

數學思維與解題第四組 期末報告

德州撲克

第四組

411031112 吳昱澄

411031217 周昱凱

411031218 林展鳴

411031226 林宜鋒

411031227 張炘偉

德州撲克以及GTO理論

德州撲克的歷史

德州撲克的起源雖未完全確定，但德州議會認為其發源於德州羅比斯鎮（Robstown, Texas），大約於 1900 年代初期開始流行。1967 年，一群德州玩家（如 Crandell Addington、Doyle Brunson 和 Amarillo Slim）將此遊戲帶到拉斯維加斯，並逐漸將其從早期的「撲克」簡單命名改為「德州撲克」。相比傳統的換牌撲克（下注次數僅兩次），德州撲克因其四次下注設計而更具策略性與挑戰性。

最初，拉斯維加斯的金塊賭場提供德州撲克遊戲，但因場地簡陋無法吸引富有玩家。1969 年，杜恩斯賭場開始舉辦德州撲克，吸引更多玩家並為職業玩家提供更豐厚的回報。同年，Tom Moore 在雷諾市舉辦第一屆德州博弈協會撲克大賽，其中包括德州撲克。1970 年，Binion 父子取得比賽舉辦權，並改名為世界撲克大賽（WSOP）。一年後，無限注德州撲克成為 WSOP 的主要賽事。

1970 年代，Doyle Brunson 出版了以撲克策略為主的《Super/System》，被視為德州撲克的經典書籍。1980 年代，德州撲克在美國和歐洲迅速擴展，加州在 1988 年宣布其為合法遊戲。職業玩家如 Terry Rogers 和 Liam Flood 將德州撲克引進歐洲，進一步推廣了這款遊戲。

