數學史(書面報告)

史前數學:

數學普遍認為起源於人類早期的生產活動；中國古代的六藝之一就有「數」，數學一詞在西方有希臘語詞源μαθηματικός（mathematikós），意思是「學問的基礎」，源於μάθημα（máthema）（「科學，知識，學問」）。

數學的源頭在數、量和形之中。現代對動物認知的研究表明，這並不是人類特有的概念。這些概念是狩獵者-採集者社會中日常生活的一部分。在一些語言的詞彙中，保留了「一」、「二」、「很多」的區別，但並沒有大於二的數，這個事實支持了「數」的概念是隨時間而演化的說法。

已知最古老的數學工具是發現於史瓦帝尼萊邦博山的萊邦博骨，大約是公元前 35,000 年的遺物。它是一支狒狒的腓骨，上面被刻意切割出 29 個不同的缺口，使用計數婦女及跟蹤婦女的月經週期。相似的史前遺物也在非洲和法國出土，大約有 35,000 至 20,000 年之久，都與量化時間有關。發現於尼羅河上源之一的愛德華湖西北岸伊香苟地區（位於剛果民主共和國東北部），或許有 20000 年甚至更久，則刻有三組一系列的條紋符號，每列和骨頭等長。常見的解釋是已知最

早的質數序列，亦有認為是代表六個陰曆月的紀錄。 學者彼得·魯德曼否認質數序列的解釋，他認為質數的概念只能出現在除法之後，而他認定除法是在公元前 1000 年後才出現的，因此在公元 500 年以前，質數是不太可能被理解的。他寫道，「一個計數符號之類的東西為什麼要展示 2 的倍數，10 到 20 之間的質數，和一些幾乎是 10 的倍數，這是沒人嘗試解釋過的」。而根據學者亞歷山大·馬沙克的說法，這個骨頭可能影響了隨後埃及數學的發展。因為埃及算術就像這塊骨頭一樣，也使用了 2 的倍數，然而，這也是有爭議的

在幾何學方面，公元前五千年的古埃及前王朝時期即已出現用圖畫表示的幾何圖案。也有人聲稱，年代大約是公元前三千年的英格蘭和蘇格蘭地區的巨石文化遺址中，也發現了融入幾何觀念的設計，包括圓形、橢圓形和畢達哥拉斯三元數。然而上述發現也全部有爭議，而目前最早的無爭議之數學史料當前依然是來自古巴比倫和古埃及史後的。

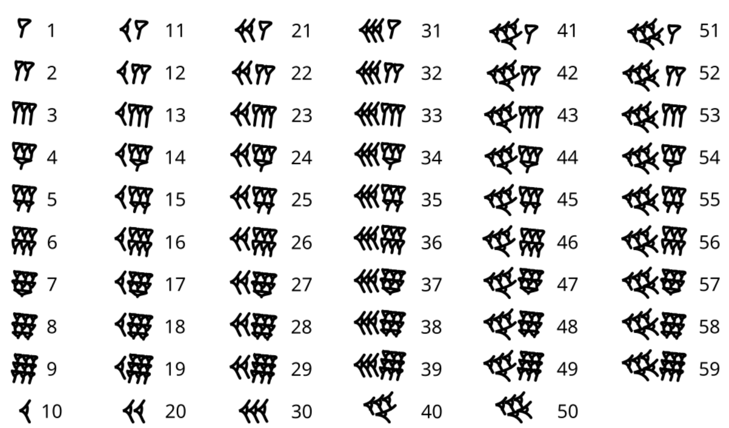
從歷史時代的一開始，數學內的主要原理是為了做稅務和貿易等相關計算，為了了解數字間的關係，為了測量土地，以及為了預測天文事件而形成的。這些需要可以簡單地被概括為數學對數量、結構、空間及時間方面的研究。

古巴比倫數學：

書面數學的最早證據可以追溯到最早在美索不達米亞建立文明的古代蘇米爾人，他們在公元前 3000 年發明了一個複雜的計量法。在公元前 2500 年左右，蘇米爾人在泥板上寫下了乘法表，並開始涉及幾何習題和除法的問題，最早的巴比倫數字也能追溯到這個時期。

巴比倫採用六十進制。1-59 的 59 個數字由兩個符號(表示一 ， 表示十)構成。

在算術領域上，乘法方面在 1854 年考古學家於幼發拉底河流域發現兩塊巴比倫算術泥板，一塊是 1-59 的平方表，另一塊是 1-59 的立方表。



(巴比倫數字 1-59)

而巴比倫人沒有乘法表，因此，如求兩個數的乘積 15 X 22，他們用平方表間接計算：

$$15 \times 22 = \frac{(15+22)^2 - 15^2 - 22^2}{2}$$

除法方面，巴比倫人沒有直除法，他們利用倒數表間接求兩個數

的商

$$\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$$

2 的平方根

$$\sqrt{2}=1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1.41421296.$$

在代數領域，巴比倫人知道解下列形式的代數方程：

- 一次方程
  $ax+b=c$
  $ax-b=c$
- 二次方程
  $ax^2+bx=c$
  $ax^2-bx=c$
- 三次方程
  $ax^3=b$
  $x^2(ax+1)=b$
- 二元方程組
  $\begin{cases}xy=a\\x+y=b\end{cases}$
  $\begin{cases}xy+x=y\\x+y=b\end{cases}$
  $\begin{cases}x^2+y^2=a\\x+y=b\end{cases}$
- 三元二次方程
  $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a\\x-y=b\\y-z=c\end{cases}$
  $\begin{cases}xyz=a\\z=b\\x-y=c\end{cases}$

例子：BM 85200 泥板，求解

$$x^2(12x+1)=1;45$$

解法：兩邊乘 12^2 可得

$$(12*x)^2*(12*x+1)=4,12$$

查 $n^2*(n+1)$表，得

$$6^2*(6+1)=4,12$$

因此 $12x=6$，從而 $x=0;30$。

在幾何學領域，巴比倫人知道測量體積和面積的共同規則。他們測量的圓的周長是直徑的三倍，面積是圓周平方的十二分之一，如果 π 估計為 3，則這是正確的。圓柱體積取作基底和高度的乘積，然而，錐體或正方形金字塔的錐體的體積被錯誤地視為高度和基底總和的一半的乘積。畢達哥拉斯定理(Pythagorean theorem)的例子也是巴比倫人所知道的。沒有資料表明巴比倫人知道畢達哥拉斯定理，這是一個普遍的說法。

