數學思維與解題 期末書面報告

從三門問題出發—探討各種機率悖論

第二組

411231201 陳冠章 411031209 謝燿璘

411231113 洪苡宸 411031147 蕭煒磬

411231212 王信融 411231242 蕭應科

目錄

一、悖論是什麼

所謂的悖論實際上是指一種陳述、情境或理論，雖然看起來自相矛盾或不符合常識，但只要經過仔細分析後，就可能會發現其所具有內在的一致性或揭示了某種深層道理。

以下是我們提出的舉例

1. 謊話者悖論：

如果有今天有一個人跟我們說「我說謊了」，那這句話是謊話還是真話呢?

2. 理髮師悖論：

一個村莊的理髮師只為不剃自己鬍子的人剃鬍子，那麼理髮師自己是否需要剃鬍子？

3. 芝諾悖論：

在運動中，阿基里斯無法追上烏龜，因為每當他到達烏龜的上一個位置，烏龜又向前移動了一小段距離。

這些都是悖論中的一些案例，他們看上去是沒有標準答案的，但是我們可以從中發現他其實是有一定的邏輯性的。

悖論等價矛盾?

悖論不等價矛盾，悖論與矛盾是有相似的地方但不完全等於，我們對矛盾的定義是邏輯錯誤的一種表現，完全不可能成立，但悖論不一定是不成立的，只是質帶來的偏差會讓我們誤以為他不成立。

用上面的謊話者悖論來說：

「我在說謊」這句話若是真的，那麼前面所說的都會是真話，反之則前所說皆是假話，這樣的話術我們常用在對別人的暗示，讓其他非目標人聽不出話中有話的錯覺。

而今天要如何讓這句話變成矛盾，那就要將這個人假設成他只說真話或是只說假話，這麼一來就會變成兩邊均不成立的狀況，這就是矛盾

二、三門問題

「假如你是參賽者，你會看見三扇門，其中一扇門的裏面有一輛汽車，選中裏面是汽車的那扇門，就可以贏得該輛汽車，另外兩扇門裏面則都是一隻山羊。當參賽者選定了一扇門，主持人會開啟另一扇是山羊的門；並問：「要不要換一扇門？」現在問題是–改變選擇(換另一扇門)是否對你有利?」

三門問題，又稱山羊問題或蒙提霍爾問題（英文：Monty Hall problem），是一個源自賽局理論的數學遊戲問題。雖在本主題稱之悖論，該問題的答案在邏輯上卻並無矛盾，但十分違反直覺。

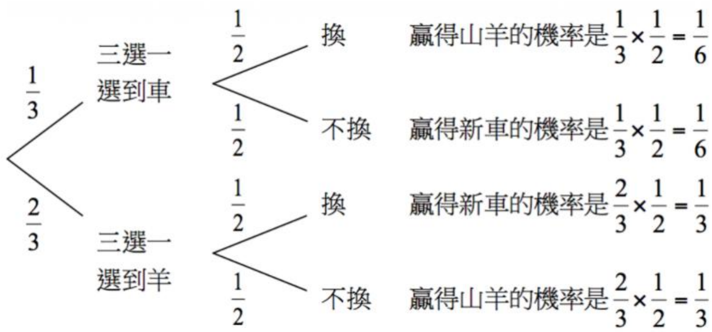
對於初次聽到此題目的人們，會直覺地想說「打開一扇門後，剩餘兩扇，那機率應該是一半一半，意即換不換都沒差」，而回答 1/2。事實並非如此，換門