德州撲克的規則

LATE
POSITION

HJ

CO

BTN

THE
BLINDS

MP+1

MP

SB

BB

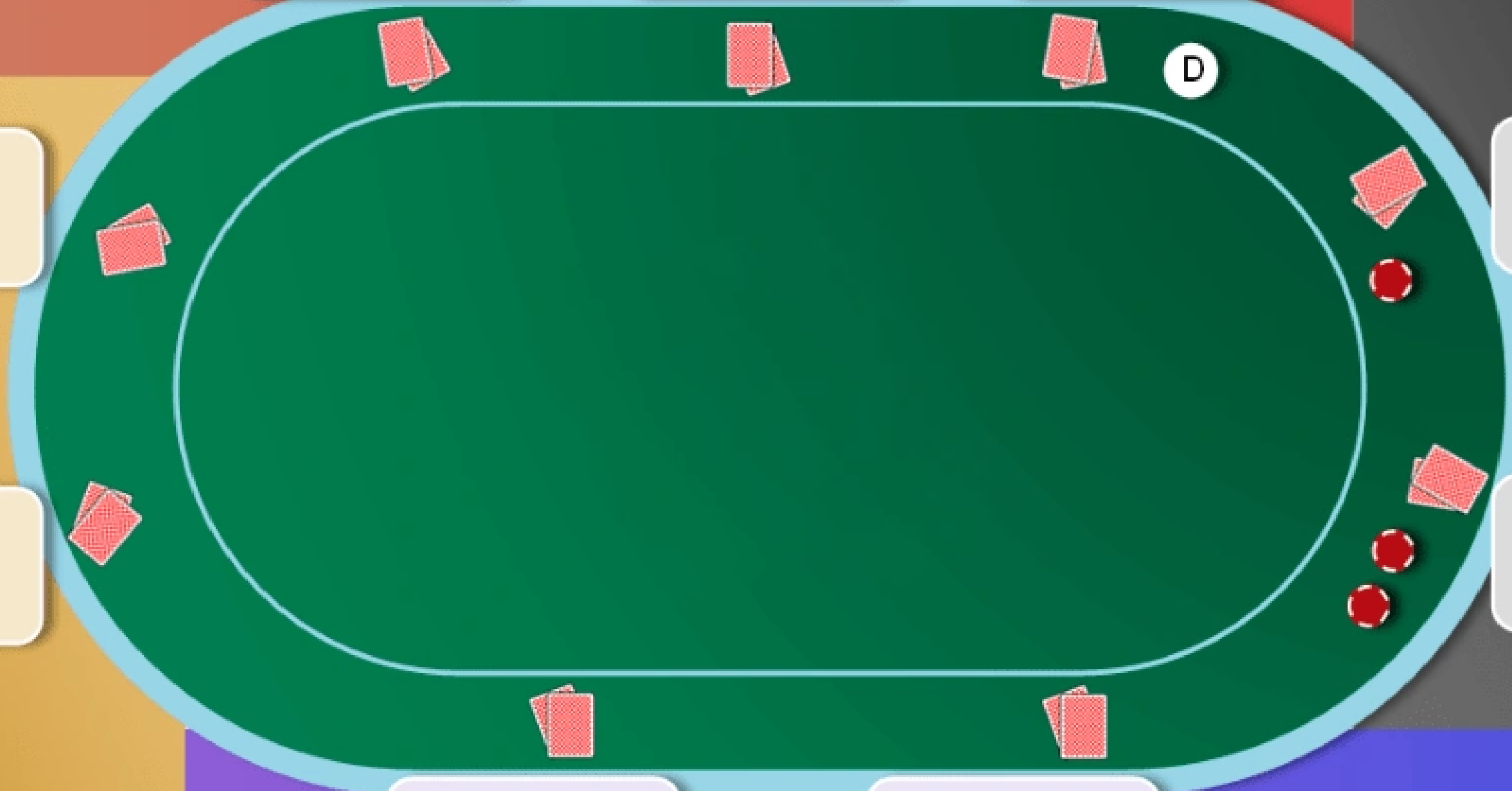
MID
POSITION

UTG+1

UTG

EARLY
POSITION

D



Step.1

坐下



您可以在賭場的空位中自由選擇座位，但是在德州撲克中與座位是一個非常重要的因素，因此在賽事或與牌友玩時通常，座位的順序由規定好的座位表或撲克牌確定。

Step.2

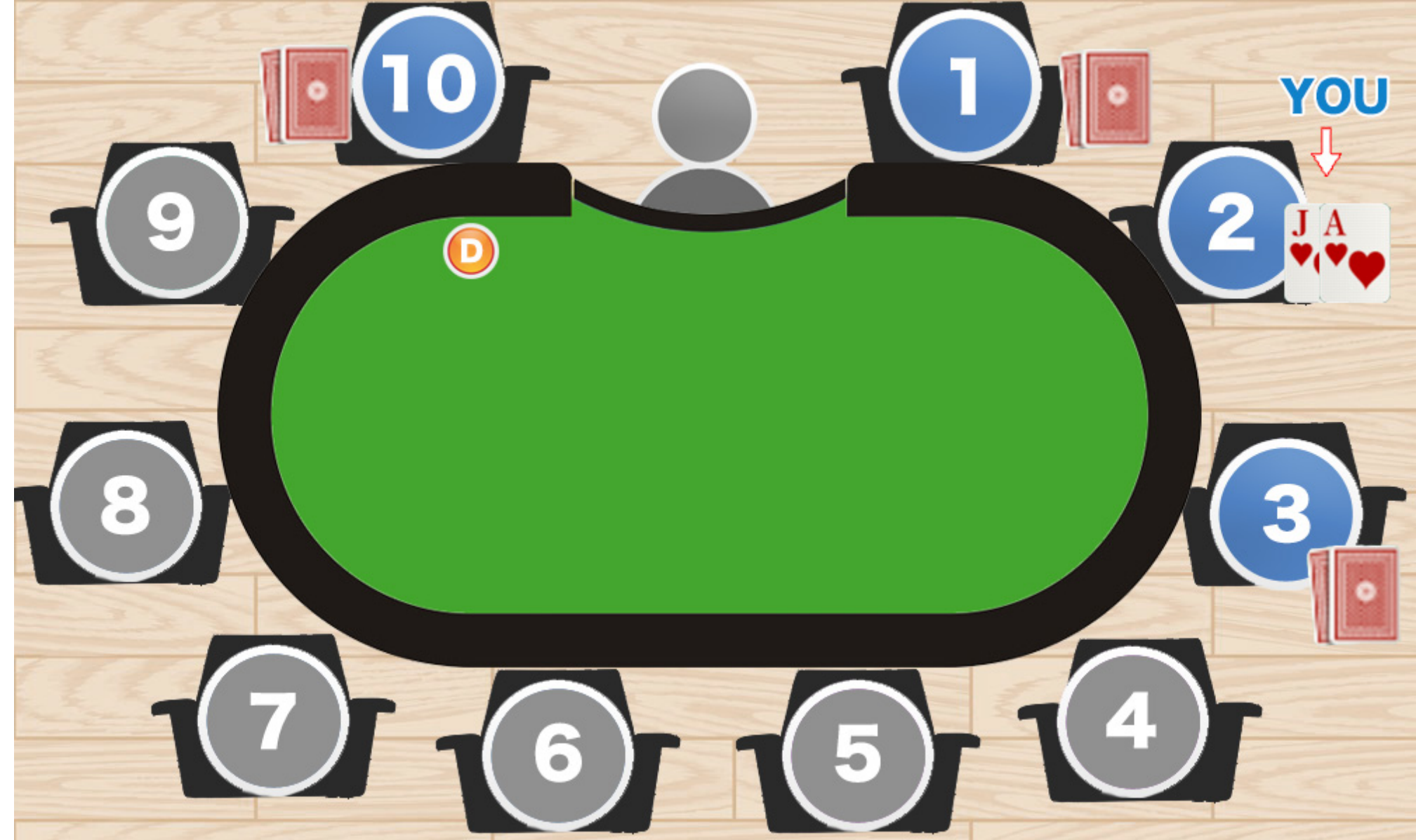
荷官莊家位置的確定



座位決定之後，接下來決定荷官莊家位。

