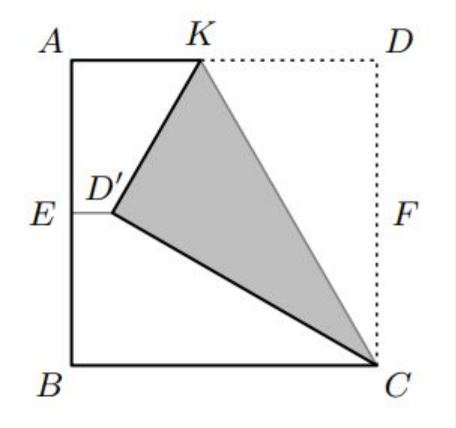
有了這些工具，想一想……

Q1:如何折出一個正三角形呢？

Step1: 製造一個60°角







Q1:如何折出一個正三角形呢？

<Proof>

1°Since $\triangle CC'F \cong \triangle BC'F$(SAS),

$\Rightarrow \angle CC'F = \angle BC'F = \frac{1}{2}\angle CC'B.$

2°Since $\triangle CC'F \approx \triangle CBH$(AA),

and $\triangle C'BH \cong \triangle CBH$(SAS),

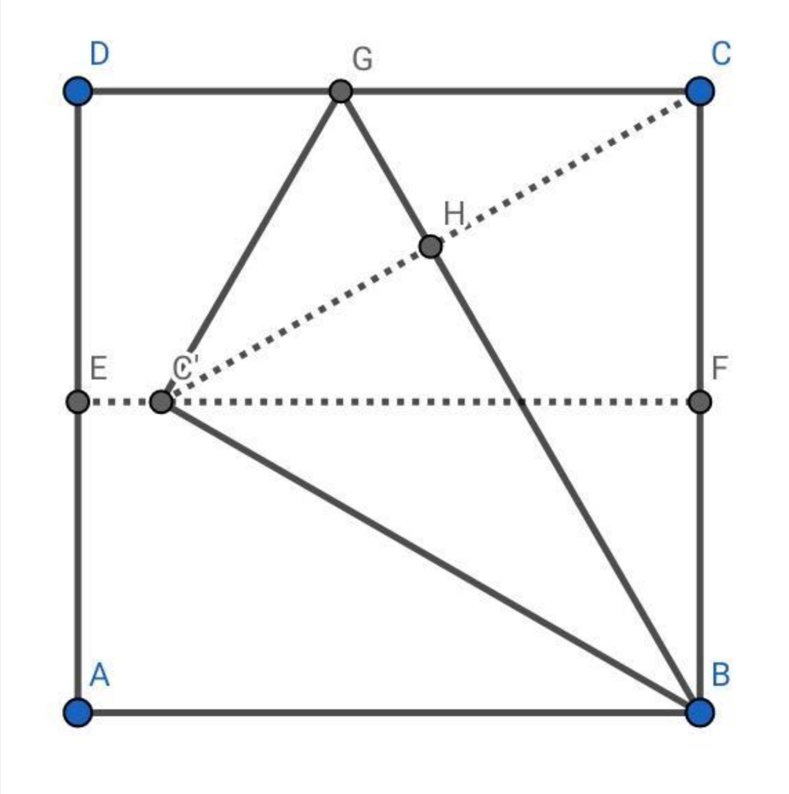
$\Rightarrow \triangle CC'F \approx \triangle C'BH,$

and $\angle CC'F = \angle C'BH.$

Combining 1°and 2°,

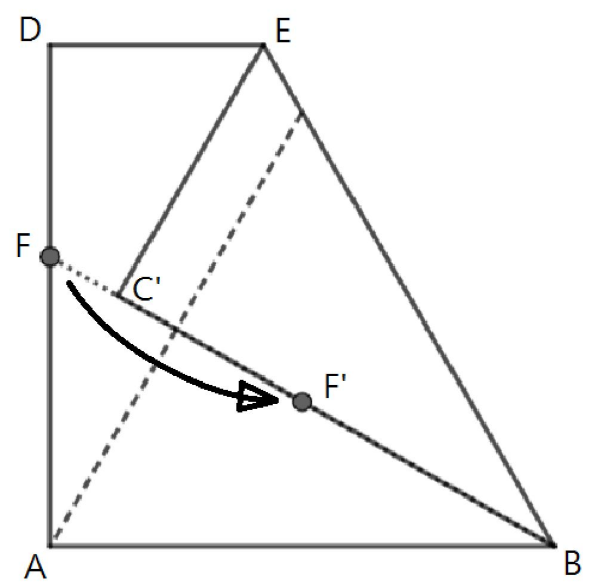
$\Rightarrow \angle CC'F = \angle C'BH = \angle BC'F = \frac{\pi}{6}$

and $\angle CBH = \angle C'BH = \angle C'BA = \frac{\pi}{6}$



Q1:如何折出一個正三角形呢？

Step2: 製造另一個60°角



Q1:如何折出一個正三角形呢？

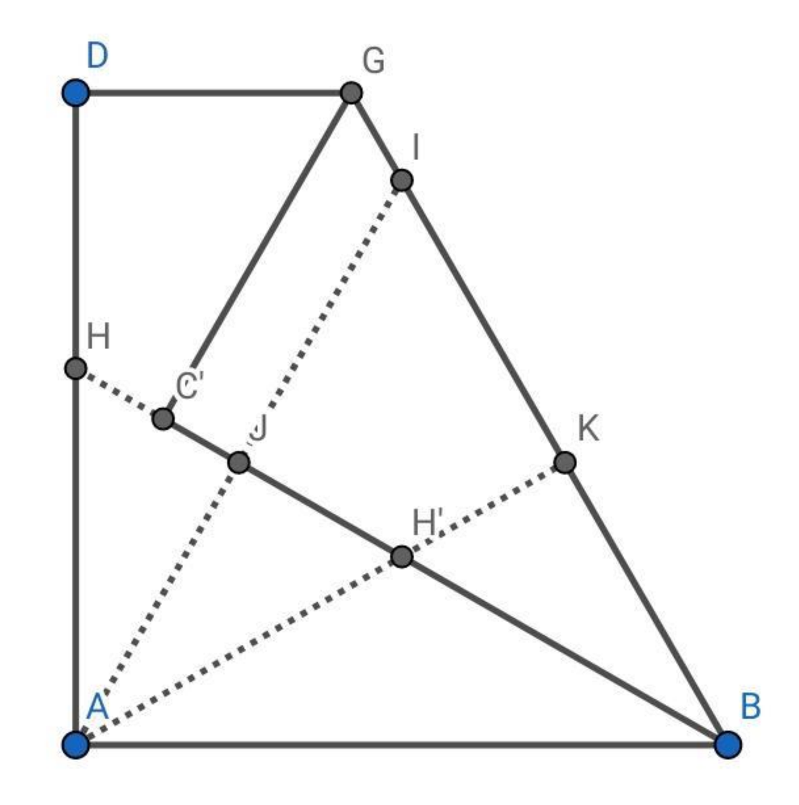
<Proof>

Since $\overline{\mathrm{HH'}} \perp \overline{\mathrm{AI}}$ and ∠C’BK = $\frac{\pi}{6}$

=>∠IJH’ = $\frac{\pi}{2}$ and ∠JIk = $\frac{\pi}{3}$.