古埃及數學：

古埃及數學是古埃及人發明和使用的數學，使用時間範圍在西元前 3000 年到前 300 年間，大致從古王國時期一直到托勒密王國開始。古埃及人使用古埃及數字計數，並解決一些數學問題，通常包括乘法和分數問題。關於古埃及數學的佐證都是從稀有的古代紙草書上而來。根據這些紙草書的記載，古埃及人已經有了幾何的知識，例如計算表面積和體積，用於建築計算，以及代數的知識，例如盈不足術和一元二次方程。

古埃及數字系統是公元前 3000 年至公元一千紀初期古埃及文明所使用的數字系統。該系統使用基於十進制的系統，或通常使用四捨五入到更高的冪。古埃及數字系統通常以聖書體象形文字書寫。

基本符號

數值	1	10	100	1,000	10,000	100,000	1,000,000 或 無量大
聖書體							
加汀納符號表	Z1	V20	V1	M12	D50	I7 / I8	C11
描述	一劃	馬蹄	繩索	睡蓮	彎曲的手指	海奎特女神 （青蛙或蝌蚪）	混沌之神 （Heh）

較複雜的數字可以以多個重複的符號表示，例如卡納克神廟的一個石碑就以以下的重疊的符號表示數字「4622」（四個 1,000、六個 100、兩個 10、兩個 1）：

公元前 1740 年代，古埃及人的會計文本中已經出現了零的符號。該符號為「nfr」，也是代表美麗的符號，其也被用來表示墳墓和金字塔圖紙中的基準面，距離是相對於基準線測量的，高於或低於這條線。

古埃及的分數是不同的單位分數的和，就是分子為 1，分母為各不相同的正整數。任何正有理數都能表達成這一個形式，但古埃及分數的表達形式不是唯一的，還未找到一個算法總是給出最短的形式。

古希臘數學：

古希臘人是數學的奠基者，古希臘的數學在數學史中占有頭等重要的地位。古希臘人提出了公理化體系、形式邏輯，使用邏輯證明、演繹法，強調量化和系統化，使數學成為一門嚴密的系統的富有邏輯性的學科，開啟了後世數學和科學的大門，現在世人所使用的數學和科學方法絕大部分直接來源於古希臘。

與其他文明不同的是，古希臘人的數學強調形式邏輯、演繹法、證明、公理化體系，這些理論、方法都是由古希臘人獨立並唯一地創造的。其他文明並未產生形式邏輯、演繹、公理化體系，並且並不重視證明，更缺乏公理化、系統化。現代數學、科學的理論、方法絕大部分直接來源於古希臘。因此，古希臘是數學乃至科學的奠基者，對數學的貢獻占有最重要的地位。與古希臘相比，總體而言，其他文明的數學存在許多不足，特別是缺乏形式邏輯，因此在現代文明中，古希臘文明及其繼承者是數學與科學文明的奠基者。

此外，古希臘數學家很願意到外國學習，他們受到巴比倫和古埃

及影響很大，例如最早的古希臘數學家泰勒斯，以其命名的泰勒斯定理很可能就是他在巴比倫時學到的。而另一數學家畢達哥拉斯則在埃及留學過。

古希臘數學分為 3 個時期，從伊奧尼亞學派到柏拉圖學派為止，約為公元前七世紀中葉到公元前三世紀；亞歷山大前期，從歐幾里得起到公元前 146 年，希臘陷於羅馬為止；亞歷山大後期，是羅馬人統治下的時期，結束於 641 年亞歷山大被阿拉伯人占領。

而古希臘人將哲學思想帶進數和幾何形狀中，例如認為完美數是完美的、其中四個正多面體是四元素的構造、世界是用數造成的……這些概念，哲學家柏拉圖對數學相當重視，認為數學在教育相當重要，又認為幾何是永恆的。他提出了倍平方問題。

但哲學對數學的影響未必都是好的，因為古希臘人對無限的恐懼，令窮竭法和趨近的方法這些和微積分相差不遠的方法發展受礙，且畢達哥拉斯對整數和分數的迷信令無理數的發現者死去。

中國數學：

中國數學史是指中國的數學發展史。中國傳統數學稱為算學，起源於仰韶文化，距今有五千餘年歷史，在周公時代，數乃是六藝之一。在春秋時代十進位制的籌算已經普及。著名日本數學史家三上義夫指

出，中國算學的發展有二三千年之久，如此長久的發展歷史，世界各國未曾有過，希臘自公元前 6 世紀到公元 4 世紀，僅一千年歷史；阿拉伯數學限於公元 8 世紀到 13 世紀。「中國之算學史，其有長期之發展，不能不謂之為世界中稀有之例也」。

中國古代猿人已有初步的幾何形狀的認識。中國考古學家在陝西發現的幾十萬年前藍田猿人遺留的不規則的石球。幾萬年前山西原始人製作的石球形狀規則。 到了新石器時代，出現空心陶球。七千年前河姆渡人遺址中發現圓筒，圓珠等形狀。新石器時代陶器上出現有規則的圖案。

半坡出土文物中有雙耳陶器，三足陶器，有的陶器上刻有四葉紋，說明上古時代已有 1，2，3，4 等數字概念。1963 年中國考古學家在山西省朔縣峙峪村出土二萬八千年前的獸骨，上有不同數目的刻痕。從一萬多年前山頂洞人遺址中出土的骨管，上刻有可能表示十進位制的圓形、長形刻符，圓形的表示單位數，長形的可能代表十位數。西安半坡和姜寨出土的新石器時代陶器上有代表一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、二十、三十的數字符號。

1974 年－1978 年中國考古學家從青海樂都縣出土數萬件新石器時代的遺物，其中有些骨片上有不同數目的刻紋，表示 1 到 8 之數，未發現有 10 道以上刻紋，與存在十進位制相符。十進位制起源於中

國，至少在公元前 1400 年的中國商代就已經出現。李約瑟指出：「在商代甲骨文，十進位制已經明顯可見，也比同時代的巴比倫和埃及的數字系統更為先進。巴比倫和埃及的數字系統，雖然也有進位，唯獨商代的中國人，能用不多於 9 個算籌數字，代表任意數字，不論多大，這是一項巨大的進步」。籌算至少在戰國初年籌算已然出現。它使用中國商代發明的十進位制計數，利用九九表可以很方便地進行四則運算以及乘方，開方等較複雜運算，並可以對零、負數和分數作出表示與計算。

春秋戰國時代已經形成數學的九個分支-九數： 鄭玄引《周禮注》：「九數：方田、粟米、 差分、 少廣、商功、 軍輸、 方程、 盈不足、 旁要。」

1. 方田：田地測算。
2. 粟米：糧食換算比率
3. 差分：賦稅的分配。
4. 少廣：田畝面積和長闊。
5. 商功：工程土方估計。
6. 均輸 ：運輸費用的分配。
7. 方程 ：方程式。
8. 盈不足： 盈虧問題。
9. 旁要：勾股問題。

