數學模型在傳染病擴散中的應用：以SIR模型為例

第八組

傳染病的擴散過程是複雜的，但數學模型可以幫助我們理解疾病如何在群體中傳播。SIR模型（Susceptible-Infected-Recovered）是一個經典的數學模型，用來描述在有限人群中，易感者、感染者與康復者三類人群的變化。此研究將探討如何利用SIR模型來預測傳染病的蔓延，並通過數學推導與模擬分析，探討如何根據不同的參數（如傳染率、康復率等）來調整防疫措施。

什麼是SIR模型

SIR模型是一種經典的傳染病模型，用於描述訊息傳播過程。模型中，S表示易感者，I表示感染者，R表示康復並免疫者。

透過微分方程描述感染率和恢復率，模擬人群狀態變化。在實際應用中，如麻疹疾病案例，SIR模型顯示了易感者減少、感染者和免疫者增加的趨勢，總人數保持恆定。

易感染者 S 隨時間 t 變化：

$dS/dt=-\beta IS/N$

已感染者 I 隨時間 t 變化：

$dI/dt=\beta IS/N-\gamma I$

康復者 R 隨時間 t 變化：

$dR/dt=\gamma I$

其中參數 β 為傳染力，γ 為康復力

在總人口數為 N 又滿足：

$dS/dt+dI/dt+dR/dt=0$

$S(t)+T(t)+R(t)=N$

在 SIR 模型中有提到傳染力 β和康復力 γ，這時我們要來定義這兩個參數，同時需要介紹基本傳染數

基本傳染數是在傳染病學上，指在沒有外力介入，同時所有人都沒有免疫力的情況下，一個感染到某種傳染病的人，會把疾病傳染給其他多少個人的平均數。基本傳染數通常被寫成為 R0

R0的數字愈大，該傳染病在傳播初期的爆發潛力越強。

R0 的定義如下：
$R0=\tau\times\bar{c}\times d=\beta/\gamma$

其中 τ 為每單位十間的接觸量，$\bar{c}$ 為每次接觸傳染的機率，d為感染的時間。
又定義 $\beta=\tau\times\bar{c}$ $\gamma=1/d$

根據 SIR 模型，當 dI/dt>0 時，傳染病會蔓延，意味著：

βIS/N−γI>0 ⟶ βIS/N>γI

因為 S≅N、I=1 且 β=τ×c̄、 γ=1/d 代回 τ×c̄×d，因此：

β/γ=R0>1

數學上指數分布是一種連續機率分布。指數分布可以用來表示獨立隨機事件發生的時間間隔，遊客進入旅館的時間間隔、收到信件的時間間隔，抑或是一個人得到傳染病的時間間隔。

指數分布的機率密度函數定義如下。

f(x,λ)=1−e^−λx x>=0

=0 x<0

其中 λ>0 是分布的一個參數，常被稱為率參數（rate parameter）即每單位時間發生該事件的次數。指數分布的區間 [0,∞)。此分佈意在於抽取一個平均發生速率為 λ 的事件之發生時間。

用SIR函數實現SIR模型

```
def SIR(S, I, R):
    # 計算變化
    dS = - Beta * S *  I/ N
    dR = Gamma * I
    dI = - dS - dR
    # 把變化加回去
    s = S + dS
    i = I + dI
    r = R + dR
    # 邊界檢查
    if (s < 0):
        s = 0
    if (i > N):
        i = N
    if (r > N):
        r = N
    return s, i, r
```

基本傳染數R0，是在流行病學上，指在沒有任何防疫作為介入，同時所有人都沒有免疫力的情況下，一個感染到某種傳染病的初發個案，會把疾病傳染給其他多少個人的平均數，

R0的數字愈大，代表流行病的控制愈難。

在沒有防疫的情況下，
若R0<1，傳染病將會逐漸消失。

若R0>1，傳染病會以指數方式散布，成為流行病。但是一般不會永遠持續，因為可能被感染的人口會慢慢減少。部分人口可能死於該傳染病，部分則可能病癒後產生免疫力。

若R0=1，傳染病會變成人口中的地方性流行病。

在研究傳染病在人群之中的傳播時，通常使用有效傳染數更加方便。

有效傳染數通常被寫成Rt，是估算病毒在一定期間內（t）傳播的能力，常用最近7日的確診個案數來估算；簡而言之，有效傳染數是在基本傳染數的基礎上，考慮到防疫措施之後的結果。