後的機率將為 2/3，比不換的 1/3 還高。

為幫助讀者思考，以下提供三種思維破解方法：

(一)以條件機率的角度解釋

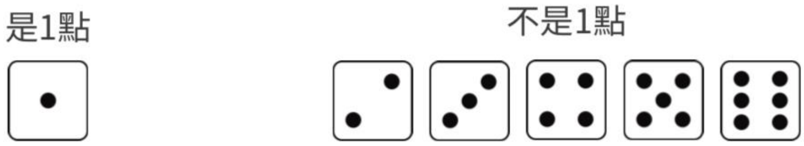
上述錯誤直覺思維忽略了一件事情，這時候後看到 2 個門打開，就好比「中途」邀請局外人加入遊戲。這個局外人看到的情況與選中的機率的確是 1/2，但這樣的思考前提是錯誤的，因為這位局外人並沒有參與一開始三門的選擇！以條件機率來說，有一個重要的概念，也就是一個事件的機率會隨著情境的不同（提供訊息的改變）而可能會有所改變，這就是一個很明顯的例子。



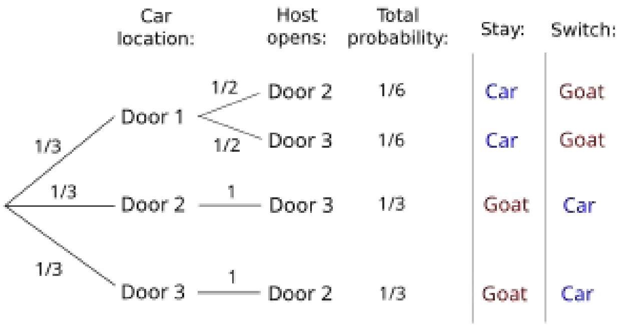
(二)羅列基本事件

在機率論的一開始，即是介紹樣本空間與基本事件，這兩者雖然是最基本的概念，但忽略其將容易造成題意與思考上的混淆，導致錯誤的結果發生。

以一個六面骰子來說，「是一點」和「不是一點」看似僅有 2 種情形，但在不是一點的背後卻有 2～6 點共五種不同的基本事件，所以骰子骰到 1 的機率為 1/6，而非 1/2



回到三門問題，在不失一般性的情形下，我們可以假設 1 號門為汽車所在處，利用窮舉法一一列出，可以得到以下樹狀圖



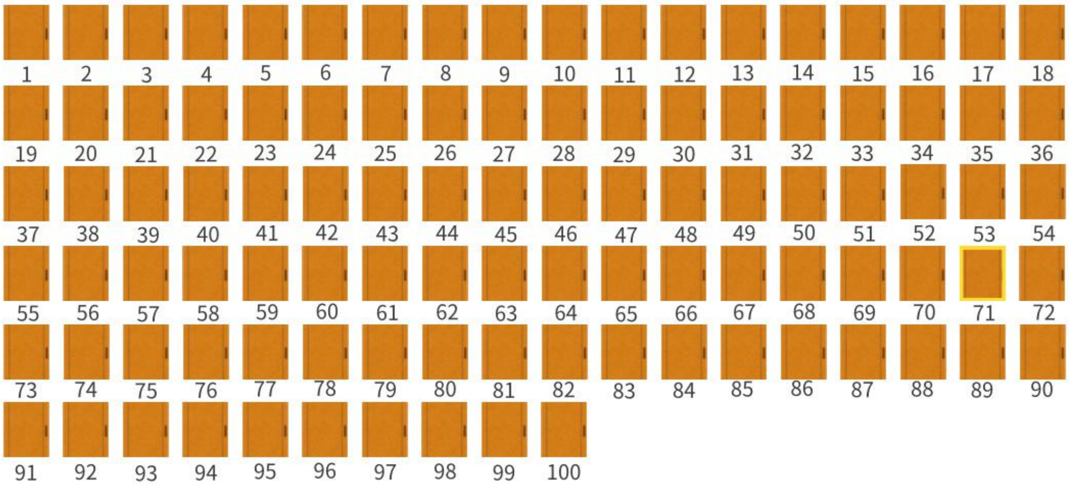
圖中可以發現，一開始選中 1 號門而換門時，選到山羊的機率各為 1/6；而當選到山羊（2 號門及 3 號門）時換門，選中車子的的機率亦各為 1/3。所以換門而得到大獎的機率為 2/3，沒得到的機率為 1/3。相對來說，不換門而得到大獎的機率僅為 1/3 (1-2/3)