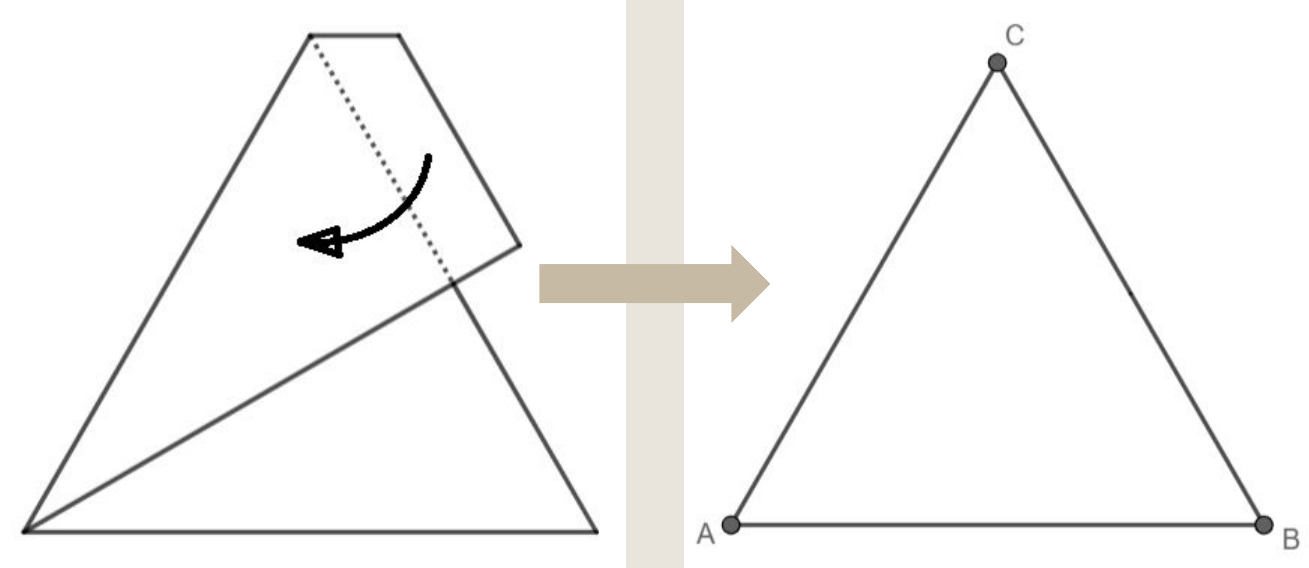
By step1, ∠IBA = $\frac{\pi}{3}$,

Hence, △ABI is an equilateral triangle.

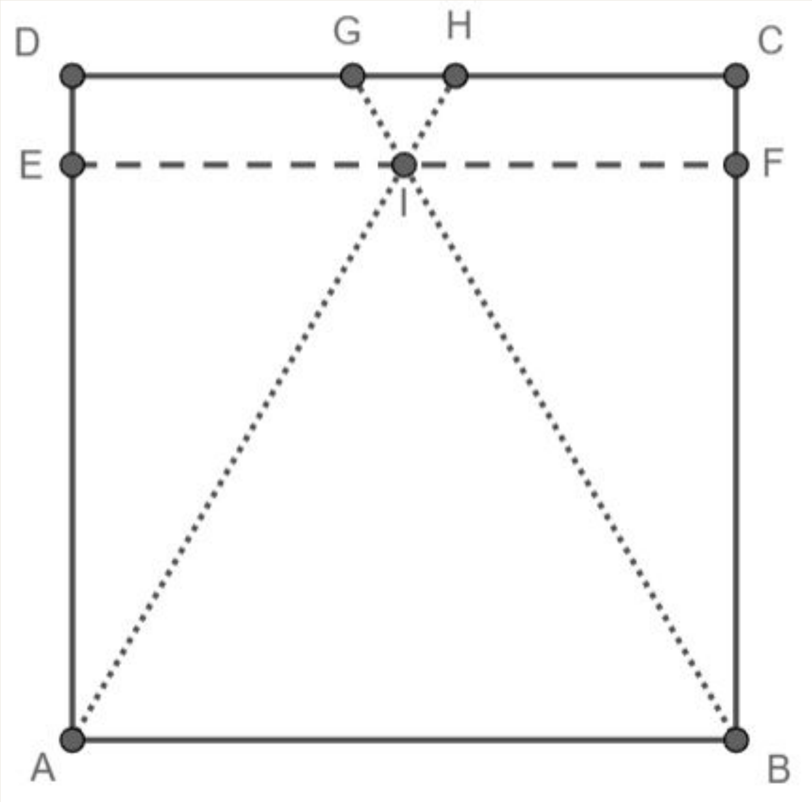


Q1:如何折出一個正三角形呢？

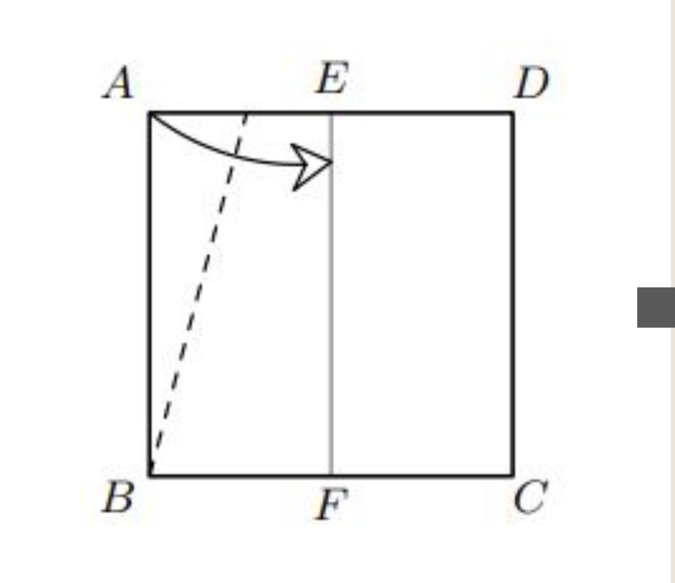
Step3: 收尾

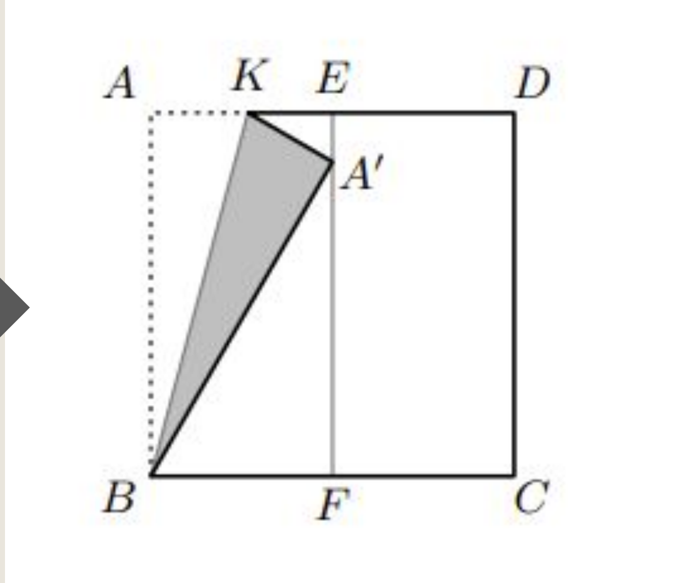


Q1:觀察他的摺痕圖，有沒有符合那四個特特點呢?