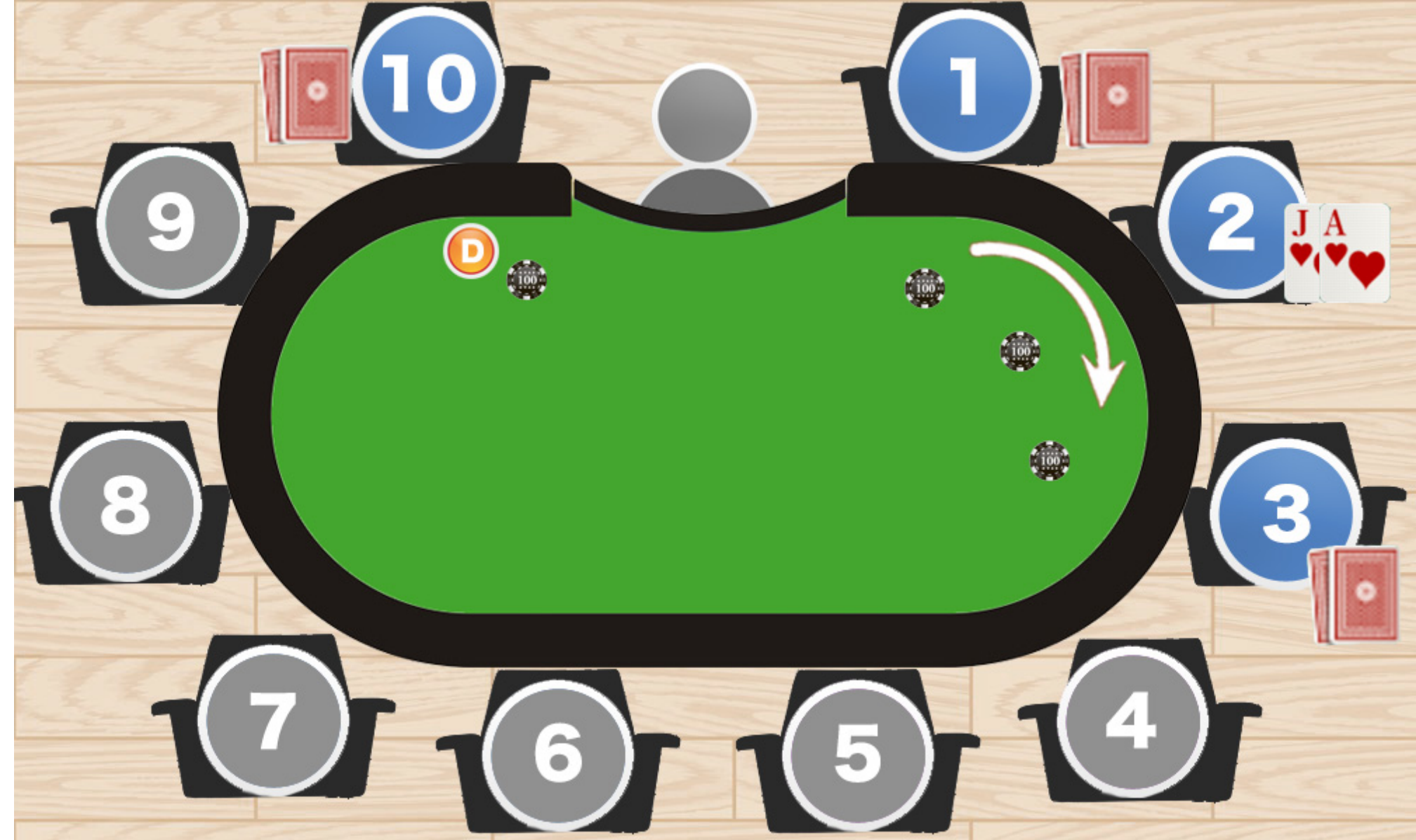
第一個按鈕莊家的位置是荷官（發牌的人）將牌一張一張地分發給玩家，拿到最強牌的人確定為莊家位。確定按鈕莊家位的玩家後，就開始正式發牌。

Step.3 發牌



每個玩家發到2張排面朝下的牌，遊戲開始。這2張牌稱為「底牌」或「口袋牌」。遊戲中只有2張牌是發給每位玩家的，除了進行攤牌外，沒有必要將它展示給其他玩家，並且必須小心不要被人看到它。

Step.4 翻牌前



先下大小盲注，然後給每個玩家發2張底牌，大盲注後面第一個玩家選擇跟注、加注或者蓋牌放棄，按照順時針方向，其他玩家依次表態，大盲注玩家最後表態，如果玩家有加注情況，前面已經跟注的玩家需要再次表態甚至多次表態。