算數書是一本中國古代數學教科書，約七千字，載於 190 竹編上。1983 年，當考古學家在湖北省張家山挖掘一個墳墓（247 號漢墓）時，

它和其他一些文獻一起出土。從該墓的文檔證據看，它關閉於西元前 186，屬於西漢代早期。它和九章算術的關係尚在學者的討論中，但其一些內容明顯和九章算術平行。有學者認為算數書可能是九章算術的母本。

九章算術是中國古代數學著作，成書於大約 1 世紀，但也可能早在公元前 200 年就已存在。多數學者相信直到九章算術定形時中國的數學和古代地中海世界的數學多少是獨立的發展的。《九章算術》中的 開平方、開立方、算術應用、正負數、聯立一次方程組、二次方程等都領先世界幾個世紀。

西漢的張蒼、耿壽昌增補和整理《九章算術》，寫成定本，詳細說明開平方、開立方、和求解線性方程組的算法。張衡發明了根號 10、92/29、730/232 作為圓周率的值。

在魏晉南北朝時期(220-581)，中國數學在四方面有長足進展，分別為直角三角形三邊關係的確認、測量學、平面面積和立體體積的計算，以及推算圓周率，由趙爽、劉徽、祖沖之與祖暅父子 4 人個別或相繼完成。

趙爽是魏晉時人，著有《周髀算經注》，其中「勾股圓方圖注」附有圖示，列出有關直角三角形三邊關係的命題 21 條，分屬「勾股」定理、「弦圖」定理、「勾實之矩」定理與「股實之矩」定理。當中唯

有「勾股」定理已見於《周髀算經》。

稍後的劉徽亦魏晉時人，著有《九章算術注》，為《九章算術》各種算法提出簡括証明。他並在注文中提出割圓術，以內接正六邊形開始，逐次倍加邊數的方法，逐步逼近圓周率。《九章算術》僅以$\pi=3$，劉徽則先求得$\pi=157/50=3.14$，和晉武庫王莽銅律嘉量比較，覺得「此術微小」，於是再用圓周率捷法求得$\pi=3927/1250=3.1416$。前三世紀，希臘數學家阿基米德已用正多邊形逐漸增加邊數的方法求圓周率，但他兼用內接和外切兩種計算，得到出的估計值: $223/71<\pi<22/7$ 也就是 $3.140845<\pi<3.142857$。劉徽的割圓術相比更為簡便，劉徽所得的$\pi=3.1416$也優於阿基米德。

劉徽並在《九章算術注》提出重差術，應用中國傳統的出入相補原理，以多達 4 次的觀測，測量山高水深等數值。在唐代，有關重差術的注文被抽出單行，題為《海島算經》，成為《算經十書》之一。劉徽創造的四次重差觀測術，「使中國測量學達到登峰造極的地步」，使「中國在數學測量學的成就，超越西方約一千年」（美國數學家弗蘭克·斯委特茲語）。

劉徽的注釋兼用圖形和模型作說明，以圖形相互拼湊方法解決各種面積計算問題，相當於一般平面幾何學中所用的平移與疊合的方法；並用直截面積的方法來計算立體體積。他指出《九章算術》計算球體

體積方法錯誤，但亦未能提出更準確方法。這個疑問須留待祖沖之解決。

祖沖之(429-500)與祖暅父子使中國數學發展創一高峰。祖沖之著有《綴術》、《九章術義注》及《重差注》（一說《綴術》乃祖暅所作），惜俱失佚。

數學上祖沖之的最大貢獻有二：推算圓周率及計算球體體積（一說後者乃祖暅之法）。他繼承劉徽的割圓術，計算圓周率準確至小數點後 7 位數($3.1415926<\pi<3.1415927$)，這個記錄保持了 900 多年，至 15 世紀方為阿拉伯數學家阿爾·卡西(al-Kashi)打破。祖沖之還採用了兩個分數值的圓周率：「約率」22/7 以及「密率」355/113。日本數學家三上義夫說，「約率π=22/7 無非是幾百年前希臘數學家阿基米德已經得到的數值，但是π=355/113 這個分數，卻是翻遍古希臘，古印度和阿拉伯的數學文獻都找不到的分數，希臘人肯定不知道它；在歐洲直到 1586 年才由荷蘭人安托尼斯宗（Adriaan Anthoniszoon）求出了 355/113 這個比值。因此，中國人掌握這個非凡的圓周率分數比歐洲早出整整一千年之久」。為紀念這位偉大的中國古代數學家，三上義夫要求把 355/113 稱為「祖率」。

祖沖之（或祖暅）並以直截面積相比的方法，解決球體體積問題（在西方，球體體積問題前三世紀阿基米德已解決），其法今存於唐

代李淳風的《九章算術注》中。祖沖之計算方法巧妙，應用現今所謂「卡瓦列里定理」:「等高處的截面面積相等，則二立體的體積相等。」此定理今人公認是義大利數學家卡瓦列里(Gavalieri)所創，因而命名，其實早已為祖沖之所應用。

曆法方面，祖沖之編定「大明曆」，在身故後 10 年為梁朝所採用，取代何承天(370-447)欠準確的舊曆

在隋唐，唐朝《新唐書藝文志》中收錄的《十部算經》(李淳風注)很 能夠反應發展期的數學水準。《十部算經》除收集早期的《周髀》《九章》之外還包羅了《海島算經》(劉徽，263 年)、《孫子算經》、《夏侯陽算經》、《張丘建算經》(皆為第三、四世紀之作，但夏侯陽現傳本則迭經增補，搜集的材料包含到第八世紀的有關內容)、《五曹算術》、《五經算術》(《五曹》為官吏手冊，《五經》則傾向玄學，無甚內容)、《輯古算經》(唐、王孝通，626 年稍后定成)，另外亦含第五世紀祖沖之所作《綴術》，惜已失傳。十三世紀宋朝再刻《十部算經》時，便以《數術記遺》代之，成為現存的《算經十書》。

中國數學的最高峰出現在宋、元時期，此時中國代數得到了發展。其中最重要的著作是朱世傑的《四元玉鑒》，研究一元高次方程組的解，後稱為秦九韶算法，即後世歐洲的霍納算法。《四元玉鑒》中還包括了八次冪的帕斯卡三角，儘管早在公元 1100 年就曾出現在中國