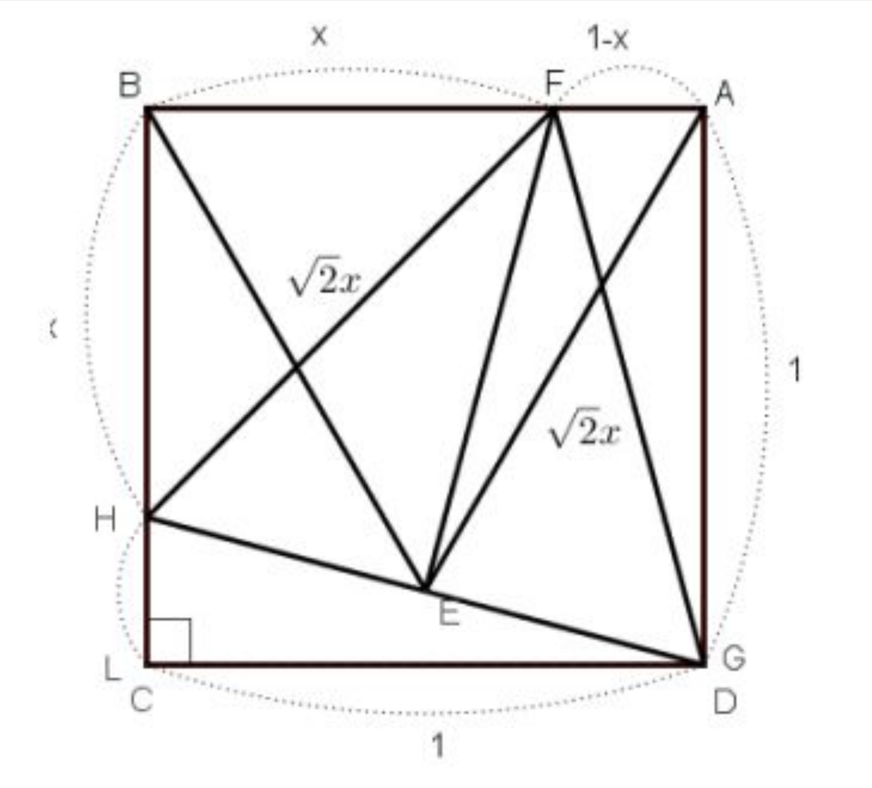


摺15度、75度





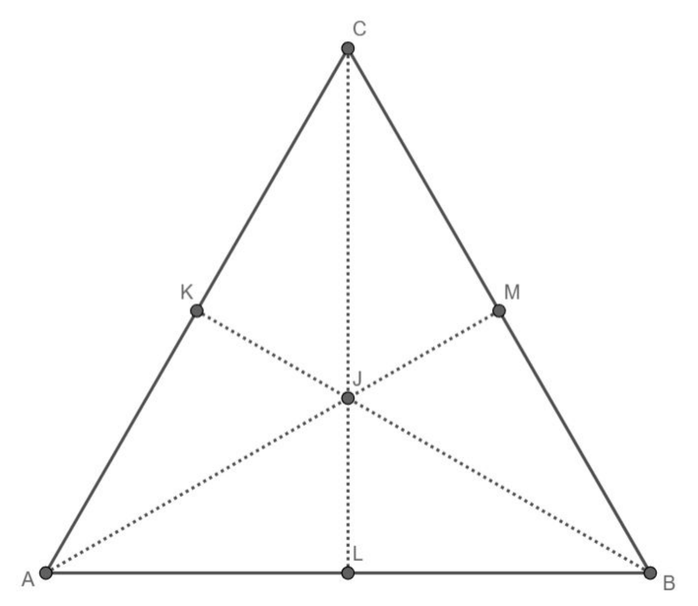
$\angle KBA' = 15^\circ$ 、 $\angle KBF = 75^\circ$