Step.5 翻牌



同時發三張公牌，由小盲注開始（如果小盲注已蓋牌，由後面最近的玩家開始，以此類推），按照順時針方向依次表態，玩家可以選擇下注、加注、或者蓋牌放棄。

Step.6 轉牌&河牌



Turn—發第四張牌，由小盲注開始，按照順時針方向依次表態。

River—發第五張牌，由小盲注開始，按照順時針方向依次表態，
玩家可以選擇下注、加注、或者蓋牌放棄。

經過前面四輪發牌和下注，還剩餘2名以上的玩家時，開始比大小，這時候需要亮牌。

Step.7 亮牌



剩餘2名以上的玩家開始亮牌比大小，成牌最大的玩家贏取池底。

亮牌是用自己的2張底牌和5張公共牌結合在一起，選出5張牌，通過比大小決定勝者。

不論手中的牌使用幾張（甚至可以不用手中的底牌），湊成最大的成牌，跟其他玩家比大小。

牌型大小

※順序是從最強牌開始（概率以7張牌計算）

01



皇家同花順

10·J·Q·K·A的同花色組合

概率：0.0031% (4,324 / 133,784,560)

順子

5張牌連續的數位(花色隨意)

概率：4.62% (6,180,020 / 133,784,560)

02



同花順

同花色加順子

概率：0.0311% (41,584 / 133,784,560)

三條

同一個數位的3張牌(剩下的2張牌隨意)

概率：4.83% (6,461,620 / 133,784,560)

03



四條

同一個數位的4張牌(剩下的1張牌隨意)

概率：0.168% (224,848 / 133,784,560)

兩對

2對同一數位的對子牌

概率：23.5% (31,433,400 / 133,784,560)

04



葫蘆

對子加三條

概率：2.60% (3,473,184 / 133,784,560)

一對

同一個數位的對子牌(剩下的3張牌隨意)

概率：43.8% (58,627,800 / 133,784,560)

05



同花

5張牌同一個花色(數位隨意)

概率：3.03% (4,047,644 / 133,784,560)

高牌

拿到強牌的人勝利

概率：17.41% (23,294,460 / 133,784,560)



什麼是GTO

GTO (Game Theory Optimal) ,是一種基於賽局理論的最佳策略概念，旨在使玩家的策略在長期內無法被對手剝削 (exploited)。簡單來說，GTO是一種平衡策略，無論對手如何應對，你都能最大化自己的收益或最小化損失。

納什均衡

納什均衡 (Nash Equilibrium) 是賽局理論中的一個核心概念，用來描述在一個策略性互動 (博弈) 中，各參與者的策略組合達到了一種穩定狀態。在這種狀態下，任何一個參與者都無法單方面改變自己的策略來讓自己的收益增加。這一概念由數學家約翰·納什 (John Nash) 於1950年代提出。

例子：囚徒困境

有一天警察抓到了兩個搶劫銀行的嫌犯，卻因為沒有證據所以遲遲無法定罪，如果最後證據不足，囚犯只會被關一年；如果囚犯都認罪，則會被關8年。

於是這個時候，警察想了個妙方。警察先將嫌犯兩人分開囚禁，之後分別對他們說：「好！你不認罪是吧？聽好了，一旦你的夥伴認罪了，他就會被釋放，而你將要被關10年！」根據故事我們可以將賽局做個整理。