在實際防疫過程之中，疫情是否可以得到控制，取決於有效傳染數是否可以持續小於1。

1. R0表示在完全易感的群體中，一名感染者在其感染期內平均能夠傳染給多少人。

數學公式：
$R0=\beta/\gamma$

其中：
β 是接觸率（每單位時間內每位易感個體與感染者的接觸次數）。
γ 是康復率（每位感染者的平均感染時間的倒數）。

R0 是衡量疾病是否會爆發的關鍵指標。如果 R0>1，則疾病有可能引發流行；如果 R0≤1，則疾病的傳播會逐漸減弱，最終消失。

2. 當前有效傳染數 Rt

定義：Rt 是在某一時間點 t，在部分群體已經免疫或隔離的情況下，感染者每位平均能夠傳染給的易感者數量。它是基於當前流行情況計算的。

數學公式：

$$Rt=R0\times S(t)/N$$

其中：

R0 是基本傳染數。
S(t) 是當前時間點 t 的易感者數量。
N 是總人口數（包含易感者、感染者、免疫者等）。
當 Rt 大於 1 時，疫情擴散；當 Rt 小於 1 時，疫情有可能被遏制。

3. 如何計算 R0 和 Rt

計算 R0：
通常來說，R0 需要通過流行病學模型來估算。例如，基於疾病的傳播特徵、病毒的生物學特性以及接觸網絡進行推算。

計算 Rt：
Rt 隨著時間變化，取決於以下因素：
隔離措施（如社交距離、封鎖等）會減少 S(t) 的數量，從而降低 Rt。
疫苗接種或自然免疫也會減少易感者，降低 Rt。

疾病	傳播途徑	R0
麻疹	空氣傳播	12–18
白喉	唾液	6-7
天花	空氣傳播、 飛沫傳播	5–7
脊髓灰質炎	糞口傳播	5–7
風疹	空氣傳播、 飛沫傳播	5–7
流行性腮腺炎	呼吸道飛沫	10-12
百日咳	空氣傳播、 飛沫傳播	5.5
SARS	空氣傳播、 飛沫傳播、糞口傳播	2-5
流行性感冒（1918年流感大流行）	空氣傳播、 飛沫傳播	2–3
伊波拉出血熱（西非伊波拉病毒疫症）	體液傳播	1.5-2.5
COVID-19	飛沫傳播、接觸傳播、糞口傳播	1.4–8.9 Delta變異株：5.1 Alpha變異株：4–5 Omicron變異株：7
中東呼吸綜合征	呼吸道飛沫	0.5
普通感冒	呼吸道飛沫	2-3
水痘	空氣傳播疾病	10-12

$$
\begin{array}{ll}
\text{感染過程} & \left\{ \begin{array}{c} S(i) + I(j) \xrightarrow{\beta} I(i) + I(j) \\ \\ I(i) \xrightarrow{\gamma} R(i) \end{array} \right. \\
\text{恢復過程} &
\end{array}
$$

在以上三個基本假設條件下，可知：當易感個體和感染個體充分混合時，

感染個體的增長率為 $\beta i(t)s(t)-\gamma i(t)$
易感個體的下降率為 $\beta i(t)s(t)$
恢復個體的增長率為 $\gamma i(t)$