假如還是沒有概念，有第三種方式可以讓讀者感受。

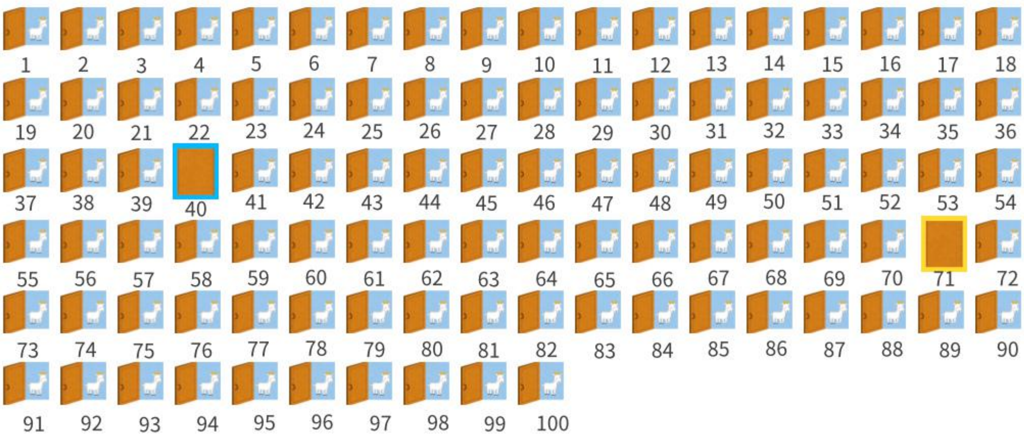
（三）N 門問題

假如我把三門問題擴增到 N 門問題，問題看似變複雜了，不過解釋起來卻更簡單了。

如下圖，假如 N=100，即我從 100 扇門中選出一扇門，我假設選中 71 號門



接著主持人將其於 98 扇後面有山羊的門打開，只留下 40 號門與我選擇的 71 號門，如下圖



感覺上，你會發現這 40 號門非常可疑（為何偏偏僅留下這扇門），我 71 號會留下來是因為我選擇了它，那 40 號呢？

以數學的角度說明，我從 100 扇門選擇了 71 號，代表我一開始矇對的機率為 1/100，矇錯為 99/100，則換門的機率為 1-1/100，即 99/100。

到此我們得出一個結論，N 門問題中，換門而得獎的機率如下公式所示：

$$p\left(win\left|switch\right.\right)=\frac{N-1}{N}$$

三門問題總結：

1. 直覺偏誤

人的直覺傾向於認為剩下兩扇門的機率是 50/50，而非 1/3 與 2/3。這種錯誤是因為我們忽略了主持人選門的資訊增益。

2. 確認偏誤

人們傾向堅持自己原本的選擇，因為更改選擇需要承認之前可能選錯。

3. 「損失厭惡」（Loss Aversion）。

即使改變選擇能提高成功率，大多數人仍選擇保留原來的選擇，因為「改變選擇後失敗」會讓人更後悔。

三、生日問題

「需要多少人聚在一起，才能讓其中至少有兩人同一天生日的機率超過一半？」

答案為 23 人，聽起來很違反直覺畢竟 23 人連一個班的人數都不到，不過可以用數學表達：

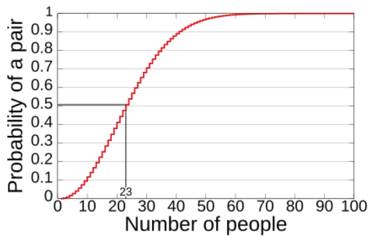
首先假設 n 人中，每人生日都不同的機率為

$$\bar{p}(n)=1\cdot\left(1-\frac{1}{365}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{365}\right)=\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365}\cdots\frac{365-n+1}{365}$$

接著依題意，至少兩人生日在同一天的機率為

$$p(n) = 1 - \bar{p}(n) = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdots \frac{365-n+1}{365} = 1 - \frac{365!}{365^n (365-n)!}$$