的數學著作中。中國也發明了複雜的組合數學方面的圖形，也就是幻方和幻圓，在古代就有記載，後被楊輝完善。

宋元黃金時期的數學家，一般以南方的秦九韶、楊輝， 北方的李治、朱世傑為代表，合稱秦、李、楊、朱四家。事實上，四家之前有北宋支持王安石變法的沈括(1031-95)。沈括晚年著有《夢溪筆談》，討論「隙積術」， 開創了高階等差級數的研究。又有楚衍(與沈括約同時代在司天監工作) 的學生賈憲，作「增乘開方法」引進隨乘隨加的方法，開平方開立方法。由於隨乘隨加的方法 暗含著二項式定理的係數分配，這種開方法馬上可以推廣到高次開方,為其後不久劉益 ，秦九韶作一般高次方程的數值解法鋪路。在西方，高次方程的數值解法要延到十九世紀 才由 Ruffini(1804)與 Horner(1819)具體提出，西方數學慣稱為 Horner method(霍納方法)。

四家之後，還有王恂，郭守敬，在編《授時曆》時引入求解球面直角三角形的方法。

先將秦李楊朱四家的主要著作列表於下：

- 秦九韶：《數書九章》(1247)，全書分九類：大衍、天時、田域、測望、賦役、錢穀、營建、軍旅、市易。每類 9 個題目，共 81 題。
- 李治：《測圓海鏡》(1248)，《益古演段》(1259)。

- 楊輝：《詳解九章算法》(1261)，日用算法(1262)，楊輝算法(1274-1275))。
- 朱世傑：《算學啟蒙》(1299)，《四元玉鑑》(1303)。

由於他們的成果十分豐富，我們只抽出其中較有代表性的題材，依方法論分類如下：

(i)在代數方法上面，屬整數論的有：

- 不定方程中的聯立一次同餘問題(即前述孫子問題，秦九韶稱之為「大衍求一術」，找到了一般理論，西方人稱之為「中國剩餘定理」(Chinese Remainder theorm)，同樣的理論十八世紀以後逐步由尤拉(1707-1789)與高斯 (1777-1855)建立。)

而有關未知數原理的有：

- 一般高次方程的數值解法(賈憲(十一世紀中期)、劉益、秦九韶(1247))
- 未知數原理，多項式運算，(以李治天元術(1248)為代表。)
- 多元(最多四元)高次聯立方程的求解(朱世傑《四元玉鑑》以「四元術」 (1303)逐步消元，西方在十八世 紀 Bezout(1779)才出現有系統的討論)
- 二項係數分配（即所謂「巴斯卡三角」，(賈憲所作開方作法本源，

載於楊輝詳解《九章算法》(1261)一書中。而(朱世傑亦有《古法七乘方圖》，在西方巴斯卡(法)作此圓時已晚賈，朱四五百年)

(ii)在轉化方法上面

由於「形」與 「量」之間個別的轉化關係到隋唐時大體已經完備， 除了秦九韶在《數書九章》中繼續求解較為複雜的面積體積測量等問題， 及郭守敬進一步作球面三角、垛積問題以外，宋元時期 便沒什麼重大的進展。這時候中國數學若想進一步發展，把握形與量間有系統的轉化 關係，就要有更強烈的社會需求。譬如像西方數學在十七世紀前期，為了描寫質點 或砲彈的運動軌跡，須要將曲線用代數的表示方式寫下來，才能進一步計算， (例如費馬(Fermat)想算砲彈射程最遠時，發射角應該多少?(45 度))， 這種狀況之下，費馬,笛卡兒等人便開始引入座標，這才產生了解析幾何，把握了轉化方法的關鍵。可是當時的中國社會沒有這樣的條件。有了很多「形」與「量」的個別關係，但產生不出形與量之間有系統的轉化關係。(有一種說法:火藥既為中國人所發明，如果中國社會步入資本主義，須要在商業與軍事上向外擴張，那麼不只是解析幾何，就是微積分也自然會發生在中國。)

值得注意的是，不管在代數方法或轉化方法上，中國數學家在定量方面的努力都已接近飽和，必須轉向去做些定性的工作。例如在代

數方法上有了天元術、四元術，便須轉個方向去考慮根與係數的定性關係，才能再往前推進，做出像十九世紀 Abel, Galois 的方程論那樣的工作。而在轉化方法上，有了個別關係也須要改做些定性的考慮，到定性方面去找尋有系統的轉化關係，發展出像解析幾何之類的工作。

(iii)在局部化方法上面

有關變量數學的有三次函數內插法(郭守敬「平、立、定」三差術，朱世傑更算得牛頓公式

$$\begin{aligned} f(n) &= n\Delta + \frac{1}{2!}n(n-1)\Delta^2 + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\Delta^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta^4 \end{aligned}$$

但變量數學終究不曾出現在中國，道理還是社會條件不夠，當時中國社會以天文曆法所需的數學最為繁複。內插法是一種逼近，隱約有了變量數學成份。但變量數學得以發展的真正關鍵在於引入變化率。日月五星的運行雖也有變量，但運行的瞬間速度在當時還不必去考慮，不像在歐洲，力學已發展到須要找出運動規律的時候了。十三世紀前的中國數學在局部化方法上所作的貢獻只限於三次函數的內插逼近及早先祖沖之的 Cavalieri 原理。

宋元以後，明代理學對科學技術與思想發展造成一定束縛。除程

大位《算法統宗》繼吳敬,徐心魯等人將籌算改良，發展為珠算，便利四則計算之外，明朝兩百年間，不僅沒繼承宋元數學而持續發展，甚至宋元著作散失　，數學水準普遍下降。明末清初，西方傳教士陸續來華之時，中國數學正處低潮時期，兩種文化的交會結束了中國本土數學的發展。

到了近代，隨著西學東漸，中國數學逐漸與西方數學體系合流，並做出顯著的貢獻，但傳統算學仍然用於日常生活，如使用算盤的珠算仍然用於日常商業買賣中，尤其是傳統貨品的店舖。

印度數學

印度次大陸上最早的文明是印度河流域文明，在公元前 2600 年到公元前 1900 年之間，在印度河畔繁榮發展。他們的城市布局是規則的幾何圖形，但沒有留存下來的數學檔案。