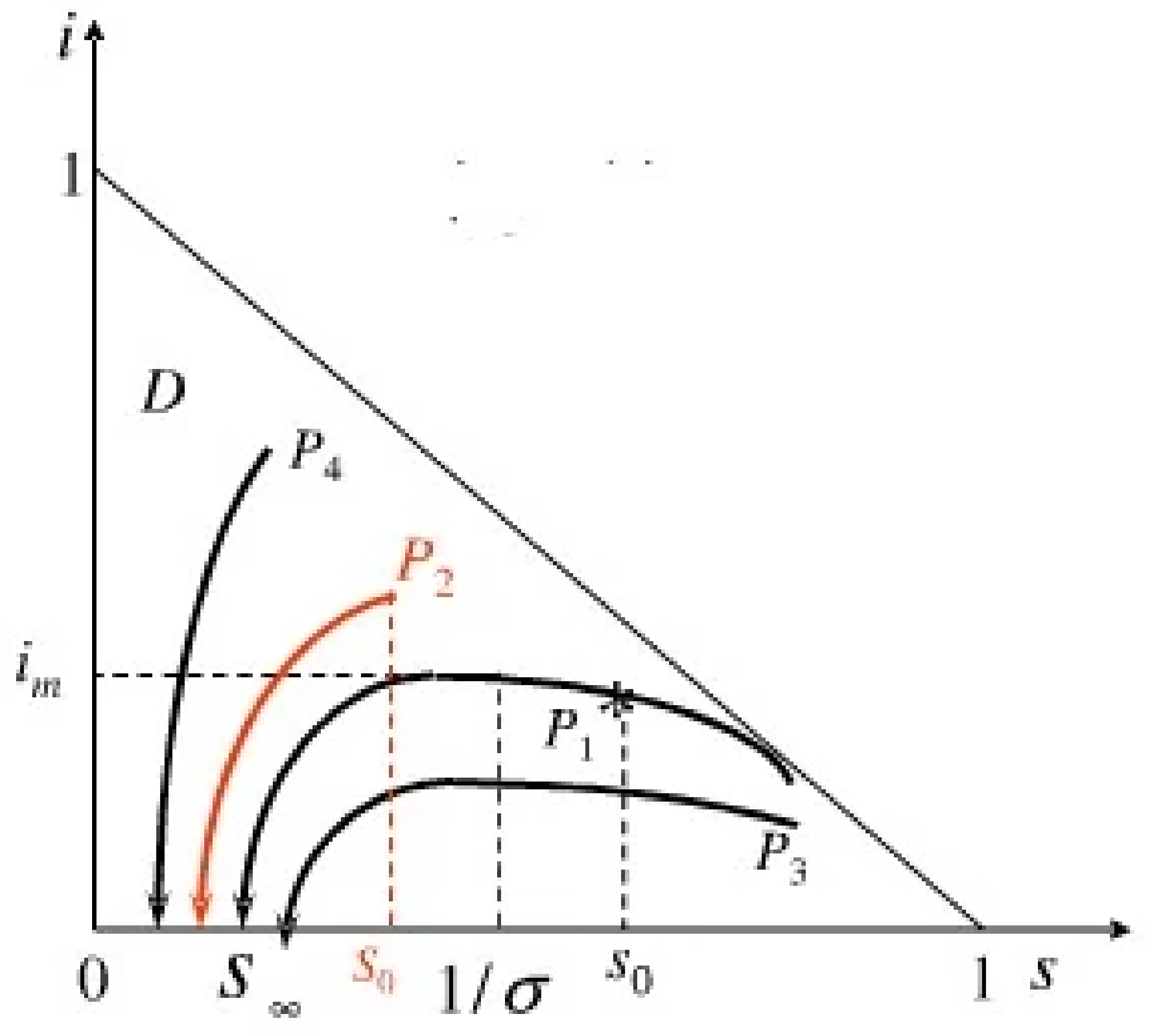
易感者從患病到移出的過程可以用微分方程表示如下：

$$\begin{array}{ll} \text{易感者} & \\ \text{感染者} & \\ \text{恢復} & \end{array} \begin{cases} \dfrac{ds(t)}{dt}=-\beta i(t)s(t) \\ \dfrac{di(t)}{dt}=\beta i(t)s(t)-\gamma i(t) \\ \dfrac{dr(t)}{dt}=\gamma i(t) \end{cases}$$

解得微分方程的解為 $I = (S_0 + I_0) - S + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{S}{S_0}$