經由電腦計算 p(n)≥0.5，得出的結果為 p(23)≈1-0.49=0.51，其函數關係圖如下



四、檢查悖論

檢查悖論為，在一些數據當中，進行隨機抽樣檢查會出現抽樣後的平均值與實際平均值不一樣。

以下準備了三個例子來帶讀者認識「檢查悖論」：

（一）平均人數

A 科系有 70 人，B 科系有 30 人。從這 100 個學生中隨機挑選 10 名學生，詢問「你們班有多少人」，得出的「平均」結果是 50 人嗎？

Ans. 會大於 50 人 (接近 58 人)

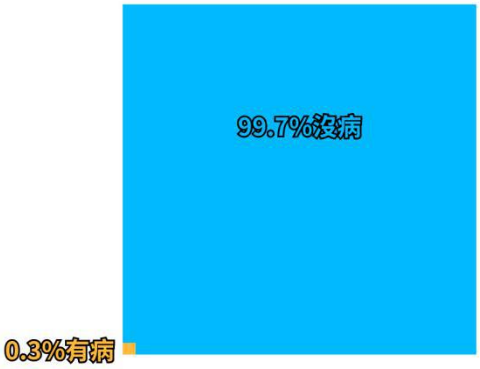
算法：70×70%+30×30%=58>100×50%=50

（二）準確的試紙？

「某公司發明一種試紙，能檢測是否患有早期癌症，這試紙準確率為 98%。今天你用了試紙，發現是陽性，難道你真的罹癌了嗎...？」

Ans. 其實實際罹癌機率僅≈15%

上述條件中忽略了人口總數帶來的影響，假設下圖為罹癌與未罹癌的人口比例：



我們亦知試紙準確率為 98%，則我們發現下圖的現象：

圖中說明，測出的結果為陽性，僅能代表狀況為圖中兩塊紅色的面積，假陽性為 1.99%，大於真陽性的 0.29%，經過以下算式計算

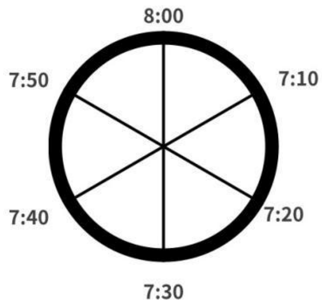
$$\text{真陽性的比例}=\frac{0.29\%}{0.29\%+1.99\%}$$
$$=12.7\%$$

得出結果為 12.7%，亦即真正罹癌的可能不到 2 成

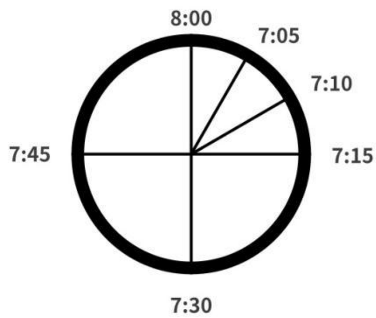
（三）等公車的時間

您是否曾經有過類似的經驗。搭公車時，公車往往久候不至，或是公車出現時，卻是一輛接著一輛。其實公車發車時間有其固定的間隔，而且尖峰的時候，間隔甚至還密集一點；離峰的時候，間隔寬鬆一點。但又是什麼樣的原因，最後造成了間隔不一的結果？

我用以下例子來讓讀者感受：假設在 7 點至 8 點間，有 6 台公車，它們都按照每隔十分鐘的規則進站，如下圖所示



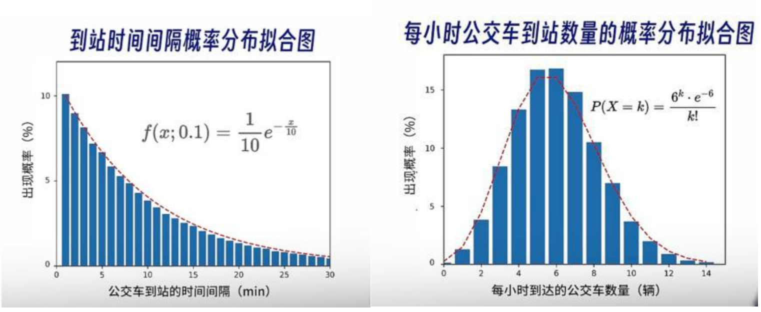
此時平均等車時間為 5 分鐘。接著進站時間被變更為下圖所示



假如 7:00~7:15 到車站，在此間隔中平均等車時間為 5÷2=2.5 分鐘；若 7:15~8:00 到車站，在此間隔中平均等車時間為 15÷2=7.5 分鐘，我們得出在這一小時內，平均等車時間為