印度-阿拉伯數字是印度的數學家發明的，他們曾經叫做「印度數字」，但後來被歐洲人稱作「阿拉伯數字」，因為是阿拉伯商人把這種數字引入歐洲的。

在印度-阿拉伯數字系統中，有許多用來表示數字的符號，全部都是從婆羅米數字演化而來的。大約十幾種主要的印度手稿都有獨特的數字符號。

現存最古老的印度記錄有舒爾巴經（斷代不同，在公元前 8 世紀到公元 2 世紀），這是一份宗教著作的附錄，包括了建設不同形狀祭壇的簡單規則，例如正方形、長方形、平行四邊 形和其它圖形。和埃及相似，數學最初的祭壇應用指明了數學的起源之一是宗教儀式。舒爾巴經還給出了構造和給定正方形面積（大致）相同的圓的方法，這隱含了對 pi 值不同精度的計算。除此之外，他們還將 2 的平方根計算到了小數點後 7 位，列出了畢氏三元數，並且說明了畢氏定理。而這一切成果都曾在古巴比倫數學中出現，表明了美索不達米亞文明的影響。然而，目前還不清楚舒爾巴經是否影響了日後的印度數學。和中國一樣，印度數學同樣缺乏連續性，重大的突破往往伴隨著長時間的死寂。

波你尼（公元前 5 世紀）發明了梵語語法。他的表示法很接近現代數學符號，並且應用了元規則、幾何轉換和遞迴[來源請求]。賓伽羅在他的詩歌韻律論述文中，使用了和二進制計數系統相關的文學手法。他對音樂節拍的組合數學討論，相當於二項式定理的簡單版本；賓伽羅的著作還包括了費氏數列的基本思想（稱作 m ā tr ā meru）。

繼舒爾巴經之後的下一份重要的數學檔案是《蘇雅西德漢塔》曆數書，是公元 4 世紀到公元 5 世紀寫成的天文學著作，顯示了來自希臘的強烈影響。它們之所以意義重大，是因為它是最早基於半弦來定

義三角函數關係的，就像現代幾何學一樣，而非托勒密三角幾何中的全弦。儘管伴隨著一系列翻譯錯誤，但正弦（sine）和餘弦（cosine）就是來自梵語的 jiya 和 kojiya。

在公元 5 世紀，阿耶波多完成了《阿里亞哈塔曆書》，一本很薄的著作，用詩篇寫成，目的是作為天文計算和數學測量法的補充，儘管其中並沒有邏輯和演繹法的應用[102]。雖然書中幾乎一半的內容都是錯誤的，但這是十進制進位系統第一次出現，幾個世紀之後，阿拉伯數學家阿布·比魯尼表示， 此書是「普通石頭和高貴水晶的混合」。

公元 7 世紀，婆羅摩笈多發現了婆羅摩笈多定理，婆羅摩笈多性質和婆羅摩笈多公式。並且首次《婆羅摩歷算書》提出了零。他清晰的闡述了如何將零同時作為占位符和數字，並且解釋了印度-阿拉伯數字系統。 從這本印度著作的一本阿拉伯語翻譯（約公元 770 年）中，阿拉伯數學家引進了此計數系統，並且將其轉化為了阿拉伯數字。阿拉伯數學家又將這套數字系統的知識在 12 世紀帶到了歐洲，並在此時取代了一切更老的數字。在公元 10 世紀，大力摩羅對賓伽羅著作的注釋中，包括了對費氏數列和帕斯卡三角的研究，並提出了矩陣。

在公元 12 世紀，居住在印度南部的婆什迦羅第二全面的寫下了關於數學所有分支的著作。他的著作包含的數學概念等價或幾乎等價

於我們今天的無窮小量、導數、均值定理和正弦函數的導數。但他究竟在多大程度上提前發明了微積分，依然是一個在被數學史學家爭議的論題。

在 14 世紀，桑加馬格拉馬的馬德哈瓦， 喀拉拉數學學院的創立者，發現了 π 的萊布尼茨序列，並用該公式的 21 項計算出圓周率為 3.14159265259。馬德哈瓦也發現了用來計算反正切的馬德哈瓦-格雷果里級數。馬德哈瓦-牛頓公式也給出的正弦和餘弦函數的計算以及它們的泰勒逼近。在 16 世紀，耶斯特迪瓦將學院的理論統一成了《數學闡明》。然而，喀拉拉學院並沒有發展出一套微分和積分的完整理論，也沒有任何直接證據證明喀拉拉學院的成果曾被傳出。

阿拉伯數學：

橫跨波斯、中東、中亞、北非、伊比利亞和印度部分地區的阿拉伯帝國在公元八世紀對數學做了重要貢獻。儘管大多數阿拉伯著作都是用阿拉伯語寫成的，但多數作者不是阿拉伯人，這就像是希臘語之於希臘化時期一樣，阿拉伯語是當時整個伊斯蘭世界非阿拉伯學者的書面語。

在九世紀，波斯數學家穆罕默德·伊本·穆薩·花拉子米寫下了很多關於印度-阿拉伯數字和方程式解法的重要書籍。他在公元 825 年寫

成的《印度數字的計算》，加上肯迪的著作，共同把印度數學和印度數字傳入西方。Algorithm（算法）這個單詞就是來自花拉子米名字的拉丁化拼寫 Algoritmi；而 algebra（代數）這個單詞則來自他的一本書，《消去與還原》（Al-Kit ā b al-mukhtaṣar f ī h ī s ā b al-ğabr wa』l-muq ā bala）。他對根為整數的二次方程式給出了詳盡的代數解法，是為了代數本身而講授初等形式代數的第一人他同時也討論了兩種解方程式的基本方法，「消去」和「平衡」，也就是把方程式一側被減去的項，轉移到方程式的另一側，從而將一側的項「消去」了。花拉子米把這種方法稱為 al-jabr。他的代數學不再僅僅注重「給出的一系列問題，而是從基本術語開始講解，給出所有可能出現的方程式形式，從而明確了真正的研究物件」。他是為了方程式本身而研究方程式，他的研究是「在一般意義上的研究，不僅僅是為了解決一個問題，而是為了能通過它解決無限多個問題」。

在埃及，阿布·卡米勒將代數推廣到了無理數的集合，允許將平方根和四次方根作為二次方程式的解和係數。他也發展出了解由含有三個未知數的三個方程式聯立組成的非線性方程組的解法。他成果中的一個獨特之處，在於他試圖在一些問題中，去尋找一切可能的解，他甚至對其中一個問題給出了 2676 個解。他的著作成為了代數學發展的重要根基，並且影響了隨後的數學家，如卡拉吉和斐波那契。

代數學的更深遠發展是由卡拉吉在他的專著《哈法勒》中作出的。其中，他將數學方法進行了擴展來合併未知數的整數冪和整數根。在卡拉吉在公元 1000 年左右寫成的一本書中，出現了一份很接近歸納法的數學證明，被用來證明二項式定理、帕斯卡三角形和立體積分求合的命題。數學史學家弗朗茲·沃普克，讚揚卡拉吉是「引入代數微積分理論的第一人。」同樣在公元 10 世紀，阿布·瓦法將丟番圖的著作翻譯成了阿拉伯語。海什木是第一個推導出四次冪和的公式的數學家，他使用的方法可以非常容易推廣出能求任意次冪和的公式。他為了求拋物面面積而計算了積分，並且能夠將他的結果推廣到任何四次以內的多項式中。因此可以說，他差點就發現了計算多項式積分的通用公式，然而他並不關心高於四次的多項式。