，其中 $\sigma = \frac{\beta}{\gamma}$

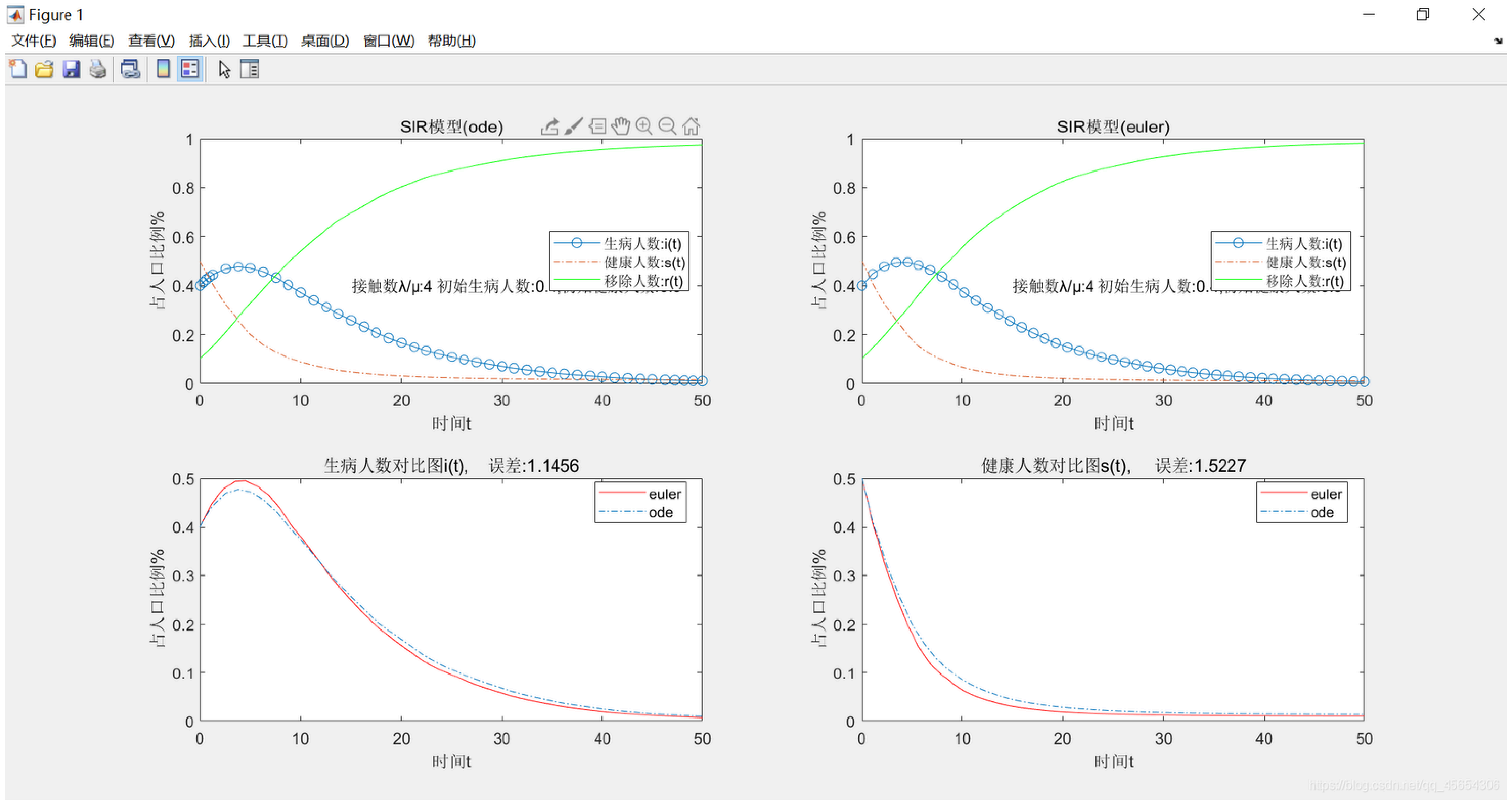
是傳染期接觸數。



i
1
D
P4
P2
im
P1
P3
0
S∞
s0
1/σ
s0
1
s

分析圖像可以得到以下結論：
為保證傳染病不蔓延，需要滿足$s0<1/\sigma$
為了達到這個目的，可以提高閾值$1/\sigma$
需降低σ
即減小日接觸率β
可通過提高衛生水平的方式；增大日治愈率γ
可以通過提高醫療水平的方式，也可以通過群體免疫來提高r0
從而降低s0
使病情不蔓延。