x
1-x
B
F
A
$\sqrt{2}x$
1
$\sqrt{2}x$
H
E
G
L
C
D
1

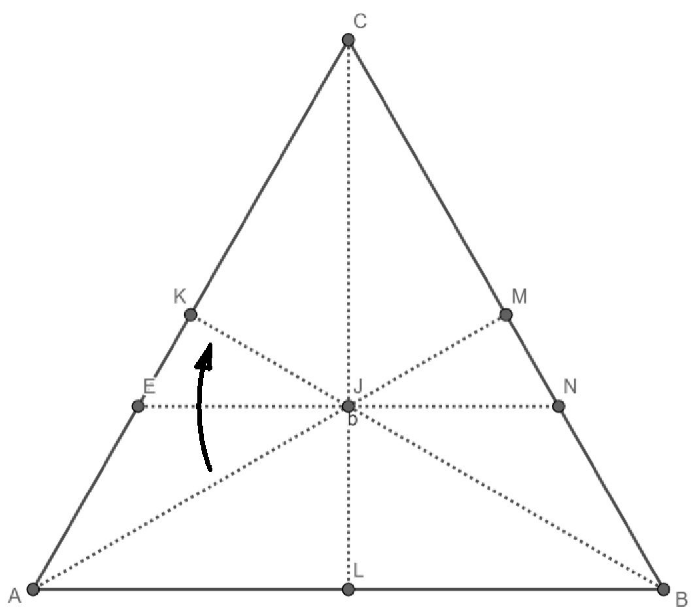
Q2:有了正三角形，如何折出一個正六邊形呢？

Step1: 摺出三條角平分線



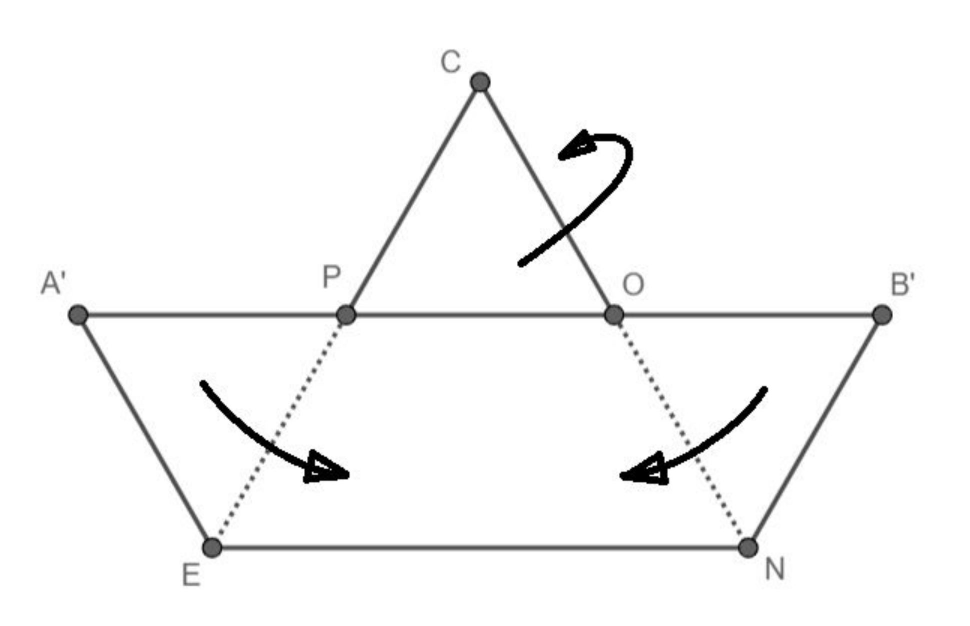
Q2:有了正三角形，如何折出一個正六邊形呢？

Step2: 將其中兩條角平分線重疊



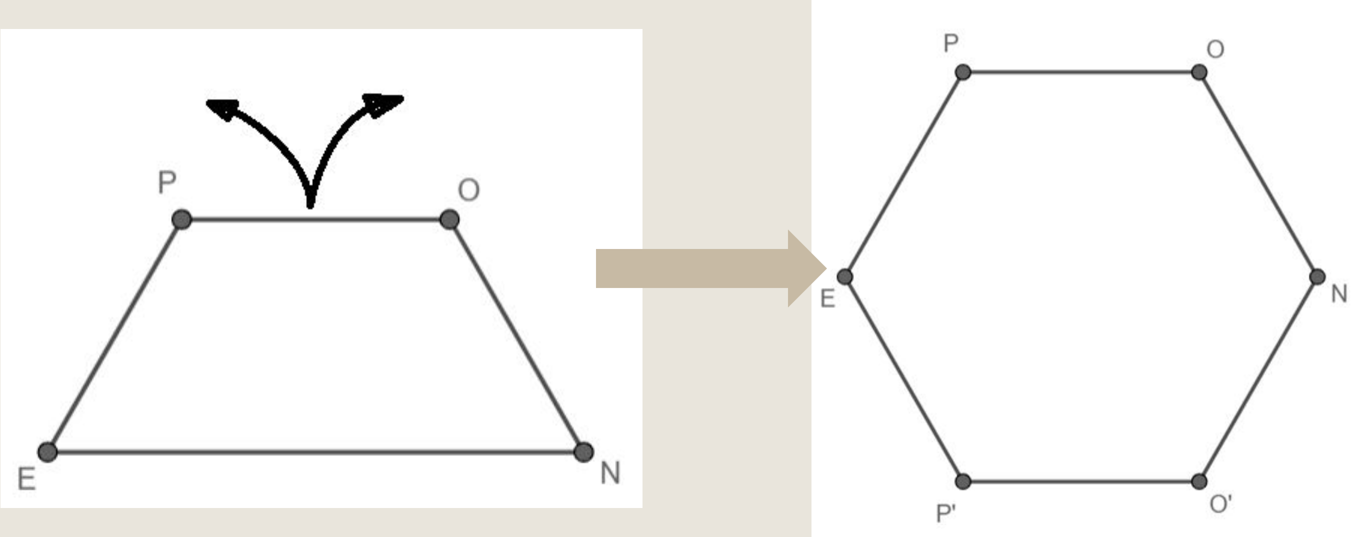
Q2:有了正三角形，如何折出一個正六邊形呢？

Step3: 將三個角沿著邊線向下摺

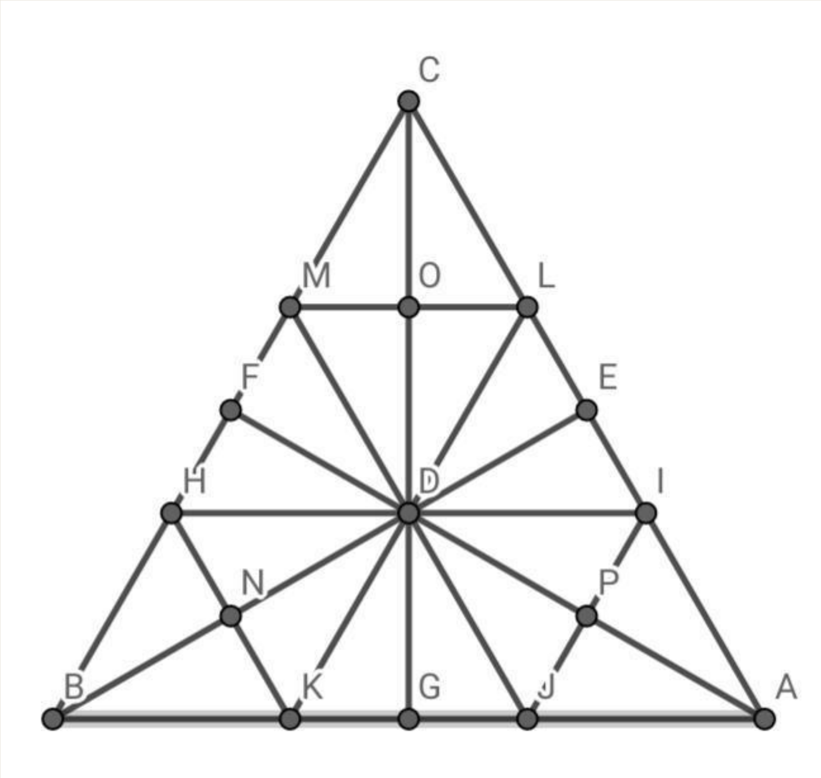


Q2:有了正三角形，如何折出一個正六邊形呢？

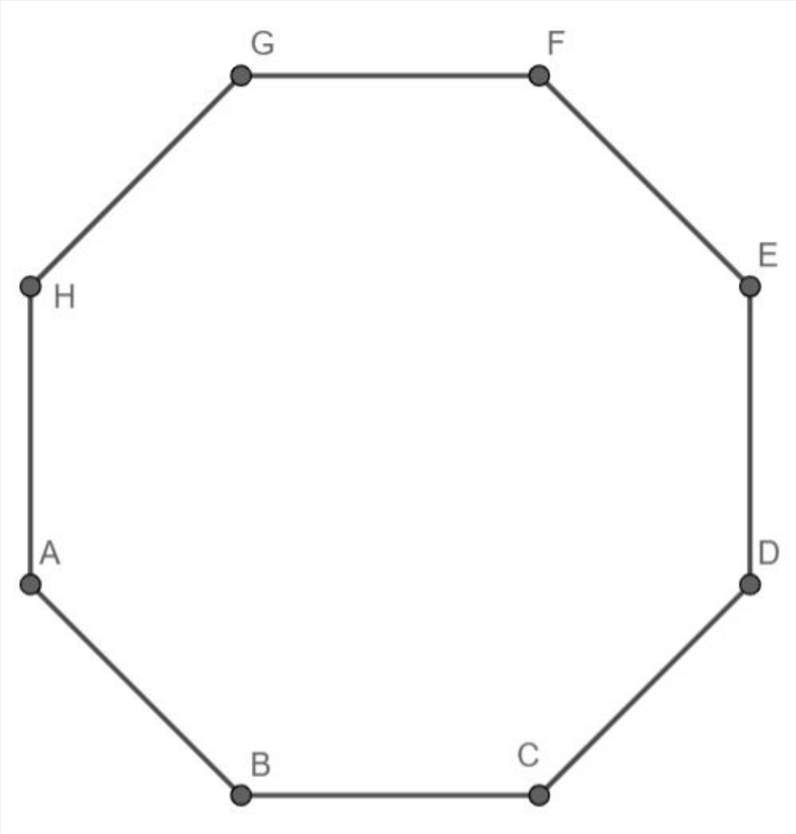
Step4: 打開後，完成!!



Q2:有了正三角形，如何折出一個正六邊形呢？

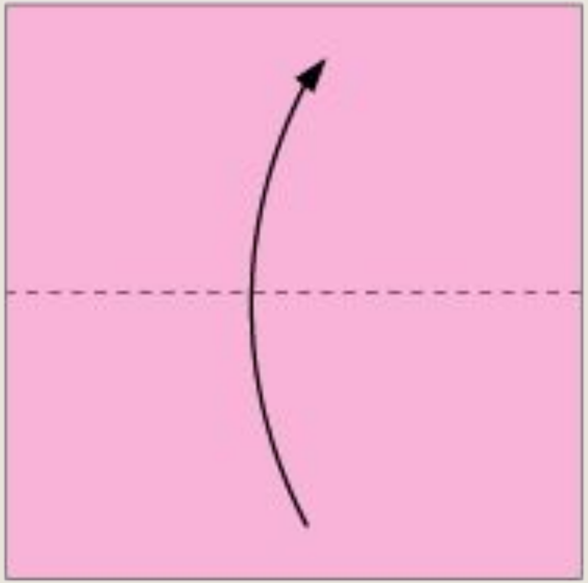


Q3:試試看用同樣的方法摺出正八邊形吧!