2.5×25%+7.5×75%=6.25 分鐘

更一步推廣，到站時間間隔機率分布圖會符合指數分布（Exponential Distribution），每小時公車到站數量機率分布圖會符合卜瓦松分布（Poisson Distribution）



透過電腦計算，得出結果為平均等車時間=發車的時間間隔，意即公車 10 分鐘發一班車，等車人平均等待時間就是 10 分鐘。

上述三個例子不難發現，某些數據佔得比例更大，而更容易被觀察者發現，（一）的例子中 A 科系更多人、（二）例子中健康的人佔大多數、（三）的例子中行駛較慢的公車佔更大的時間比例，這都會使得檢測出的「平均」結果不小心被加權過。

結論：

在一些數據當中，進行隨機抽樣檢查會出現抽樣後的平均值與實際平均值不一樣。

→「檢查悖論」就像是你去找某些東西，結果撞到的通常是那些特別大、特別多，或是特別長的情況，因為它們更容易被你看到。

五、辛普森悖論

辛普森悖論（英語：Simpson's paradox），是機率和統計中的一種現象，其中趨勢出現在幾組數據中，但當這些組被合併後趨勢消失或反轉。 這個結果在社會科學和醫學科學統計中經常遇到， 當頻率數據被不恰當地給出因果解釋時尤其成問題。當干擾變數和因果關係在統計建模中得到適當處理時，這個悖論

就可以得到解決。 辛普森悖論已被用來說明統計誤用可能產生的誤導性結果。

以下為辛普森悖論之舉例：

一所美國高校的兩個學院，分別是法學院和商學院。新學期招生，人們懷疑這兩個學院有性別歧視。現作如下統計：

法學院

性別	錄取	拒收	總數	錄取比例
男生	8	45	53	15.1%
女生	51	101	152	33.6%
合計	59	146	205	

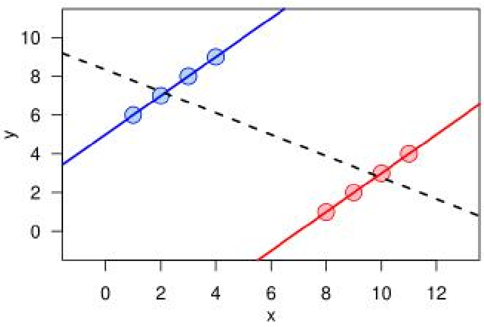
商學院

性別	錄取	拒收	總數	錄取比例
男生	201	50	251	80.1%
女生	92	9	101	91.1%
合計	293	59	352	

根據上面兩個表格來看，女生在兩個學院都被優先錄取。即女生的錄取比率較高。

性別	錄取	拒收	總數	錄取比例
男生	209	95	304	68.8%
女生	143	110	253	56.5%
合計	352	205	557	

會發現反而男生總比例比女生高。下圖顯示出獨立小組出現正的趨勢，而當小組合併時出現負的趨勢



這個例子說明，簡單的將分組數據相加匯總，是不能反映真實情況的。

結論：

將兩組數據放在一起，表面上是其一個分組出現一種趨勢，實際上將所有數據結合趨勢會顛倒

→辛普森悖論發生在生活中的許多地方，上述只是簡單的例子，比較大醫院及小診所的治癒率抑是辛普森悖論的實例，依角度上來看不是治癒的機率越高就能肯定不會出現意外，結合患者身體狀況以及不可預測的變數來分析就會發現事情不是我們表面所看到的那麼簡單，故在我們判定事情的同時要再蒐集更多的資料以及變因設定，才能更還原事件的全貌。