將數值放入程式中所獲得



基於微分方程組求解的SIR模型可以根據已有數據比較准確地擬合曲線，並利用相軌線分析得出使傳染病不蔓延的措施，理論依據充分。

但是應注意到，模型對人群的分類不夠細致，沒有明確考慮隔離的因素。而現實中對疑似病人的隔離是控制疫情傳播的有效手段。模型沒有引入反饋機制，在預測過程中，單純依據已有數據預測未來較長一段時間的數據，必然會使准確度降低。此外，微分方程組求解較為困難，且對初值比較敏感，這對模型的穩健性是一個很大的影響。

SIRS 模型

如果所研究的傳染病為非致死性的，但康復後獲得的免疫不能終身保持，則康復者 R 可能再次變為易感者 S。此時有總人數 $S(t) + I(t) + R(t) = N$ 為常數。參數 α 決定康復者獲得免疫的平均保持時間。系統有兩個不動點 $S = N$（$I = R = 0$）或 $S = \gamma / \beta$（$I / R = \alpha / \gamma$）。前者表示疾病從研究地區消除，而後者則是流行狀態。消除流行病的參數條件是 $\gamma > \beta N$。若做不到，則要儘量減小 α 而增加 γ，使更多人保持對該疾病的免疫力。

SEIR 模型

如果所研究的傳染病有一定的潛伏期，與病人接觸過的健康人並不馬上患病，而是成為病原體的攜帶者，歸入 E 類。此時有仍有守恆關係 $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) =$ 常數，病死者可歸入 R 類。潛伏期康復率 $\gamma 1$ 和患者康復率 $\gamma 2$ 一般不同。潛伏期發展為患者的速率為 α。與 SIR 模型相比，SEIR 模型進一步考慮了與患者接觸過的人中僅一部分具有傳染性的因素，使疾病的傳播周期更長。疾病最終的未影響人數 S_∞ 和影響人數 R_∞ 可通過數值模擬得到。

我們利用SIR模型分析了傳染病的傳播過程。該模型將人群分為三個主要群體：易感者（S）、感染者（I）和康復者（R）。通過分析模型中的參數（如傳播率和康復率），我們能夠預測疫情的發展趨勢，並估算出疫情的傳播速度及持續時間。模型結果顯示，在一定的傳播率下，疫情會在短期內迅速上升，隨後可能會趨於穩定，並最終結束。根據我們的模擬結果，若能有效減少傳播率（如通過社交距離、隔離等措施），則疫情的蔓延可以得到顯著控制，然而，SIR模型也有其局限性。首先，它假設每個人都會在康復後獲得終身免疫，而忽略了可能存在的再感染情況，其次，該模型未考慮到外部因素如人口流動、政府干預和疫苗接種等可能對疫情傳播產生的影響，因此在實際情況中，需根據現實情況進行模型的調整和擴展。SIR模型為我們理解傳染病的基本傳播機制提供了有價值的數學框架，並能幫助公共衛生部門制定應對策略，不過為了提高預測的準確性和現實性，未來的研究應考慮更多的變量和更複雜的模型結構。

參考資料

1.百度百科 SIR模型-提供敘述、公式、圖表
https://baike.baidu.com/item/SIR%E6%A8%A1%E5%9E%8B/1938321
2.【數學建模】傳染病SIR模型-提供敘述、公式
https://blog.csdn.net/qq_45654306/article/details/108135965
3.傳染病 SIR 模型與機率模型介紹與簡易模擬-提供敘述、公式、程式碼
https://tigercosmos.xyz/post/2020/03/sir/
4.中文百科 傳染病模型-提供敘述
https://www.newton.com.tw/wiki/%E5%82%B3%E6%9F%93%E7%97%85%E6%A8%A1%E5%9E%8B
5.維基百科 基本傳染數-提供敘述、數值表
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E4%BC%A0%E6%9F%93%E6%95%B0

Thank You