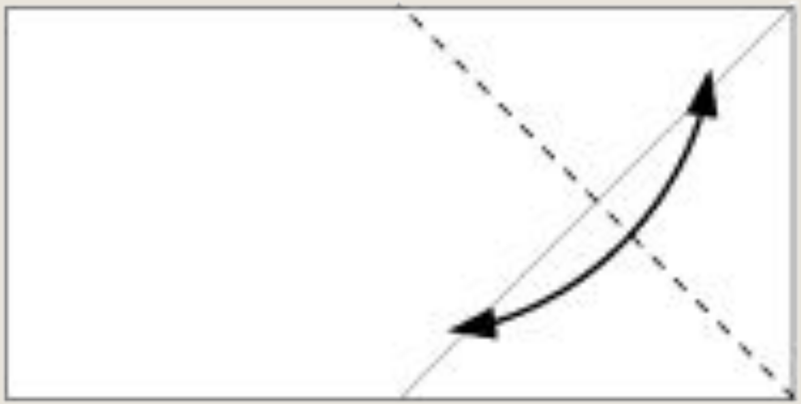
Q4:最後，來摺摺看正五邊形吧!

Step1: 對折



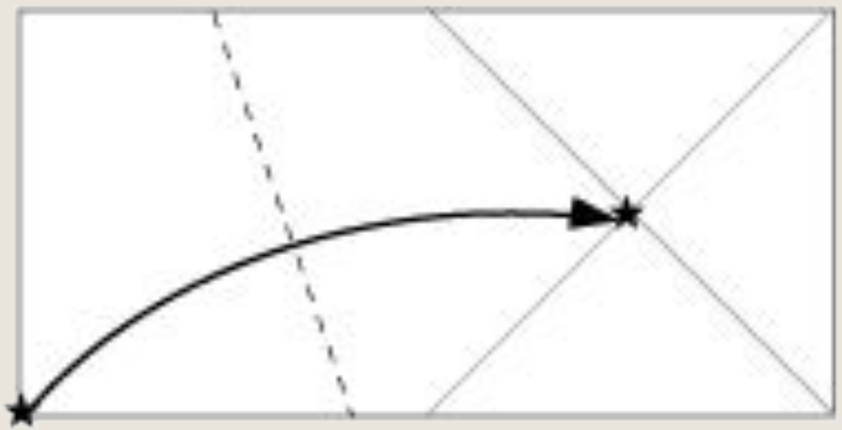
Q4:最後，來摺摺看正五邊形吧!

Step2: 摺出X摺痕



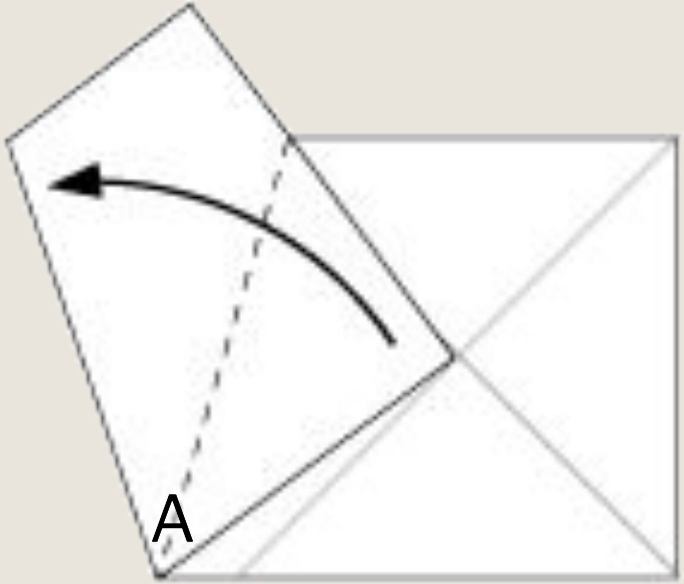
Q4:最後，來摺摺看正五邊形吧!

Step3: 將星號處重疊



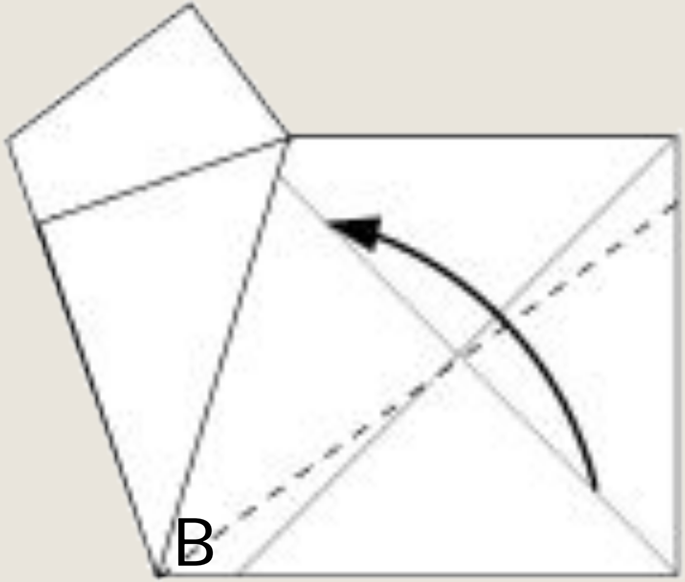
Q4:最後，來摺摺看正五邊形吧!

Step4: 將角A的兩邊重疊



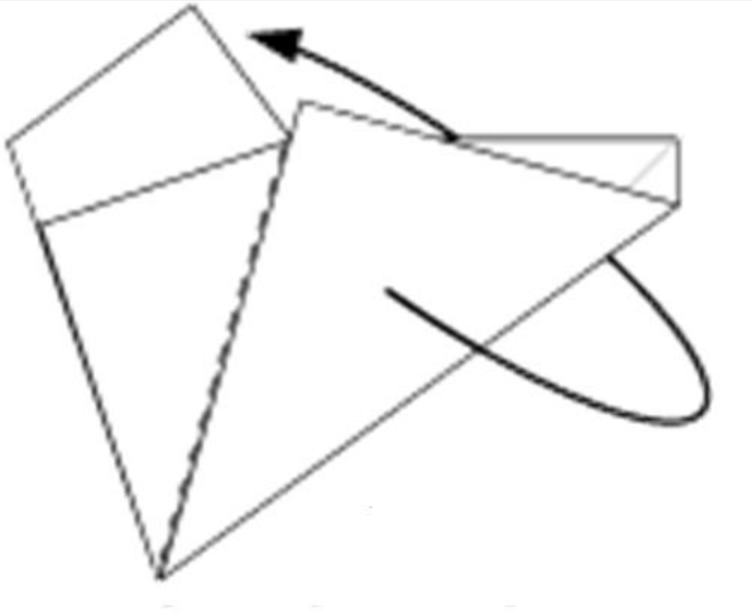
Q4:最後，來摺摺看正五邊形吧!

Step5: 將角B的兩邊重疊



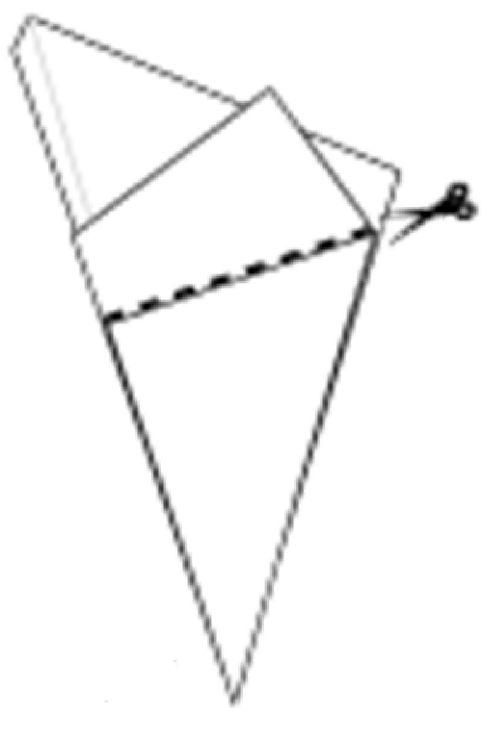
Q4:最後，來摺摺看正五邊形吧!