整理賽局先決條件如下：

1. 囚犯都抗拒，只需關 1 年。
2. 囚犯都坦白，兩人都要關 8 年
3. 其中一人坦白，另一人關10年

整理賽局先決條件如下：

1. 囚犯都抗拒，只需關 1 年。
2. 囚犯都坦白，兩人都要關 8 年
3. 其中一人坦白，另一人關 10 年

整理AB囚犯收益比如下：

1. AB囚犯一起坦白，收益比為 $(-8, -8)$
2. A坦白，最佳收益比為 $(0, -10)$
3. B坦白，最佳收益比為 $(-10, 0)$
4. AB囚犯都抗拒，收益比為 $(-1, -1)$

使用賽局矩陣（Game Matrix）來表示這場賽局：

賽局矩陣		B囚犯	
		坦白	抗拒
A囚犯	坦白	-8 , -8	0 ,-10
	抗拒	-10 , 0	-1 ,-1

A 囚犯的最佳解為「坦白」

如果 B 囚犯選擇坦白，那麼 A 囚犯最佳解就是「坦白」，否則最慘將面臨10年的徒刑。

賽局矩陣		B囚犯	
		坦白	抗拒
A囚犯	坦白	 -8 , -8	0, -10
	抗拒	-10, 0	-1, -1

如果 B 囚犯選擇抗拒，那麼 A 囚犯最佳解也是「坦白」，可以完全不用坐牢！

賽局矩陣		B囚犯	
		坦白	抗拒
A囚犯	坦白	-8, -8	 0 , -10
	抗拒	-10, 0	-1, -1

B 囚犯的最佳解為「坦白」

如果 A 囚犯選擇坦白，那麼 B 囚犯最佳解就是也跟者「坦白」，否則最慘將面臨10年的徒刑。

賽局矩陣		B囚犯	
		坦白	抗拒
A囚犯	坦白	-8 , -8 	0 , -10
	抗拒	-10 , 0	-1 , -1

如果 A 囚犯選擇抗拒，那麼 B 囚犯最佳解也是「坦白」，可以完全逃過牢獄之災。

賽局矩陣		B囚犯	
		坦白	抗拒
A囚犯	坦白	-8 , -8	0 , -10
	抗拒	-10 , 0 	-1 , -1

故事中的嫌犯雖然都很清楚，只要雙方都合作不要認罪就可以有最好的結果，就是蹲完一年的牢就沒事了，結果最後卻敗在無法信任對方而「選擇只對自己好的方法」，就是認罪。

因為兩個人都覺得寧願關8年也好過關10年。最後結果就是因為害怕而雙雙招供，被判了8年的刑罰，明明已經深思熟慮做了最好的決策，卻換來最糟的結果。

賽局矩陣		B囚犯	
		坦白	抗拒
A囚犯	坦白	-8 , -8	0 , -10
	抗拒	-10 , 0	-1 , -1

以上這個故事就是由普林斯頓大學的教授—阿爾伯特·塔克（Albert Tucker）講解—經典的「囚犯困境」（Prisoner’ s Dilemma）。

在這個例子中，**兩個歹徒都認罪就是奈許均衡點**，在奈許均衡的情況下，**沒人擁有改變決策的動力，因為只要改變決策就會使自己的收益減少。**

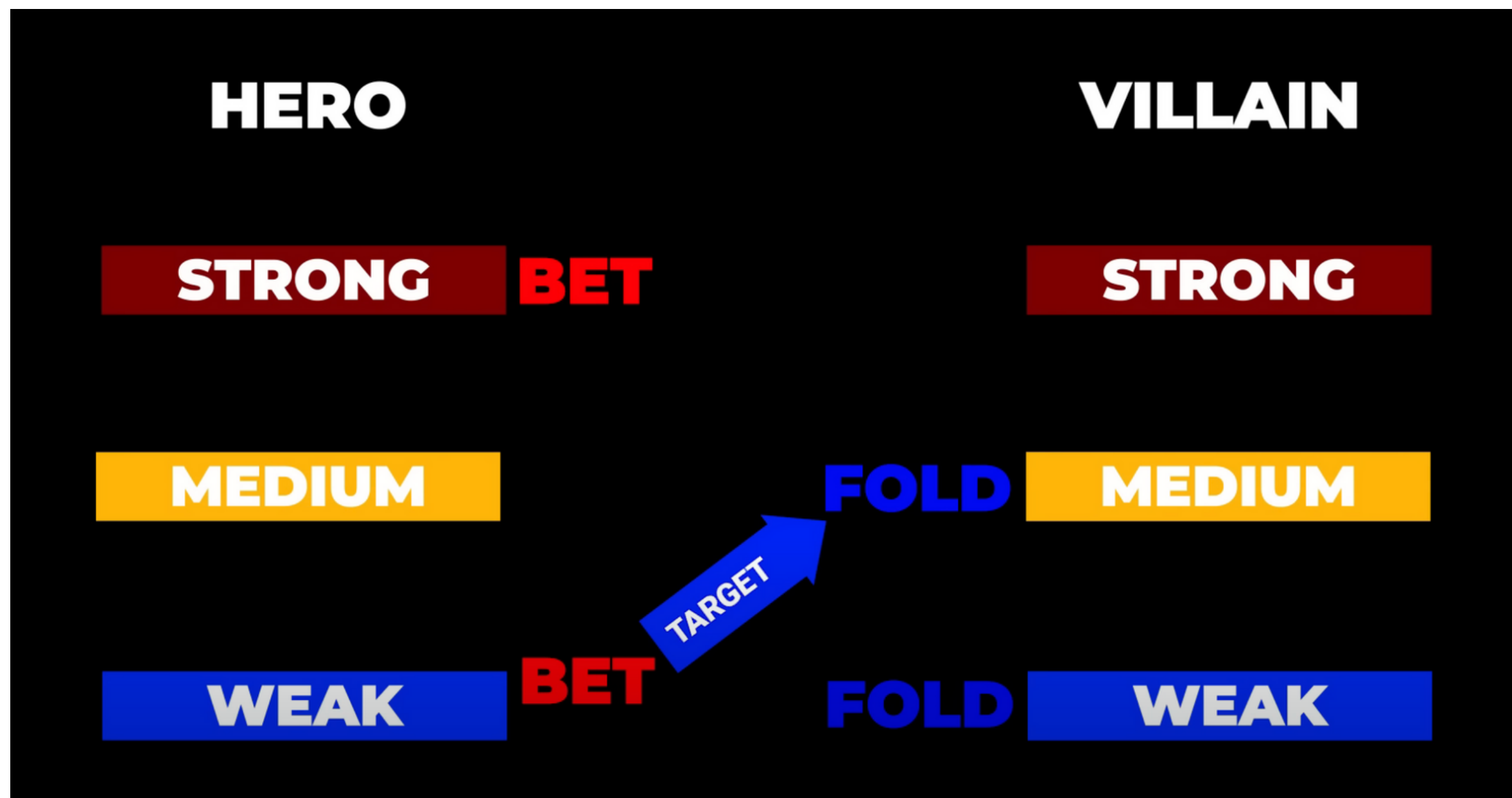
奈許均衡不一定是賽局中的最優解，關鍵在於**能否信任或掌握對方的判斷**。
能掌握或與對方預先共謀，便能在賽局中取得雙贏；反之則是兩敗俱傷。