11 世紀晚期，奧瑪·開儼寫成了《歐幾里得困難的討論》，對歐幾里得《幾何原本》中他認為存在的缺陷進行了討論，特別是關於平行公設的問題（即著名的第五公設）。他也是第一個發現了三次方程式幾何上的一般解，對曆法改革也施加了重要的影響。

13 世紀，納西爾丁·圖西推進了球面三角學的發展，他也寫下了關於歐幾里得平行公設具有影響力的著作。16 世紀，吉亞斯丁·賈姆希德·麥斯歐德·阿爾-卡西將圓周率的值計算到了小數點後 16 位。卡西也提出了一個求 n 次方根的算法，他的這個算法是數個世紀後保羅·

魯非尼和威廉·喬治·霍納提出的方法的一個特例。

阿拉伯數學家在同一時期的其它成就，包括了為阿拉伯數字加入了小數點，發現了除當時已被知曉正弦函數之外的全部現代三角函數；肯迪將密碼分析和頻率分析引入數學；海什木對解析幾何的發展；奧瑪·開儼引領了代數幾何的開端；卡爾·卡拉迪發明的一類代數符號。

在鄂圖曼帝國和十五世紀開始的薩非王朝期間，阿拉伯的數學發展陷入蕭條之中。

中世紀歐洲數學：

中世紀歐洲，人們對數學產生興趣的動機和如今的現代數學家大不相同。其中一個動因是，相信數學是理解神創造的自然秩序的鑰匙 —— 這是常常被論證的主題，例如柏拉圖在《蒂邁歐篇》中有所表示，而聖經（《所羅門智訓》）則說 —— 神「處置一切事物，原有一定的尺度、數目和衡量。」

波愛修斯在他的課程中為數學提供了一席之地，在公元 6 世紀，他創造了詞彙四術（quadrivium）來指對算術、幾何、天文學和音樂的學習。他著有《論算數》，是譯自希臘哲學家的尼科馬庫斯所寫的《算術導論》。《音樂的綱要》同樣也是源自希臘文獻；以及對歐幾里得《幾何原本》的一系列摘錄。他的著作都是理論而非實踐的，而且

在希臘和阿拉伯著作復原之前，一直都是數學研究的基礎。

12 世紀，歐洲學者遠遊西班牙和西西里島去搜集阿拉伯的科學文獻，找到的文獻包括花拉子米的《消去與還原》，被切斯特的羅伯特翻譯成拉丁文；歐幾里得《幾何原本》的完整文本，被巴斯的阿德拉德、克恩頓州的赫爾曼和克雷莫納的傑拉德翻譯成了多個版本。

這些新的著作點燃了數學復興的星星之火。斐波那契首當其衝，在 1202 年寫成並在 1254 年再版了《計算之書》，成為了繼埃拉托斯特尼之後第一個做出重大發現的數學家，填補了這整整一千多年的空白。印度-阿拉伯數字相關的成果也被傳入歐洲，並且其它相關的數學問題也有討論。

14 世紀，為了探究各種各樣不同的數學問題，發展出了許多新的數學概念。其中一個重要貢獻是關於局部運動的數學發展。

托馬斯·布拉德華提出，隨著力（F）與阻力（R）的比例成幾何增長，速度（V）就會成算術比例增長。布拉德華以一系列具體的例子來對此加以說明。雖然對數在當時還沒有被發明出來，但我們可以把他的結論理解為 $V = \log(F/R)$，雖然這是一個時代錯誤。布拉德華的分析，是肯迪和阿諾德·諾瓦兩人研究量化複合藥劑本質時所用的數學技巧，後來被轉移到了另一個完全不同物理問題上的例子。

14 世紀牛津計算學者群的成員之一赫特斯柏立·威廉，以一種沒

有微積分和極限概念的形式，指出「一個均勻加速或均勻減速的物體在一段時間內所走過的（距離）與其均速在同一段時間所走過的（距離）相同」。

赫特斯柏立和其它數學家，通過把一個物體全部的加速運動進行累計（今日即積分法），從而在數學上求得物體運動的距離，認為一個恆定運動的物體在加速或者減速運動時在一段時間內運動的距離等於相同時間內其以平均速度運動過的距離。

巴黎大學的尼克爾·奧里斯姆和義大利的喬瓦尼·迪·卡薩里獨立的提出了（這個關係）的圖示，斷定一條表示均勻加速運動的直線，直線下面積就是物體運動的總路程。在隨後對歐幾里得《幾何原本》的註解中，奧里斯姆展示了一個物體在每一個連續的時間增量中會獲得一個與奇數數量成比例的增量。由於歐幾里德已經證明奇數數量的和是平方數，因此物體所獲得的總增量隨時間的平方增加。

文藝復興：

在文藝復興期間，數學的發展和會計學的發展是相輔相成的[134]。雖然代數和記帳之間並沒有直接的聯繫，這門學科的教材和書籍也往往是為了給商人的孩子在算術學校或者算盤學校學習商業和貿易的實用技能而準備的。確實，如果只是記帳的話大概是不需要代數的。

但是，對於更複雜的交易，或者復息利率的計算，就必須掌握算術，而代數知識也就十分有用了。

皮耶羅·德拉·弗朗切斯卡（約 1415-1492）著有關於立體幾何與透視法的作品，包括《論繪畫透視》,《論算術》和《論正則體》。

盧卡·帕西奧利所著的《算術、幾何、比例總論》在 1494 年於威尼斯首次印刷出版，其中包括了一篇 27 頁的記帳論文《計算和記錄的細節》。這主要是編寫和出售給商人將其作為參考書，給有興趣的人作為娛樂破解其中數學謎題，以及教育他的兒子。在《算術、幾何、比例總論》中，帕西奧利首次在印刷書籍中引入了加號和減號，隨後成為了義大利文藝復興時期數學界的標準符號。《算術、幾何、比例總論》也是已知的第一本在義大利印刷的代數書。不過，帕西奧利的不少思想是剽竊自皮耶羅·德拉·弗朗切斯卡的。

在 16 世紀上半葉的義大利，希皮奧內·德爾·費羅和尼科洛·塔爾塔利亞發現了三次方程式的解法。吉羅拉莫·卡爾達諾在 1545 年發表的著作《大術》中，同時還記錄了四次方程式的一種解法，這是由他的學生洛多維科·費拉里發現的。在 1572 年，拉斐爾·邦貝利出版了他的著作《代數學》，這本書中，他解釋了如何處理應用卡爾達諾公式解三次方程式時可能會出現的虛數。