Step6: 沿虛線向後摺



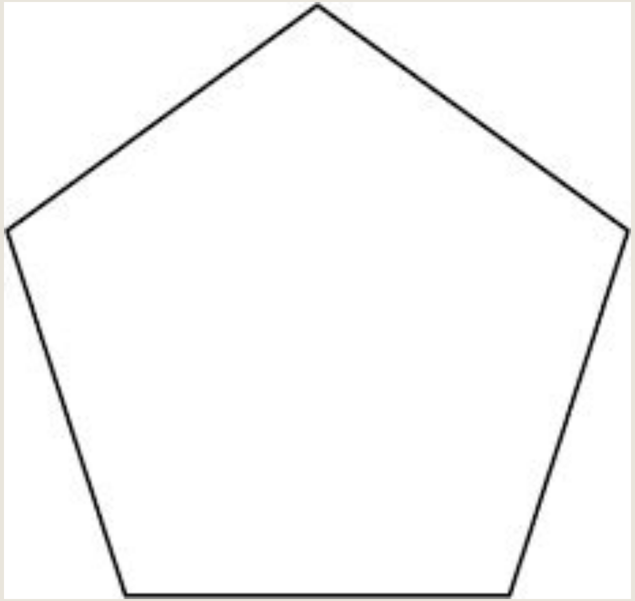
Q4:最後，來摺摺看正五邊形吧!

Step7: 沿虛線剪開



Q4:最後，來摺摺看正五邊形吧!

Step8: 展開後，完成!!



有興趣可以挑戰看看正七邊形

五邊形還能這樣？實作時間～～

確認一下道具:五邊形*3、銳角三角形*8、鈍角三角形*6

第一階段:形狀的變大

(A).利用手邊有的圖案，拼出平行四邊形，接續完成更大的平行四邊形

(B).利用手邊有的圖案，拼出新的銳角三角形，在接續拼出更大的銳角三角形

(C).利用手邊有的圖案，拼出新的鈍角三角形，重複拼湊出更大的鈍角三角形

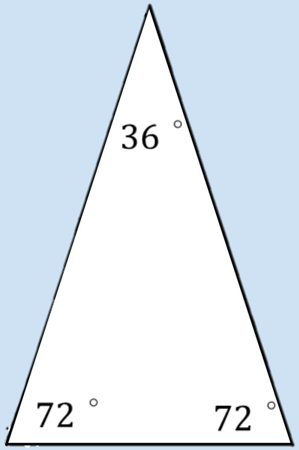
第二階段:五邊形

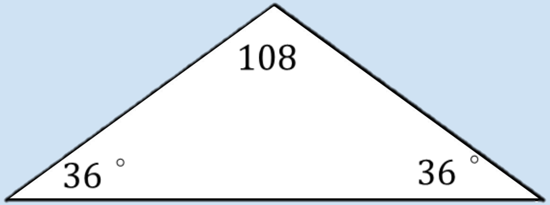
全部圖案都要用完喔！！！

1. 四個同樣大小的五邊形
2. 一個大、兩個中、一個小的正五邊形
3. 兩個大、兩個小的正五邊形

黃金三角形

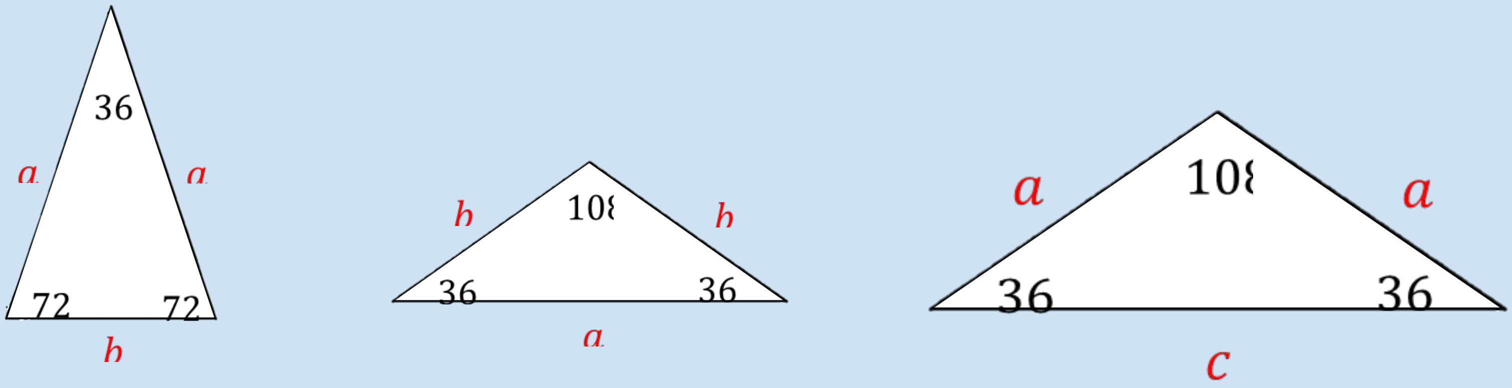
黃金三角形是一種特殊的等腰三角形，腰與底的比為「黃金比」1：$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 或 1 ：$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。是故黃金三角形有鈍角黃金三角形和銳角黃金三角形兩種。