假設你和對手的牌分成強中弱三個等級

HERO		VILLAIN	
STRONG	BET	STRONG	
MEDIUM		FOLD	MEDIUM
WEAK		FOLD	WEAK

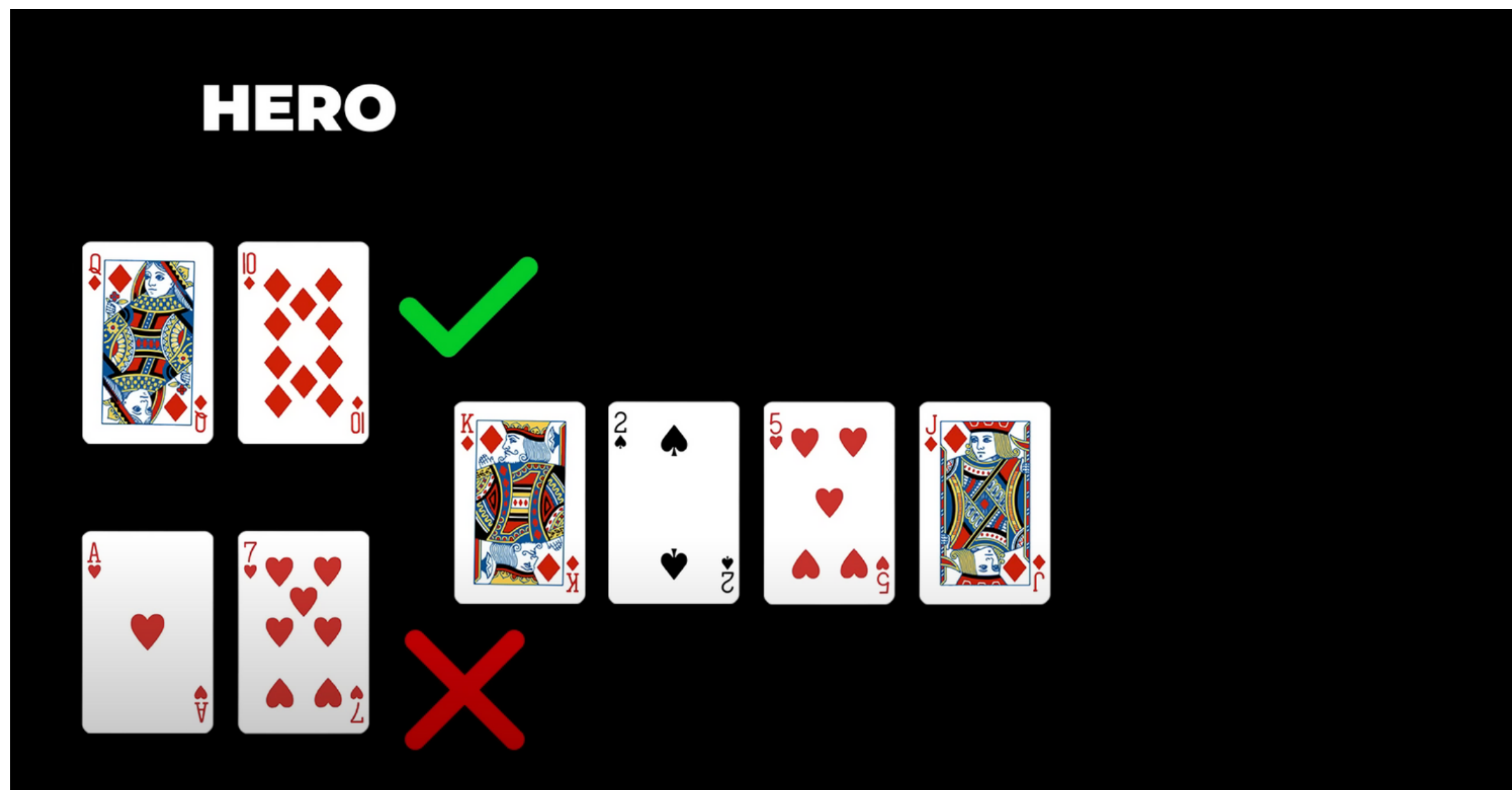
你只在強牌下注，對手就會在拿到弱牌的時候棄牌，不跟你的注，你就無法拿到更多價值



所以應該也在拿到弱牌的時候下注，也叫詐唬 (bluff)