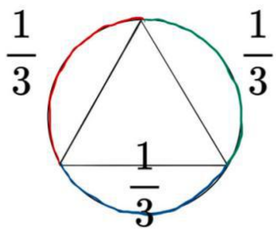
六、伯特蘭悖論

伯特蘭悖論是指機率論的傳統解釋所導致的悖論，由約瑟・伯特蘭在他的著作《Calcul des probabilités》(1889) 中提出。此悖論描述，當我們分析的機率課題牽涉到無限大的樣本空間時，且在使用「每個事件發生的機會皆相同」的原則時不夠謹慎，是未必能得到明確或肯定的結果的。

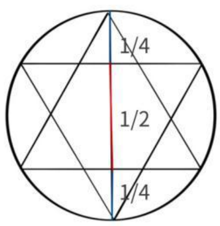
伯特蘭悖論的內容如下：考慮一個內接於圓的等邊三角形。若隨機選圓上的弦，則此弦的長度比三角形的邊較長的機率為何？

以下提供了三種不同的思路，其答案亦不同：

1.「隨機端點」方法：在圓周上隨機選給兩點，並畫出連接兩點的弦。為了計算問題中的機率，可以想像三角形會旋轉，使得其頂點會碰到弦端點中的一點。可觀察到，若另一個弦端點在弦會穿過三角形的一邊的弧上，則弦的長度會比三角形的邊較長。而弧的長度是圓周的三分之一，因此隨機的弦會比三角形的邊較長的機率亦為三分之一。

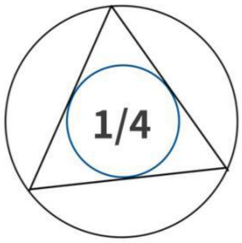


2.「隨機半徑」方法：選擇一個圓的半徑和半徑上的一點，再畫出通過此點並垂直半徑的弦。為了計算問題的機率，可以想像三角形會旋轉，使得其一邊會垂直於半徑。可觀察到，若選擇的點比三角形和半徑相交的點要接近圓的中心，則弦的長度會比三角形的邊較長。三角形的邊會平分半徑，因此隨機的弦會比三角形的邊較長的機率亦為二分之一。

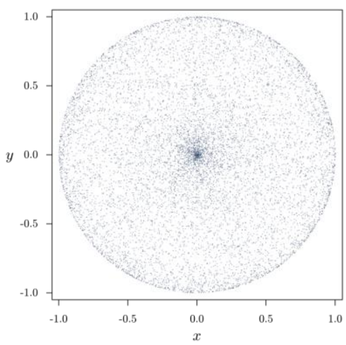


3.「隨機中點」方法：選擇圓內的任意一點，並畫出以此點為中點的弦。可觀察到，若選擇的點落在半徑只有大圓的半徑的二分之一的同心圓之內，則弦的長度會比三角形的邊較長。小圓的面積是大圓的四分之一，因此隨機的弦會比

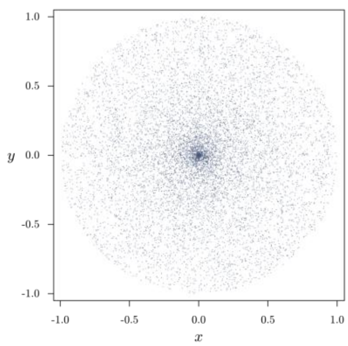
三角形的邊較長的機率亦為四分之一。



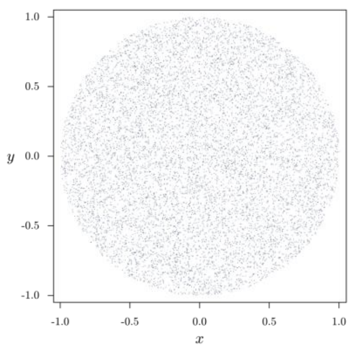
上述方法可以如下圖示。每一個弦都可以被其中點唯一決定。上述三種方法會給出不同中點的分佈。方法 1（偏中心及邊緣）和方法 2（偏中心）會給出兩種不同不均勻的分佈，而方法 3 則會給出一個均勻的方法。下圖是三種不同方法得出的隨機弦中點：