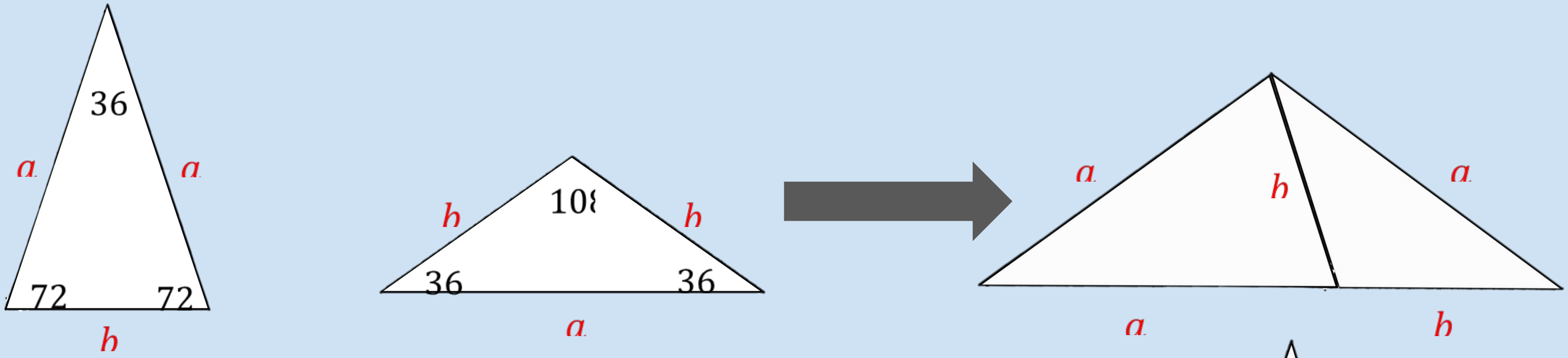


黃金三角形

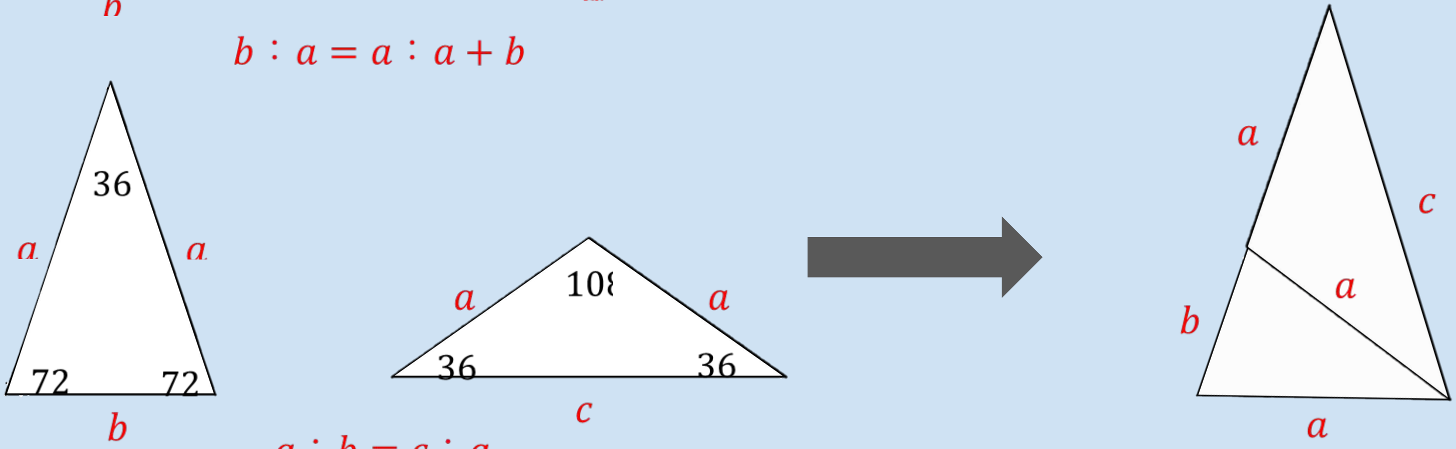
由於兩種黃金三角型的腰與底的比為黃金比，我們可以用兩者做簡單的合成來得到邊長更大的黃金三角形，這邊我們假設以下三種大小的黃金三角形為最小單位的黃金三角形。



黄金三角形



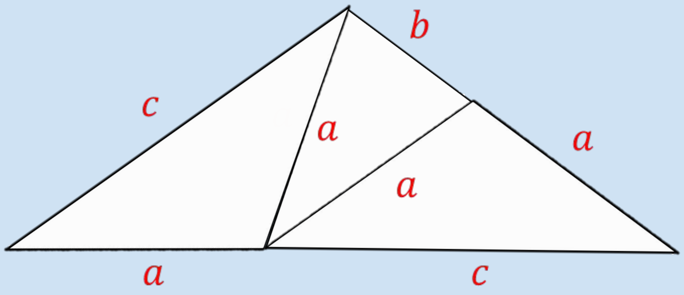
$b : a = a : a + b$



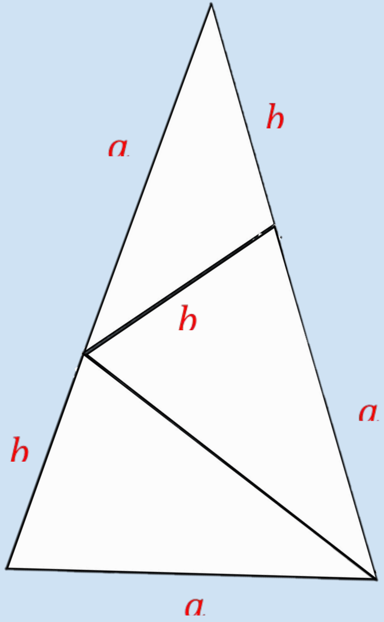
$a : b = c : a$

黃金三角形

同理，我們可以再把以上組合後的三角形加上一個單位黃金三角形來得到另一個邊長為倍率放大的黃金三角形。



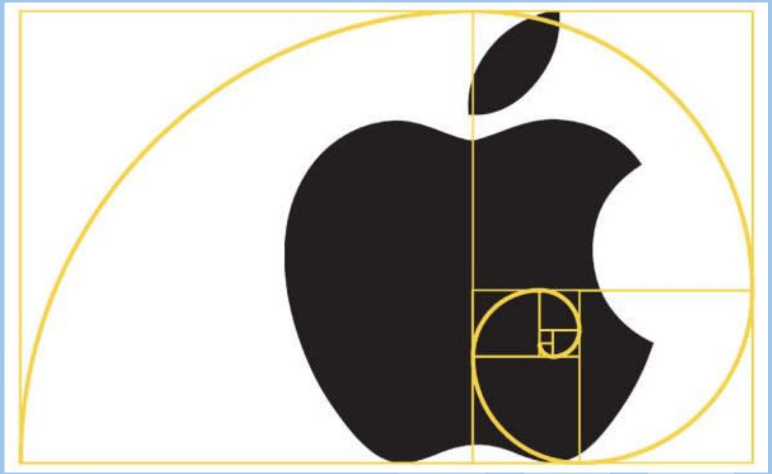
$b : a \Rightarrow a : a + b \Rightarrow c : a + c$



$a : b \Rightarrow c : a \Rightarrow a + b : a$

黃金比例

- 黃金比例的歷史
- 黃金比例的計算與實例
- 延伸的應用—費氏數列



黃金比例的歷史

公元前六世紀古希臘的**畢達哥拉斯學派**研究過正五邊形和正十邊形的作圖，因此現代數學家推斷當時畢達哥拉斯學派已經觸及甚至掌握了黃金比的一些規則，也發現**無理數**。它側重於從數學關係去探討**美的規律**，並認為美就是和諧與比例，按照這種比例關係就可以組成美的圖案，這其實是一個數字的比例關係。公元前四世紀，古希臘數學家**歐多克索斯**第一個系統研究了這一問題，並建立起**比例理論**。公元前300年前後**歐幾里得**撰寫《幾何原本》時吸收了歐多克索斯的研究成果，進一步系統論述了黃金比，成為最早的有關黃金比的論著（即中末比。

黃金比例的歷史

中世紀後，黃金比被披上神秘的外衣，義大利數學家**盧卡·帕喬利**稱中末比為神聖比例，並專門為此著書立說。德國天文學家**約翰內斯·開普勒**稱神聖比例為黃金比。到19世紀黃金比一名才逐漸通行，而證據在於德國數學家**馬丁·歐姆**所寫的《**基本純數學**》第2版注釋中有關黃金比的解釋：「人們習慣把按此方式將任一直線分割成兩部份的方法，稱為黃金比」。而在1875年出版的《大英百科全書》第9版中，蘇利有提到：「由費區那……提出的有趣、實驗性濃厚的想法宣稱，『黃金比』在視覺比例上有所謂的優越性。」可見黃金比在當時已甚為流行。20世紀時美國數學家**馬克·巴爾**給它個名叫**phi**。黃金比有許多有趣的性質，人類對它的實際應用也很廣泛，造就了它今天的名氣。