但拿到弱牌的機率遠比好牌來得多，所以一直詐唬就不是個好選擇，應該考慮什麼時候加注什麼時候過牌



GTO會根據你的牌來決定過牌或是加注，例如上面的牌差一張牌同花或順子應該加注，而下面的就沒有

HERO		VILLAIN	
STRONG	BET	BET	STRONG
MEDIUM	CHECK BET	BET	MEDIUM
WEAK	BET CHECK	BET	WEAK

同理中牌也可以根據不同情況夾注或過牌，但對手發現我們過牌的時候都是拿弱牌，只要我們過牌他就加注，我們會不好跟牌

HERO	
STRONG	BET CHECK
MEDIUM	CHECK BET
WEAK	BET CHECK

所以我們應該適時地在拿到強牌時選擇過牌

每一手牌都有 GTO 的打法，通常是概率像是像是三分之一蓋牌三分之二過排，完整的 GTO 又龐大又複雜，很難完整記住，因此一般人會記得是翻牌前的策略

這是UTG的翻牌前策略

AA	AKs	AQs	AJs	ATs	A9s	A8s	A7s	A6s	A5s	A4s	A3s	A2s	
AKo	KK	KQs	KJs	KTs	K9s	K8s	K7s	K6s	K5s	K4s	K3s	K2s	
AQo	KQo	QQ	QJs	QTs	Q9s	Q8s	Q7s	Q6s	Q5s	Q4s	Q3s	Q2s	
AJo	KJo	QJo	JJ	JTs	J9s	J8s	J7s	J6s	J5s	J4s	J3s	J2s	
ATo	KTo	QTo	JTo	TT	T9s	T8s	T7s	T6s	T5s	T4s	T3s	T2s	
A9o	K9o	Q9o	J9o	T9o	99	98s	97s	96s	95s	94s	93s	92s	
A8o	K8o	Q8o	J8o	T8o	98o	88	87s	86s	85s	84s	83s	82s	
A7o	K7o	Q7o	J7o	T7o	97o	87o	77	76s	75s	74s	73s	72s	
A6o	K6o	Q6o	J6o	T6o	96o	86o	76o	66	65s	64s	63s	62s	
A5o	K5o	Q5o	J5o	T5o	95o	85o	75o	65o	55	54s	53s	52s	
A4o	K4o	Q4o	J4o	T4o	94o	84o	74o	64o	54o	44	43s	42s	
A3o	K3o	Q3o	J3o	T3o	93o	83o	73o	63o	53o	43o	33	32s	
A2o	K2o	Q2o	J2o	T2o	92o	82o	72o	62o	52o	42o	32o	22	

GTO扑克策略

頻率

頻率是GTO撲克中最重要原則，它幾乎涉及到你採取的每一個行動，從繼續下注和詐唬，到基本跟注、棄牌和加注。例如，一個好的策略不會在特定情況下單純地全程跟注，需要按照不同頻率混合跟注、棄牌和加注範圍。

起始手牌範圍

為了抵消位子不利影響，需要在開局時使用越來越嚴格的手牌範圍，尤其是在位子較差的情況下。然而，僅僅使用優質起手牌是不夠的。

利用GTO撲克範圍和原則，最好在每個位置都有一個全面的起手牌範圍。它應該包含一些無論翻牌後公牌是甚麼，都能給你強大手牌，可以使用GTO撲克軟體來幫助你建立最佳撲克範圍圖表。

最低防守頻率

這個原則涉及到我們在範圍內必須投入的手牌百分比，以避免被對手利用。
計算最低防守頻率（MDF）的公式如下：

$$\text{MDF} = \text{底池大小} / (\text{底池大小} + \text{下注額})$$

要確定要下注或加注的手牌，首先需要考慮你的起手範圍中手牌組合數，然後使用 MDF 計算應該投入的手牌組合數。通常，應該選擇對手下注範圍具有最佳可操作性和最高權益的手牌。

值得注意的是，MDF 的概念主要用於場外分析，在實際遊戲中很難實現。然而，通過學習這些基礎 GTO 概念，可以幫助改進牌局中決策，特別是對抗展現持續侵略性的對手。

混合詐唬策略

為了完全無法被預測並避免被利用，下注時必須在虛張聲勢和價值下注之間取得平衡，你在下注範圍中加入詐唬次數取決於下注額與底池大小的比例。

這個原則僅適用於河牌局面，因為在翻牌和轉牌時，進行抽牌仍然具有價值；而在河牌時，錯過的抽牌不再有價值，因此純屬詐唬。

在翻牌時，詐唬與價值下注比例通常約為 2:1。這是因為與河牌相比，翻牌時組成手牌機會較小，而且玩家的詐唬通常仍有一定價值。對於轉牌，建議詐唬與價值下注比例為 1:1。