方法 1

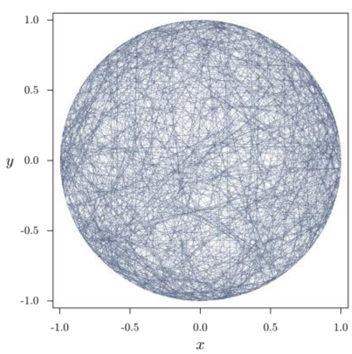


方法 2

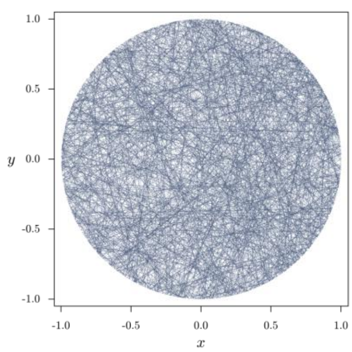


方法 3

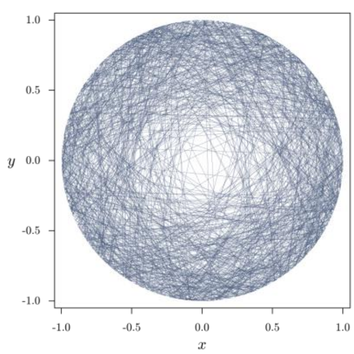
但另一方面，若直接看弦的分佈，方法 2 的弦會看起來比較均勻，而方法 1（偏邊緣）和方法 3（偏邊緣）的弦則較不均勻。



方法 1



方法 2



方法 3

結論：

從伯特蘭悖論可以發現，在沒有給定額外資訊的情況下，並沒有哪一種方法才是所謂正確解答，不存在唯一的選擇方法，那麼也就不存在一個唯一的解答。若沒有更進一步的資訊，也沒有理由認為其中的一個解答會比另一個解答更好。

這也告訴了我們，在數學的問題表達中，必須是嚴謹而清晰的。假如沒有達成嚴謹與清晰的條件，對於同一問題，將可能有不同解讀，從而導致不同結果。

七、參考資料

1.【漫士】99%的人都会答错！为什么概率这么反直觉？

https://www.youtube.com/watch?v=WUHQLhr-Tzo

2.【畢導】看了這個視頻，你會釋懷你倒霉的一生 #檢查悖論 #科普 #冷知識

https://www.youtube.com/watch?v=wS54Gsq_4sE

3.【漫士】数学不存在了！同一个事件居然有三个概率？

https://www.youtube.com/watch?v=fuwkxji1C8Q

4.三門問題（Monty Hall Problem）— Peienwu’s Blog

https://peienwu.com/monty-hall/

5.生日問題- 維基百科，自由的百科全書

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E7%94%9F%E6%97%A5%E5%95%8F%E9%A1%8C

6.為什麼等公車的時間通常會比預期的還久？－－關於「檢查悖論」

https://vocus.cc/article/66b78669fd89780001bc3cc4

7.公車為何老是誤點? — 檢查悖論（Inspection paradox）

https://medium.com/marketingdatascience/%E5%85%AC%E8%BB%8A%E7%82%BA%E4%BD%95%E8%80%81%E6%98%AF%E8%AA%A4%E9%BB%9E-%E6%AA%A2%E6%9F%A5%E6%82%96%E8%AB%96-inspection-paradox-3fe4c2e00224

8.辛普森悖論- 維基百科，自由的百科全書

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E8%BE%9B%E6%99%AE%E6%A3%AE%E6%82%96%E8%AE%BA

9.伯特蘭悖論- 維基百科，自由的百科全書

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BC%AF%E7%89%B9%E8%98%AD%E6%82%96%E8%AB%96

10.悖論-維基百科，自由的百科全書

https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/%E6%82%96%E8%AE%BA