西蒙·斯蒂文的《十分之一》於 1585 年在荷蘭首次發表，首次系

統性講解了十進制的處理方法，對隨後所有關於實數系統的工作都有影響。

因為導航和大面積精確地圖的需求驅動，三角幾何學成長為數學的一個重大分支。巴塞洛繆·皮提斯卡斯首次使用了該詞語，在 1595 年出版了《三角幾何學》。雷吉奧蒙塔努斯的正弦和餘弦函數表則在 1533 年出版。

科學革命期間的數學：

在 17 世紀，在研究經典力學的過程中，微積分的方法被發明。

17 世紀的歐洲湧現出了史無前例的數學和科學思潮。伽利略將一個從荷蘭進口的玩具加以改進，製造了一部望遠鏡，用它觀測到了環繞木星軌道運動的衛星。第谷·布拉赫則收集了天空中行星位置的巨量觀測數據，而作為第谷的助理，約翰內斯·克卜勒首次接觸和認真研究了關於行星運動的主題。由於對數已經被當時的約翰·納皮爾和約斯特·比爾吉發明出來，因此使克卜勒的計算工作變得簡單了。克卜勒成功的建立了行星運動的數學法則。同時，勒內·笛卡兒發展出了解析幾何，因此行星的軌道就可以依照笛卡兒坐標系畫出圖像了。

在眾多前人工作的基礎之上，艾薩克·牛頓發現的物理定律解釋

了克卜勒定律，牛頓匯集的許多數學概念就是今天的微積分。戈特弗里德·萊布尼茨，可以說是 17 世紀最重要的數學家，也獨立地的發展出了微積分，他發明的很多微積分符號至今仍在使用著。科學和數學研究變成了一項國際活動，隨後將很快遍及全球。

除了研究天空的應用數學以外，應用數學伴隨著皮埃爾·德·費馬和布萊茲·帕斯卡的工作而開拓了新的領域。帕斯卡和費馬奠定了機率論研究的基根，並對賭博遊戲進行討論而發展了相應的組合數學。帕斯卡還利用他最新研究出來的機率論提出了帕斯卡賭注。帕斯卡試圖表明，皈依宗教的理由在於，儘管成功的機率很低，但得到的獎賞卻是無限的。某種程度上，這預示了 18 到 19 世紀發展的功利主義的出現。

到了 18 世紀，18 世紀最具有影響力的數學家無疑是萊昂哈德·歐拉。他的貢獻範圍特別廣泛，從因七橋問題創立圖論，到標準化大量數學術語和符號都包括在內。比如說，他將負 1 的平方根稱為 i，還推廣了使用希臘字母 pi 來表述圓周率。他對拓撲學、圖論、微積分、組合數學和複分析都做出了貢獻，以此為證，眾多的數學定理和記號都是以他的名字命名的。

其他 18 世紀重要的歐洲數學家，包括約瑟夫·拉格朗日，他在數論、代數、微積分和變分法方面做出了開拓性的貢獻。拉普拉斯則在

拿破崙時代做了舉足輕重的工作，建立了天體力學和統計學的基礎。

現代數學：

在 19 世紀期間，數學的抽象程度顯著增加了。卡爾·弗里德里希·高斯是這股浪潮的縮影。姑且不談他對科學的貢獻，他在複變函數、幾何學和收斂級數上做出了革命性的工作。它也是給出代數基本定理和二次互反律令人滿意的證明的第一人。

在這個世紀，發展出兩種形式的非歐幾里得幾何，歐幾里得的平行公設在這種幾何中就不再成立了。俄羅斯數學家尼古拉·羅巴切夫斯基和他的競爭對手匈牙利數學家鮑耶·亞諾什，都獨自的定義並研究了雙曲幾何。在雙曲幾何中，過一點可做的平行線不再是唯一了，而三角形的內角和小於 180 度。橢圓幾何隨後在 19 世紀由德國數學家波恩哈德·黎曼建立，在橢圓幾何中，平行線一條也不能做了，而三角形的內角和大於 180 度。黎曼也將這三種幾何學加以一般化並統一，發展出了黎曼幾何。黎曼定義了「流形」的概念，從而將曲線和平面的概念推廣了。

19 世紀出現了抽象代數的偉大思想，德國的赫爾曼·格拉斯曼想出了最早的向量空間。愛爾蘭的威廉·哈密頓則發展出了不遵循交換律的代數學。英國數學家喬治·布林構想出了一種新的代數學，隨後

演化為了我們今天的布林代數。布林代數中只有 0 和 1 兩種數值，是數理邏輯學的起點，並且在計算機科學中擁有眾多重要應用。

奧古斯丁·路易·柯西、黎曼和卡爾·魏爾斯特拉斯則以在數學上更加嚴謹的形式重新表述了微積分。

同時，數學的局限性也第一次被發現了。挪威人尼爾斯·阿貝爾和法國人埃瓦里斯特·伽羅瓦證明了高於四次的多項式方程式不存在通行的代數解法，也就是阿貝爾-魯菲尼定理。其它 19 世紀的數學家應用了這個定理，從而證明了僅靠尺規作圖將三等分任意角、將一個立方體擴大兩倍，或者構造一個和正方形面積相等的圓，都是不可能的。而自古希臘以來數學家就在嘗試解決這三個難題了。在另一方面，幾何學僅有三維的局限性，因參數空間和超複數的提出而被克服了。

阿貝爾和伽羅瓦對多項式方程式的解的研究，奠定了日後群論和抽象代數相依的發展基礎。20 世紀的物理學家和其他科學家發現群論是研究對稱性的理想工具。

在 19 世紀晚期，格奧爾格·康托爾首次建立了集合論。集合論讓人們可以嚴謹地表示極限的概念，並且隨後成為了幾乎所有數學家的通用語言。康托爾的集合論和數理邏輯在皮亞諾、魯伊茲·布勞威爾、大衛·希爾伯特和伯特蘭·羅素手中蒸蒸日上，也引發了關於數學基礎的長時間爭論。

1897 年，庫爾特·亨澤爾引入了數論中的 p 進數概念。

20 世紀，數學開始成為一門主修專業。每年，成百上千人成為新的數學博士，而且數學家既可以留在學術界，又可以加入工業界。Klein 百科全書則承擔起了匯總整個數學和數學應用領域的任務。

在 1900 年國際數學家大會的演說中，大衛·希爾伯特列出了 23 個數學界的未解決問題。這些問題覆蓋了許多不同的數學領域，隨後成為了 20 世紀數學研究的中心。如今，10 個問題已經解決，7 個問題部分解決，而 2 個問題依然是開放的；還有 4 個問題由於太含糊，因此不能判斷有沒有解決。