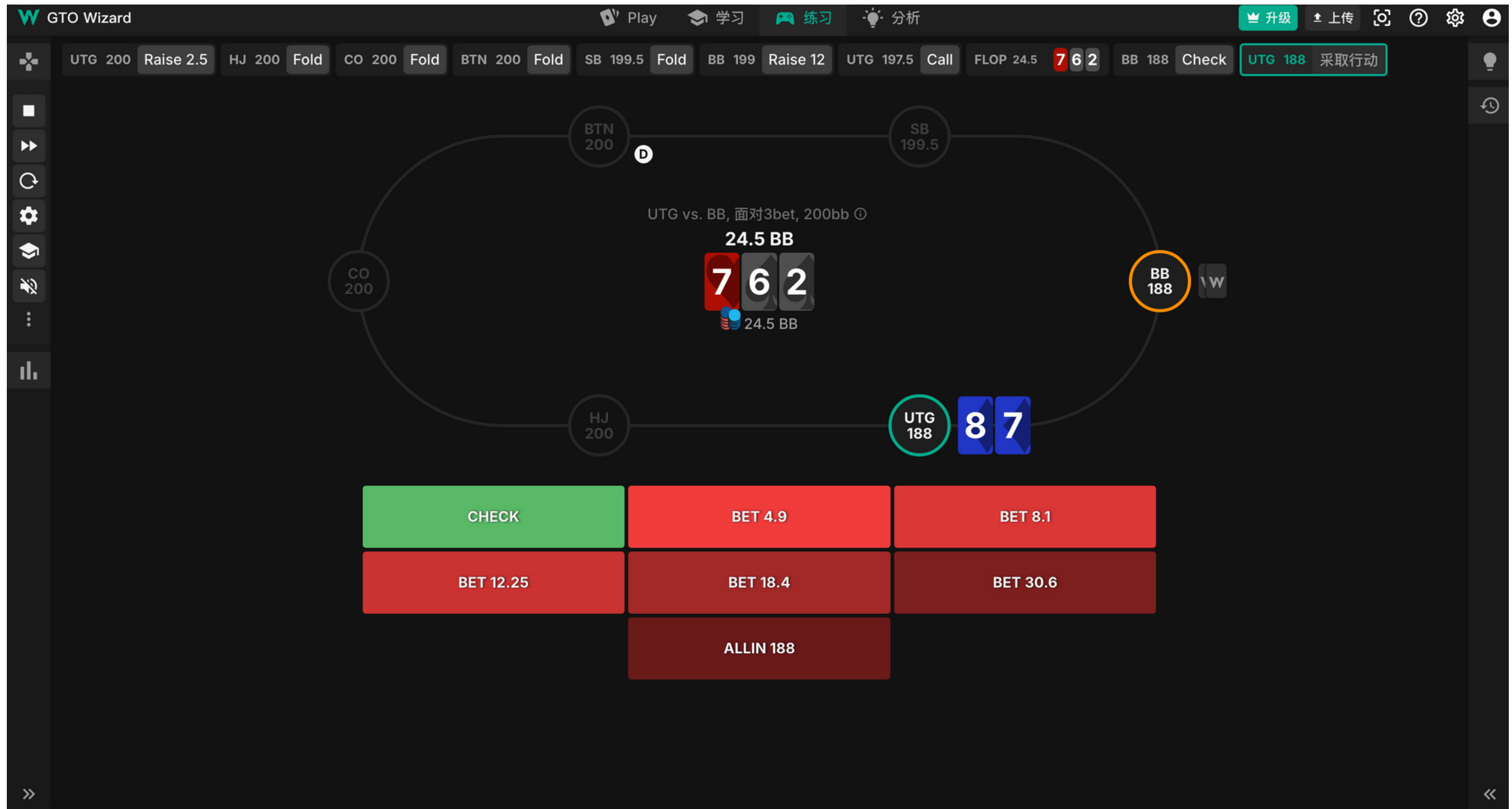
與剝削性策略的對比

剝削性策略 (Exploitative Strategy) 是根據對手的弱點設計的策略，目標是最大化收益。但若對手調整，他們可能會反過來剝削你。而 GTO 策略則是一種長期穩定的策略，適用於任何情況，不依賴對手的弱點。

需要注意的是，雖然 GTO 策略被認為是「無法被對手利用」，但這並不意味著它總是最有利可圖。通過識別並利用對手的錯誤，可以懲罰他們並增加你的勝率。

實際上，要完全實現 GTO 撲克策略是不可能的；但通過學習並應用其原則，你可以減少被老手擊敗的風險。

總而言之，這不是單純選擇剝削式撲克策略或 GTO 撲克策略的問題而已。這兩種風格有不同用途，通過理解他們，你就能在牌局中取得優勢。



可以上[GTO Wizard](#)這個網站上來練習打牌的技巧，他會根據GTO來判斷你打的牌有沒有問題

參考資料

德州撲克專業術語：玩家位置、操作與發牌術語中英文對照

<https://pokertaiwan.com/words/>

賽局理論是什麼？搞懂賽局，讓你不再出局！

<https://veracityconsultant.com.tw/what-is-game-theory/>

OVERBANKROLL德州撲克專欄

<https://www.overbankroll.com/Blog/>

GTO Wizard官網

<https://app.gtowizard.com/>

GTO Explained in Under 10 Minutes

https://www.youtube.com/watch?v=Vx0ij7h_b8o

參考資料

報告結束