黃金比例基本計算

兩數值a和b構成黃金比例φ

如果：$a+b/a=a/b=\varphi$

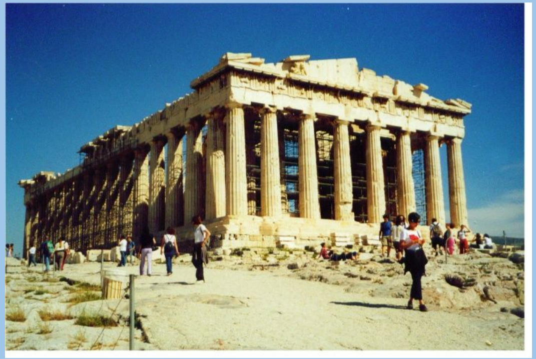
簡化成：$a+b/a=1+b/a=1+1/\varphi$

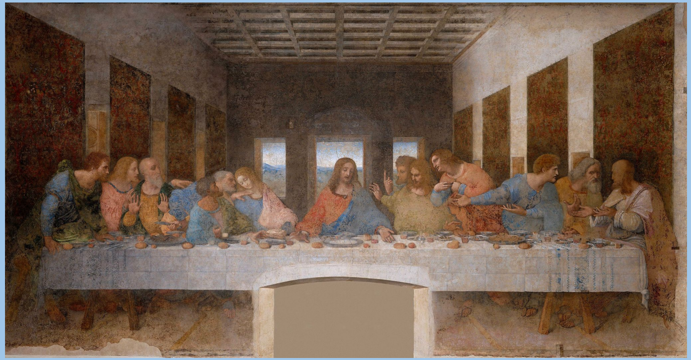
可得：$\varphi^2-\varphi-1=0 \Rightarrow \varphi=\sqrt{}5+1/2=1.618......$

且φ的倒數為自身減1⇒$0.618......=1.618......-1$

（黃金比例共軛）

黃金比例的實例





貴金屬分割

- 定義：$n+\sqrt{n^2+4}/2$（n為正整數）
- n=1，黃金比、n=2，白銀比、n=3，青銅比
- 可用連分數表示

費氏數列起源

費波那契(Fibonacci, 1170-1240)在某一次觀察兔子生長數量的情形時，發現兔子生長久了以後，每繁殖一次，新總數約為舊總數的1.6倍，於是他想知道裡面有什麼特殊的數學隱含在裡面，於是做了以下推測：費波那契假設了下述事情

1. 第一個月有一對小兔子，一公一母

2. 第二個月長大變中兔子

3. 第三個月具有生殖能力的大兔子，往後每個月都會生出一對兔子。生出新的一對兔子，也是一公一母

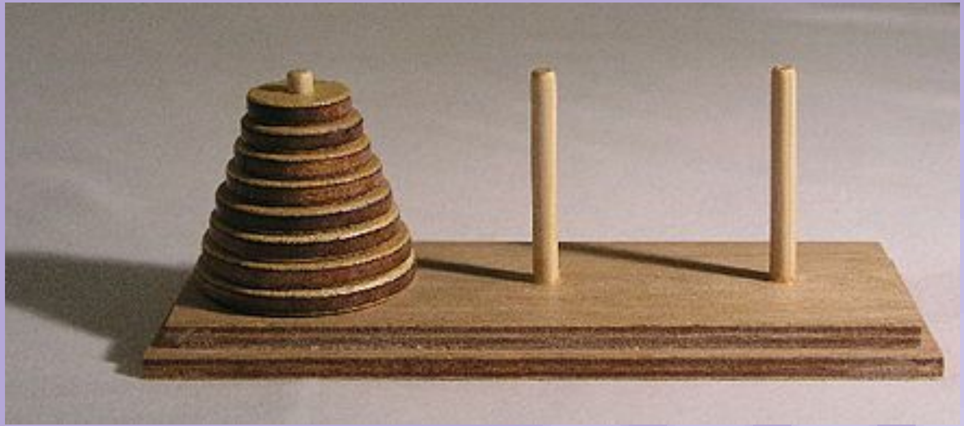
4. 討論兔子數量變化時，假設永不死亡

介紹一個小遊戲

數學原來還能這樣玩

河內塔

- 實作
- 起源
- 遞迴一般式



動手玩玩看

1. 三柱四盤
2. 三柱八盤
3. 四柱四盤
4. 四柱八盤

河內塔的起源

最早發明這個問題的人是法國數學家愛德華·盧卡斯。傳說越南河內某間寺院有三根銀棒，上串 64 個金盤。寺院裡的僧侶依照一個古老的預言：(1)在每次的移動中，只能搬移一片金屬片。(2)過程中必須保持金屬片小的在上，大的在下。以上述規則移動這些盤子；預言說當這些盤子移動完畢，世界就會滅亡。這個傳說叫做梵天寺之塔問題(Tower of Brahma puzzle)。但不知道是盧卡斯自創的這個傳說，還是他受他人啟發。若傳說屬實，僧侶們需要 2的64次方−1步才能完成這個任務；若他們每秒可完成一個盤子的移動，就需要 5849 億年才能完成。整個宇宙現在也不過 137 億年。這個傳說有若干變體：寺院換成修道院、僧侶換成修士等等。寺院的地點眾說紛紜，其中一說是位於越南的河內，所以被命名為「河內塔」。另外亦有「金盤是創世時所造」、「僧侶們每天移動一盤」之類的背景設定。

河內塔的破解(最少步)

利用**遞迴關係式** $a_n=2a_{n-1}+1$, $a_1=1$, 求a_n的通式。

因為$a_n=2a_{n-1}+1$, 所以$a_n+1=2a_{n-1}+1+1$, 得$a_n+1=2(a_{n-1}+1)$。

因此$a_2+1=2(a_1+1)$ ...(1)、$a_3+1=2(2a_2+1)$ ...(2)、$a_4+1=2(2a_3+1)$ ...(3)、......、$a_n+1=2(a_{n-1}+1)$ ...(n-1)

上列各式相乘(1)×(2)×(3)×....×(n-1), 等號左右等量除、對消後, 得 $a_n+1=2(a_1+1)\times 2^{n-2}$。

因為$a_1=1$, 所以 $a_n+1=2^2\times 2^{n-2}$, 得$\mathbf{a_n=2^n-1}$。

參考資料

正n邊形摺紙	http://cn.origami-club.com/123/triangle/triangle/index.html https://www.zhizuoxi.com/zhiyi/jichu/2120.html https://read01.com/zh-tw/Nyz2njg.html
摺紙歷史	https://www.moc.gov.tw/information_250_45247.html https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%91%BA%E7%B4%99#%E6%AD%B7%E5%8F%B2 https://www.easyatm.com.tw/wiki/%E6%91%BA%E7%B4%99 https://hajl.athuman.com/karuta/tc/hobby/000623.html?code=200029
摺紙	https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%8A%98%E7%BA%B8%E5%85%AC%E7%90%86 https://youtu.be/NYKcOFQCeno https://zhuanlan.zhihu.com/p/184886420?utm_id=0 Origami Mathematical Geometry 摺紙玩數學 - 日本摺紙大師的幾何學教育 [芳賀和夫] [2016] https://www.geogebra.org/?lang=zh-TW

參考資料

摺紙	
河內塔	https://zh.wikipedia.org/zh-tw/File:Tower_of_Hanoi.jpeg https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%B1%89%E8%AF%BA%E5%A1%94 http://www.mathland.idv.tw/life/hanoirecursion.htm
費氏數列	https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%96%90%E6%B3%A2%E9%82%A3%E5%A5%91%E6%95%B0
黃金比例	https://reurl.cc/AdoZ5Y https://reurl.cc/MRqEpv https://zh.wikipedia.org/zh-hant%E9%BB%84%E9%87%91%E5%88%86%E5%89%B2%E7%8E%87

The End~~

Thank for listening