此時，歷史上有名的不少數學猜想也終獲證明。1976 年，沃夫岡·哈肯和凱尼斯·阿佩爾使用計算機證明了四色定理。安德魯·懷爾斯在他人工作的基礎上成功證明了費馬大定理。保羅·寇恩和庫爾特·哥德爾則證明了，連續性假設本身是獨立於標準公理化集合論而存在的（也就是既不可能從中證明，也不可能從中反證）。在 1998 年，托馬斯·黑爾斯證明了克卜勒猜想。

此時，數學家們合作的規模與領域已經是空前的了。例如在 1955 年到 1983 年完成的有限 單純群分類（即「宏偉定理」），其證明分散在由 100 多位作者發表的 500 多篇期刊論文中，完整的論文加起來共有 10000 多頁；一組法國數學家，包括讓·迪厄多內和安德烈·韋伊，

使用筆名尼古拉·布林巴基寫作，嘗試以最極端的嚴謹和泛化來加以表述全部的已知數學，他們的成果則是幾十卷著作，然而這在數學教育上留下了有爭議的影響。

亞伯拉罕·魯濱遜引入了非標準分析，通過將實數體擴展到了包括無窮大和無窮小量的超實數體，從而平反了微積分中一時名聲狼藉隨後被極限理論取代的無窮小量方法；而約翰·何頓·康威發現了一個和組合博弈論有關，甚至比超實數更大的數字系統：超現實數。

而隨著計算機的發展和不斷進步，從最初的機械模擬計算機到隨後的電子數字計算機，讓工業界可以處理越來越大量的數據，來幫助規劃大規模生產、配給和通訊，新的數學領域也因此發展出來：艾倫·圖靈的可計算性理論、計算複雜性理論；德里克·亨利·萊默使用 ENIAC 促進了數論發展，提出盧卡斯-萊默檢定法；克勞德·香農的資訊理論、信號處理、數據分析、最佳化和其它作業研究的研究；在過去的世紀中，數學在很大程度上注重微積分和連續函數，但因為計算機和通訊網絡的崛起，使離散概念也越發重要，還導致了組合數學，包括圖論的擴張發展；數據處理速度和能力的提升，也讓人們可以去研究那些過去需要大量時間進 行紙筆計算的數學問題，引出了數值分析和符號計算。而 20 世紀最重要的數學方法和算法包括：單體法、快速傅立葉轉換、錯誤校驗碼、源自控制論的卡爾曼濾波，以及公鑰密碼學

的 RSA 算法。

在同一時間，人們開始深入審視數學的極限。在 1929 年到 1930 年，數學家證明了，具有乘法或者加法其中之一的自然數系統之內的一切命題的真偽是可決定的，也就是可以通過某個算法自動計算出來。然而在 1931 年，庫爾特·哥德爾發現，如果自然數同時包括乘法和加法，那麼這個結論就不再成立了；同時包括乘法和加法的系統就是人們所知的皮亞諾算術，而這事實上是一個不完備的系統（僅靠皮亞諾算術就足夠支撐數論了，包括可以表述質數）。而哥德爾的兩個不完備定理表明，一個包括了皮亞諾算術的任何數學系統（涵蓋了數學分析和幾何的一切），真理永遠凌駕於證明之上，即總會有在系統中不可能被證明的真命題。因此，數學本身不可能被規約為數學邏輯學，而大衛·希爾伯特企圖將整個數學變得完備和一致的夢想也就此破滅而不得不改變了。

斯里尼瓦瑟·拉馬努金是 20 世紀數學界最耀眼的身影之一，他是一位自學成才的印度數學家，猜想和證明了關於高合成數、整數分拆、漸進分析和仿 θ 函數的超過 3000 個定理，它也對伽馬函數、模形式、發散級數、廣義超幾何函數和質數理論做了深入探索。

艾狄胥·保羅發表了有史以來最多的數學論文，並和上百名合作者一起工作。由於他的論文實在太多，以至於數學家提出了數學家版

本的貝肯數：艾狄胥數，描述數學論文中一個作者與艾狄胥的「合作距離」的一種方式。

埃米·諾特則被許多人認為是數學史上最重要的女性[144]。她的研究包括環、域和域代數。

就像大部分研究領域一樣，科學時代的資訊爆炸導致了數學的專門化：在 20 世紀結束時，有超過上百種數學的專門領域，而數學學科分類標準則長達幾十頁。越來越多的數學期刊開始出版，而到該世紀結束，因網際網路的發展，又有了在線出版。

數學從古至今便一直不斷地延展，且與科學有豐富的相互作用，並使兩者都得到好處。數學在歷史上有著許多的發現，並且直至今日都還不斷地發現中。依據米哈伊爾·B·塞夫留克於美國數學會快報 2006 年 1 月的期刊中所說，「存在於數學評論資料庫中論文和書籍的數量自 1940 年(數學評論的創刊年份)現已超過了一百九十萬份，而且每年還增加超過七萬五千份的細目。此一學海的絕大部份為新的數學定理及其證明。」

美國的克雷數學研究所在 2000 年時提出七個數學難題，稱為千禧年大獎難題，在 2003 年時俄羅斯數學家格里戈里·佩雷爾曼對龐加萊猜想的證明有決定性的貢獻，他也因此在同年獲得菲爾茲獎，但佩雷爾曼並未現身領獎，也不接受獎金，成為首位拒絕接受菲爾茲獎的

數學家。

二十一世紀時大部份的數學期刊除了印刷版外也會有網路的版本，而且有許多新的數學期刊只有網路版本，期刊開放獲取的趨勢更加明顯，arXiv 是期刊開放獲取的一個重要網站。

參考資料：

中國數學史簡說:

https://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_03_3_06/index.html

印度的數學:

https://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_18_01_1/index.html

維基百科-數學史:

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%95%B0%E5%AD%A6%E5%8F%B2

阿拉伯數學:

http://www2.mcsh.kh.edu.tw/teaches/math/%E9%98%BF%E6%8B%89%E4%BC%AF%E6%95%B8%E5%AD%B8%EF%B9%9DArabic%20mathematics%EF%B9%9E.htm

文藝復興

http://www2.mcsh.kh.edu.tw/teaches/math/%E6%96%87%E8%97%9D%E5%BE%A9%E8%88%88%E6%99%82%E6%9C%9F%E7%9A%84%E6%95%B8%E5%AD%B8%EF%B9%9DMathematics%20in%20the%20Renaissance%EF%B9%9E.htm